This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

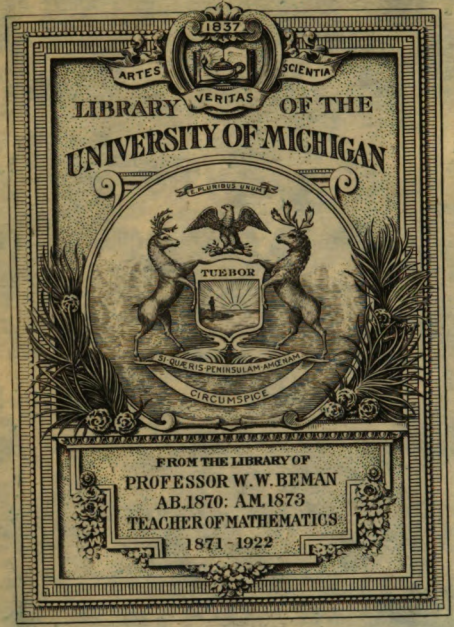
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

B 469075

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

MATHEMATICS
QA
453
.S76 1e

Digitized by Google

Digitized by Google

Elemente

der

Geometrie

in

Lehrsätzen und Aufgaben

zum Gebrauche

an

Gewerbschulen, sowie zur Selbstbelehrung für Gewerbtreibende.

Von

Carl Spitz,

Lehrer der Mathematik an der höhern Bürgerschule und Hauptlehrer an der Gewerbschule zu Baden.

Erster Theil.

Die ebene Geometrie enthaltend.

Mit 147 in den Text gedruckten Holzschnitten.

Heidelberg.

C. F. Winter, akademische Verlagshandlung.

1852.

Digitized by Google

W. W. Beman
ét.
6·23-1923

Digitized by Google

Vorwort.

Wir besitzen zwar eine bedeutende Anzahl von Werken über Geometrie, theils für Gelehrten- und höhere Bürgerschulen, theils für Gewerbschulen, und es möchte fast überflüssig scheinen, dieselbe noch zu vergrößern. Nicht zu verkennen ist, daß für den Gebrauch an beiden erstgenannten Anstalten uns vortreffliche Arbeiten vorliegen; aber die meisten mir bekannten Schriften, welche zur Benützung an Gewerbschulen und zur Selbstbelehrung für Gewerbtreibende bearbeitet wurden, sind allzu streng mathematisch behandelt und können somit nur von Solchen gelesen und verstanden werden, welche sich schon Vorkenntnisse in der Mathematik erworben haben, und sind deshalb für Gewerbschulen und dem größten Theil der Handwerker von ganz geringem Werthe.

Dem Gewerbtreibenden ist es besonders wichtig, zu wissen, wie er die in seinem Gewerbe vorkommenden Berechnungen und Construktionen vorzunehmen habe, und er kümmert sich wenig darum, wie der Mathematiker mittelst Hilfe der Buchstabenrechnung zu dem ihm mitgetheilten Verfahren gelangte. Ihm ein Mittel an die Hand zu geben, die, zur Lösung der ihm vorkommenden Aufgaben, nöthige Verfahrungsweise ohne fremde Beihilfe erlernen zu können, war hauptsächlich Veranlassung zur Herausgabe vorliegenden Werkchens.

428028

Digitized by Google

Stets berücksichtigte ich bei Verfassung desselben, welche Kenntnisse bei denen vorausgesetzt werden dürfen, die es in ihrem Berufe benützen sollen, und habe mich daher aller mathematischen Beweise enthalten, und das Gesagte, wenn es sich thun ließ, auf andere einfache Weise anschaulich gemacht. Hauptsächlich wurde die Berechnung der verschiedenen ebenen Flächen hervorgehoben und zur Erläuterung eine große Anzahl Beispiele beigefügt.

Als Anhang sind diesem Buche noch beigegeben:

1) Eine Sammlung von Aufgaben über geometrische Construktionen und Berechnungen (mit Auflösung);
2) eine Uebersicht der Längen- und Flächenmaße verschiedener Staaten;
3) 2 Tabellen zur Reduktion derselben und
4) eine kurze Abhandlung der Lehre von den Decimalbrüchen.

In gleichem Sinne behandelt, wie die Geometrie in vorliegendem ersten Theile, wird bald der zweite Theil, die Stereometrie enthaltend, nachfolgen.

Möge dieses Werkchen seinen Zweck nicht verfehlen und dem Gewerbsmanne den Nutzen gewähren, welchen ich bei Bearbeitung desselben stets vor Augen hatte.

Baden, im April 1852.

C. Spitz.

Digitized by Google

Inhalt.

Abschnitt I.

Seite

Grundbegriffe §. 1—7. 1

Abschnitt II.

Von der geraden Linie und den Winkeln §. 8—16. . . 2

Vom Messen §. 8. — Französisches Maaßsystem §. 9. — Badisches Maaßsystem §. 10. — Anschreiben der zehntheiligen Maaße in Decimalbruchform §. 11. — Verwandlung der verschiedenen Maaßsysteme §. 12. — Aufgaben §. 13. — Parallele Linien und Entstehung der Winkel §. 14. — Benennung der Winkel §. 15. — Senkrechte und wagrechte Linien §. 16. —

Abschnitt III.

Von den ebenen Figuren im Allgemeinen §. 17—25. . . 9

Benennung der Figuren §. 17—18. — Von den Dreiecken §. 19. — Von den Vierecken §. 20—21. — Von den Vielecken §. 22. — Vom Kreise §. 23. — Vom Winkelmesser und dessen Anwendung §. 24—25. —

Abschnitt IV.

Von dem Maaßstabe, dem Flächenmaaße und der Construktion der ebenen Figuren §. 26—32. 15

Vom Maaßstabe §. 26. — Construktion desselben §. 27. — Aufgaben §. 28. — Vom Flächenmaaße §. 29. — Französisches Flächenmaaß §. 30. — Aufgaben §. 31. — Construktion der ebenen Figuren. §. 32. —

Abschnitt V.

Berechnung der ebenen Flächen §. 33—64. 22

Erklärung §. 33. — Berechnung des Rechtecks §. 34. — Beispiele §. 35. — Berechnung des Quadrats §. 36. —

Digitized by Google

Seite

Vom Ausziehen der Quadratwurzel §. 37—41. — Aufgaben hierüber §. 42. — Beispiele über die Berechnung des Quadrats §. 43. — Berechnung der Raute und Rhomboide §. 44. — Beispiele §. 45. — Berechnung des Dreiecks §. 46. — Beispiele §. 47. — Bestimmung der Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks §. 48—50. — Beispiele §. 51. — Berechnung des Inhalts eines Dreieckes aus den drei Seiten §. 52. — Beispiele §. 53. — Berechnung des Paralleltrapezes §. 54. — Beispiele §. 55. — Berechnung des Trapezes und der unregelmäßigen Vielecke §. 56—58. — Construktion der regelmäßigen Vielecke §. 59—60. — Berechnung derselben §. 61. — Beispiele §. 62. — Berechnung des Kreises und seiner Theile §. 63. — Beispiele §. 64. —

Anhang.

I. Geometrische Construktionsaufgaben 57

A. Aufgaben über gerade Linien und Winkel. — B. Aufgaben über die Dreiecke. — C. Aufgaben über die Parallelogramme, das Paralleltrapez und Trapez. — D. Aufgaben über die regelmäßigen Vielecke. — E. Aufgaben aus der Kreislehre. — F. Verwandlung der Flächen. — G. Construktion der wichtigsten krummen Linien.

II. Geometrische Berechnungsaufgaben 95

III. Uebersicht der Längen- und Flächenmaaße verschiedener Staaten 108

IV. Tabelle zur Vergleichung von Fußmaaßen und dem Meter 113

V. Tabelle zur Vergleichung von Quadratfußen und dem Quadratmeter 114

VI. Von den Decimalbrüchen 115

Erklärung. — Verwandlung der gemeinen Brüche in Decimalbrüche. — Verwandlung der Decimalbrüche in gemeine Brüche. — Addition. — Subtraktion. — Multiplication und Division der Decimalbrüche.

Digitized by Google

Verbesserungen.

Seite 33 Zeile 13 v. o. statt $\frac{1}{10}$ lies $1\frac{1}{10}$.
" 47 " 16 " " " 0,705 " 0,707.
" — " 22 " " " 1,625 " 1,618.
" — " 23 " " " 1,777 " 1,774.
" 48 " 3 " " " 1,447 " 1,175.
" — " 6 v. u. " 11,296 " 11,196.
" 49 statt der Zeile 20 v. o. setze:
$1{,}175 \times R$ oder $S = 1{,}175 \times 0{,}5 = 0{,}5875'$ fein muß.

Digitized by Google

Digitized by Google

Abschnitt I.

Grundbegriffe.

§. 1.

Die Geometrie handelt von der Ausmessung und Berechnung der Linien, Flächen und Körper.

§. 2.

Jeder bestimmt begrenzte Raum, ohne Rücksicht auf die Materie, welche denselben ausfüllt, wird ein geometrischer Körper genannt. An einem solchen unterscheidet man drei Ausdehnungen (Dimensionen), nämlich: Länge, Breite oder Dicke und Höhe oder Tiefe.

§. 3.

Die äußerste Grenze, welche einen Körper von allen Seiten einschließt, wird seine Oberfläche genannt; ein begrenzter Theil der Oberfläche heißt eine Fläche. Diese hat nur zwei Ausdehnungen, nämlich Länge und Breite.

§. 4.

Die Grenzen einer Fläche heißen Linien. Sie besitzen nur eine Ausdehnung, nämlich die Länge. Jede Linie ist von Punkten begrenzt, welche gar keine Ausdehnung haben.

Anmerkung. Aus Vorhergehendem folgt, daß sich weder geometrische Linien noch Punkte sinnlich darstellen lassen, indem selbst der mit dem feinsten Bleistifte auf das Papier verzeichnete Punkt einen Körper vorstellt.

§. 5.

Eine Linie kann man sich auch dadurch entstanden denken, daß sich ein Punkt, Spuren seines Weges zurücklassend, fortbewegt. Diese Bewegung kann aber doppelter Art sein, nämlich der Punkt bewegt

Digitized by Google

sich entweder immer in unveränderter Richtung oder er ändert seine Richtung in jedem Augenblicke. Im ersten Falle nennt man die dadurch entstandene Linie eine gerade (Fig. 1.) und im zweiten eine krumme Linie oder Curve (Fig. 2.).

Fig. 1.

Fig. 2.

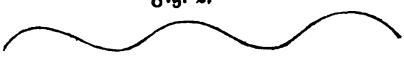
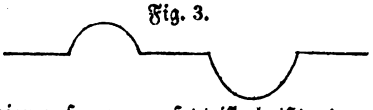


Fig. 3.



Eine Linie, welche aus geraden und krummen Linien zusammengesetzt ist, heißt eine gemischte (Fig. 3.), und eine solche, welche nur aus geraden besteht, deren Richtung verschieden ist, eine gebrochene Linie (Fig. 4.).

Fig. 4.

§. 6.

Unter den Flächen haben wir die ebenen von den krummen zu unterscheiden. Eben wird eine Fläche genannt, wenn man auf ihr nach allen Richtungen gerade Linien ziehen kann; krumm dagegen, wenn dies nur nach bestimmten Richtungen oder gar nicht möglich ist.

§. 7.

Jeder Körper, dessen Begrenzungsflächen eben sind, wird ein eckiger genannt; sind diese aber nur krumm, oder theilweise krumm und eben, so heißt er ein runder.

Abschnitt II.

Von der geraden Linie und den Winkeln.

§. 8.

Da eine Linie nur der Länge nach sich ausdehnt, so kann die Untersuchung einer solchen auch nur dadurch geschehen, daß man sie mit einer andern Linie vergleicht. Zu dem Ende nimmt man eine Linie als Einheit des Längenmaaßes an und sieht zu, wie oft diese in der gegebenen Linie enthalten ist. Dieses Geschäft wird das Messen einer Linie genannt.

Digitized by Google

§. 9.

Ein Maaßsystem, welches besonders in wissenschaftlichen Werken fast allgemein zum Bezeichnen von Längen dient, und das auch den badischen Maaßen zu Grunde liegt, ist das französische.

Die Einheit dieses Systems heißt Meter (mètre) und hat nahezu die Länge des 40 millionsten Theils eines Meridiankreises unserer Erdoberfläche.

Die Eintheilung dieses Längenmaaßes ist aus folgendem Schema leicht zu erkennen.

1	Meter	=	1 Meter.
$\frac{1}{10}$	=	=	1 Decimeter.
$\frac{1}{100}$	=	=	1 Centimeter.
$\frac{1}{1000}$	=	=	1 Millimeter.
10	=	=	1 Dekameter.
100	=	=	1 Hektometer.
1000	=	=	1 Kilometer.
10000	=	=	1 Myriameter.

Anmerkung. In der Folge wird als Abkürzung gesetzt:
met. für Meter. c. m. für Centimeter.
d. m. = Decimeter. m. m. = Millimeter.

§. 10.

Die bei uns als Einheit angenommene Länge ist der badische Fuß oder Schuh. Seine Länge beträgt den zehnten Theil von 3 Metern, oder 10 solcher Fuße geben 3 Meter.

Den Fuß theilt man in 10 gleiche Theile, Zolle genannt, einen solchen Theil (Zoll) in 10 Linien und eine Linie in 10 Punkte.

Von diesem zehntheiligen oder Decimalsystem ist das früher, auch zum Theil jetzt noch angewendete zwölftheilige oder Duodecimalsystem zu unterscheiden. Bei diesem wird der Fuß in 12 Zolle, der Zoll in 12 Linien und die Linie in 12 Punkte getheilt.

Anmerkungen. 1) Eine Länge von 2 Fußen nennt man auch eine Elle, 6 Fuß eine Klafter, 10 Fuß eine Ruthe und 14815 Fuß eine Wegstunde.

2) Zur Abkürzung bezeichnet man Ruthe durch (°), Fuß durch (′), Zoll durch (″), Linie durch (‴) und Punkte durch (⁗ oder ^{IV}) und schreibt diese Zeichen rechts oben an die betreffende Zahl. So wird z. B. 38° 5′ 6″ 7‴ 8^{IV} gelesen: 38 Ruthen, 5 Fuß, 6 Zoll, 7 Linien, 8 Punkte.

Digitized by Google

§. 11.

Bedient man sich bei den Berechnungen nach dem Decimalsystem der Decimalbrüche, so schreibe man die Anzahl der Ruthen, Fuße u. s. w., oder der Meter, Decimeter u. s. f. einer Länge, der Reihe nach neben einander und setze das Komma, wie dieses in vorliegendem Buche der Zweckmäßigkeit wegen durchgehends geschehen soll, nach der Zahl, welche die Anzahl der Fuße oder der Meter angibt. Sind deren keine in der Angabe, so setze man dafür, wie für alle fehlende Theile eine Null. So ist z. B.:

$26° 8' 7'' 4''' = 268,74'$; $8^{met.}\ 5^{d.m.}\ 7^{c.m.} = 8,57^{met.}$

$0,805' = 8''\ 5'''$; $0,704^{met.} = 7^{d.m.}\ 4^{m.m.}$

Solchen, denen die nöthige Fertigkeit im Rechnen mittelst Decimalbrüchen fehlt, ist es sehr anzurathen, bevor sie die folgenden Blätter durchlesen, sich mit diesem wichtigen Theile der Arithmetik recht vertraut zu machen. Man wird im Anhange VI. das Nöthige hierüber angeführt finden.

§. 12.

Aus dem Vorhergehenden ersieht man, daß es nur einer einfachen Zweisatzrechnung bedarf, um badisches Maaß in französischem oder zehntheiliges in zwölftheiligem, so wie auch umgekehrt, auszudrücken. Das nöthige Verfahren läßt sich aus nachstehenden Beispielen erkennen.

1) Wie viel badische Fuß u. s. w. sind $3^{met.}\ 4^{d.m.}$?

Auflös. $3^{met.}$ geben $10'$ (§. 10.)

$3,4^{met.} = x'$

$1^{met.} = \frac{10'}{3}$ also $3,4^{met.} = \frac{10 \times 3,4}{3} = \frac{34}{3}$

$= 11' 3'' 3\frac{1}{3}'''$.

2) Man soll $5' 8'' 4'''$ neubadisches Maaß in französischem ausdrücken.

Auflös. 10 Fuß geben $3^{met.}$

$5,84 = x$

1 Fuß $= \frac{3^{met.}}{10}$ also sind $5,84' = \frac{3 \times 5,84}{10} =$

$\frac{17,52}{10} = 1,752^{met.}$ oder $1^{met.}\ 7^{d.m.}\ 5^{c.m.}\ 2^{m.m.}$

3) Man soll 6 Zoll zehntheiliges Maaß in zwölftheiliges verwandeln.

Digitized by Google

Auflöſ. 10″ zehnthl. geben 12″ zwölfthl.
6″ = = x =

1″ zehnthl. gibt $\frac{12''}{10}$ zwölfthl. alſo

ſind 6″ zehnthl. $= \frac{12 \times 6}{10} = \frac{72}{10} = 7\frac{1}{5}$″ zwölfthl.

4) 9 Zoll zwölftheiliges Maaß in zehntheiligem auszudrücken.
Auflöſ. 12″ zwölfthl. geben 10″ zehnthl.
9″ = = x =

1″ zwölfthl. $= \frac{10''}{12}$ zehnthl. alſo

9″ zwölfthl. $= \frac{10 \times 9}{12} = \frac{90}{12} = 7\frac{1}{2}$″ zehnthl.

5) 8″ 2‴ zehnthl. geben wie viel zwölfthl.?
Auflöſ. 8″ 2‴ machen 82‴ zehnthlg. und da 1′ zehnthl. = 100‴ und 1′ zwölfthlg. $= 12 \times 12 = 144'''$, ſo folgt der Anſatz:
100‴ zehnthl. geben 144‴ zwölfth.
82‴ = = x =

1‴ zehnthl. $= \frac{144'''}{100}$ zwölfthl., alſo ſind

82‴ zehnthl. $= \frac{144 \times 82}{100} = 118{,}08'''$ oder

$118{,}08 : 12 = 9{,}84'' = 9\frac{2}{5}\frac{1}{5}'' = 9''\ 10\frac{2}{5}\frac{3}{5}'''$ zwlft.

6) Man ſoll 6″ 4‴ 4^{IV} zwölfthl. in zehnthl. Maaß verwandeln.
Auflöſ. Es iſt 1″ = 12‴ alſo 6″ = 72‴ und 6″ 4‴ = 76‴ = 76 × 12 = 912^{IV}; folglich 6″ 4‴ 4^{IV} = 916^{IV} und da 1′ zwölfthl. = 12 × 12 × 12 = 1728^{IV} und 1′ zehnthl. = 1000^{IV}; ſo folgt:
1728^{IV} zwölfthl. geben 1000^{IV} zehnthl.
916^{IV} = = x =

1^{IV} zwölfthl. $= \frac{1000}{1728}$, alſo ſind 916^{IV} zwölfthl. =

$\frac{1000 \times 916}{1728} = 530\ \frac{5}{4}{}^{IV} = 5''\ 3'''\ \frac{5}{5}\frac{}{4}{}^{IV}$ zehnthl.

Digitized by Google

§. 13. Aufgaben.

1) Verwandelt a) 5 met.; b) 8 met. 3 d.m.; c) 7 met. 5 d.m. 4 c.m.; d) 15 met. 4 c.m.; e) 2 decamet. 3 met. 5 c.m. in Centimeter.
Result.: a) 500 c.m.; b) 830 c.m.; c) 754 c.m.; d) 1504 c.m.; e) 2305 c.m.

2) Verwandelt a) 34′ 6″; b) 5° 8′ 4″; c) 5′ 8‴ d) 15° 7″ zehnthl. Maaß in Linien.
Result.: a) 3460‴; b) 5840‴; c) 508‴; d) 15070‴.

3) a) 18′; b) 5′ 4″; c) 16′ 7″; d) 123′ 8″ 5‴ in Linien nach dem zwölfthl. Systeme auszudrücken.
Result.: a) 2592‴; b) 768‴; b) 2988‴; d) 17808‴.

4) Schreibet die in 1) angegebenen Werthe als Decimalbrüche in Metern ausgedrückt.
Result.: a) 5 met.; b) 8,3 met.; c) 7,54 met.; d) 15,04 met.; e) 23,05 met.

5) Die in 2) angegebenen Werthe als Decimalbrüche zu schreiben, in Fußen ausgedrückt.
Result.: a) 34,6′; b) 58,4′; c) 5,08′; d) 150,7′.

6) Verwandelt a) 9″; b) 25″; c) 12′ 5″; d) 4′ 5″ 8‴; zehnthl. Maaß in zwölfthl.
Result.: a) 10″ 9$\frac{3}{5}$‴; b) 2′ 6″; c) 12′ 6″; d) 4′ 6″ 11$\frac{3}{5}$‴.

7) Wie viel zehnthl. sind: a) 8″; b) 5″ 6‴; c) 5′ 5″ 8‴; d) 1′ 8″ 11‴ zwölfthl.?
Result.: a) 6″ 6$\frac{2}{3}$‴; b) 4″ 5$\frac{5}{6}$‴; c) 5′ 3″ 6$\frac{1}{3}$‴; d) 1′ 7″ 4$\frac{1}{3}\frac{1}{6}$‴.

8) a) 8′; b) 15′; c) 2° 6′; d) 3° 5′ 4″; e) 2,4′; f) 3,56′; g) 0,84′; h) 0,042′ neubadisches Maaß geben wie viel nach französischem?
Result.: a) 2 met. 4 d.m.; b) 4 met. 5 d.m.; c) 7 met. 8 d.m.; d) 10 met. 6 d.m. 2 c.m.; e) 0,72 met.; f) 1,68 met.; g) 0,252 met.; h) 0,0126 met. oder 1 c.m. 2$\frac{3}{5}$ m m.

9) Verwandelt a) 8 met. 4 d.m.; b) 5 met. 7 c m.; c) 7,44 met.; d) 125,76 met. in neubadisches Maaß.
Result.: a) 2° 8′; b) 1° 6′ 9″; c) 24,6′; d) 419,2′.

§. 14.

Gehen wir nun von der Betrachtung einer Linie über zur Untersuchung der gegenseitigen Lage zweier Linien in einer Ebene,

Digitized by Google

so bieten sich uns hier zwei mögliche Fälle dar; nämlich, entweder haben beide Linien eine solche Lage gegen einander, daß ihre Richtung die gleiche ist, sie sich also selbst bei Verlängerung nicht treffen, oder sie neigen sich gegeneinander und schneiden sich also entweder unmittelbar, oder nach gehöriger Verlängerung.

Im ersten Falle (Fig. 5) sagt man, beide Linien seien gleichlaufend oder parallel, und im letztern (Fig. 6 u. 7), sie bilden einen Winkel miteinander. Die beiden sich schneidenden Linien *cb* u. *ab* (Fig. 6) werden die Schenkel und der Durchschnittspunkt *b* der Scheitel oder die Spitze des Winkels genannt.

Fig. 5.

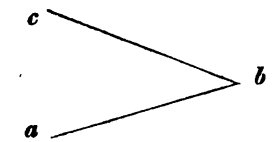


Fig. 6.

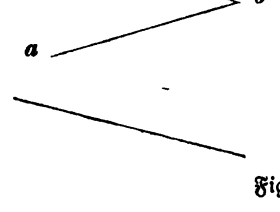


Fig. 7.

Anmerkungen. 1) Beispiele für parallele Richtungen geben uns die Schienen bei Eisenbahnen u. dgl.

2) Der Winkel gibt die Neigung zweier Linien gegen einander an, und die Größe eines solchen hängt demnach nicht von der Länge der Schenkeln ab, sondern wird durch die Weite der Oeffnung, welche diese zwischen sich bilden, bestimmt.

3. Für das Wort „Winkel" werden wir uns in der Folge häufig des Zeichens (∢), und für „parallel" des Zeichens (#) bedienen.

4) Einen Winkel bezeichnet man entweder durch drei Buchstaben, so daß der am Scheitel stehende in die Mitte kommt, oder nur durch jenen Buchstaben allein, welcher an der Spitze steht. So wäre z. B. der in Fig. 6 verzeichnete Winkel nach der ersten Art bezeichnet durch ∢ *abc* oder ∢ *cba*, und nach der zweiten durch ∢ *b*.

§. 15.

Haben zwei Winkel, wie *a* und *b* (Fig. 8) einen Schenkel gemeinschaftlich und liegen die beiden andern Schenkel in gerader Linie, so nennt man solche Nebenwinkel. Neigt sich der ge-

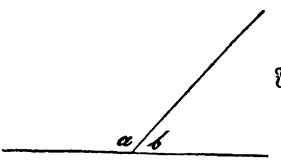


Fig. 8.

Digitized by Google

Fig. 9.

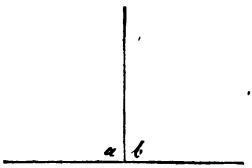


Fig. 10.

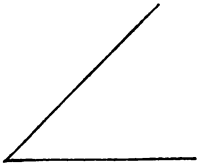
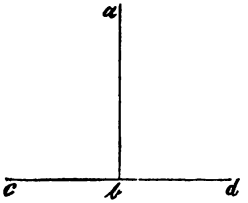


Fig .11.

meinschaftliche Schenkel zweier Nebenwinkel weder mehr auf die eine noch auf die andere Seite (Fig 9.), so heißen die Winkel *a* u. *b* rechte Winkel. Alle Winkel, welche kleiner sind als ein rechter, werden spitze (Fig. 10.), und solche, die größer sind, stumpfe Winkel (Fig. 11.) genannt.

§. 16.

Fig. 12.



Errichtet man eine Linie *ab* (Fig. 12) so auf eine andere *cd*, daß die Winkel, welche gebildet werden, Rechte sind, so sagt man, die Linie *ab* stehe senkrecht, lothrecht oder vertikal auf *cd* und *cd* sei in Bezug auf *ab* horizontal oder wagerecht.

Zur Bestimmung der Größe eines Winkels sowohl, als zum Auftragen eines solchen, bedient man sich des sogenannten Winkelmessers oder Transporteurs, von dessen Einrichtung erst später (siehe §. 24 u. 25) gesprochen werden kann, wenn wir den Kreis und seine Theile näher kennen gelernt haben.

Anmerkungen: 1) Da jeder Körper, welchen man frei fallen läßt, eine zur Oberfläche der Erde senkrechte Richtung annimmt, so wendet man diese Erscheinung im Praktischen an, um Gegenstände vertikal zur Erdoberfläche zu errichten. Man befestigt nämlich eine Schnur an eine Bleikugel oder einen Stein und läßt den Körper frei an derselben hängen; so gibt diese Schnur die senkrechte Richtung an. Eine solche Vorrichtung wird Senkel genannt. Setzlatte, Richtscheit.

3) In der Praxis kann man sich auch, um Winkel von gegebener Größe auf ein Brett oder dergl. aufzutragen, zweier Lineale bedienen, welche sich um ein Charnier drehen. Will man einen Gegenstand nach einem bestimmten Winkel abnehmen, so legt man die obere Kante des

Digitized by Google

einen Lineals an den einen Schenkel des gegebenen Winkels an und dreht das andere Lineal so lange, bis die untere Kante desselben mit dem andern Winkelschenkel zusammen fällt. Beide Lineale bilden dann den gegebenen Winkel mit einander, und dieser ist nun leicht auf den Gegenstand selbst überzutragen.

Abschnitt III.

Von den ebenen Figuren im Allgemeinen.

§. 17.

Eine ebene Fläche kann entweder nur von geraden oder nur von krummen, oder von geraden und krummen Linen zugleich eingeschlossen werden. Wir haben deßhalb je nach der Eigenschaft der Begrenzungslinien, geradlinige, krummlinige und gemischtlinige Figuren zu unterscheiden.

Die Linien, welche eine ebene Figur begrenzen, heißen die Seitenlinien oder Seiten und alle Seitenlinien zusammen nennt man den Umfang der Figur.

§. 18.

Zur Bildung einer geradlinigen ebenen Figur sind wenigstens drei Seitenlinien erforderlich, während eine krummlinige von jeder beliebigen Anzahl Seiten begrenzt sein kann.

Jede ebene von geraden Linien begrenzte Figur enthält immer genau so viele Winkel, als sie von Seiten gebildet ist. Man benennt daher auch die ebenen Figuren nach der Anzahl ihrer Winkel oder Ecken und hat sonach Dreiecke, Vierecke, Fünfecke u. s. w. zu unterscheiden.

Flächen, welche von mehr als vier Seiten eingeschlossen sind, pflegt man auch Vielecke oder Polygone zu nennen.

§. 19. Von den Dreiecken.

Man theilt die Dreiecke, je nach dem Längenverhältniß der Seiten unter einander, ein: 1) in gleichseitige, 2) in gleich-

Digitized by Google

Fig. 13.

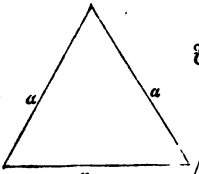
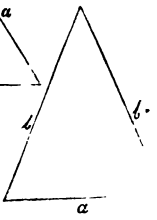


Fig. 14.



schenklige und 3) in ungleichseitige Dreiecke und nennt ein Dreieck gleichseitig, wenn die drei Seiten einander gleich (Fig. 13), gleichschenklig, wenn nur zwei einander gleich sind (Fig. 14) und ungleichseitig, wenn keine Seite im Dreieck der andern gleich ist (Fig. 15.)

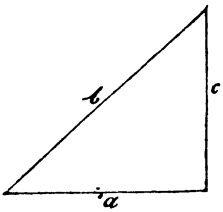


Fig. 15.

Nach den in den Dreiecken vorkommenden Winkeln unterscheidet man:

Fig. 16.

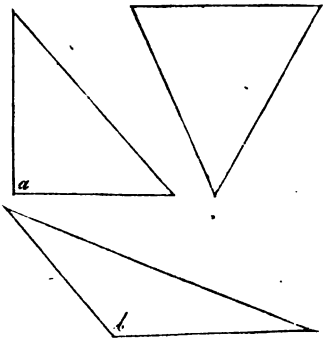


Fig. 17.

1) rechtwinklige, wenn einer der 3 Winkel ein rechter ist (Fig. 16 ∢ *a*);

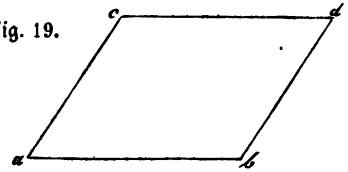
Fig. 18.

2) spitzwinklige, wenn alle 3 Winkel spitze sind (Fig. 17) u. 3) stumpfwinklige, wenn unter diesen ein stumpfer Winkel sich befindet (Fig. 18 ∢ *b*).

§. 20. Von den Vierecken.

Wenn in einem Vierecke je 2 gegenüberliegende Seiten parallel laufen, so heißt dasselbe Parallelogramm; sind nur 2 Seiten parallel, Paralleltrapez und wenn alle 4 Seiten verschiedene

Fig. 19.



Digitized by Google

Richtung haben, Trapez. So ist z. B. Fig. 19 ein Parallelogramm, da *ab* # *cd* und *ac* # *bd*; Fig. 20 ein Paralleltrapez, weil nur *ab* # *cd* und Fig. 21 ein Trapez.

Anmerkung. Manche nennen Fig. 20 ein Trapez und Fig. 21 eine Trapezoide.

Fig. 20.

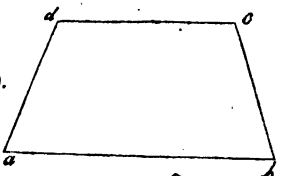
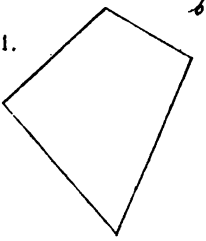


Fig. 21.

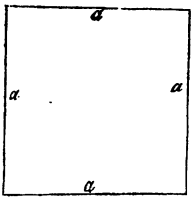


§. 21.

Zu den Parallelogrammen rechnet man folgende 4 Vierecke:

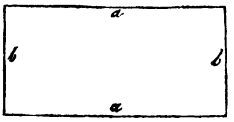
1) das Quadrat (Fig. 22) mit 4 gleichen Seiten und 4 rechten Winkeln.

Fig. 22.



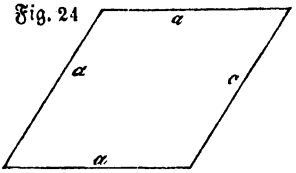
2) Das Rechteck (Fig. 23), bei welchem auch die 4 Winkel rechte sind, aber nur je 2 gegenüberliegende Seiten gleiche Länge haben.

Fig. 23.



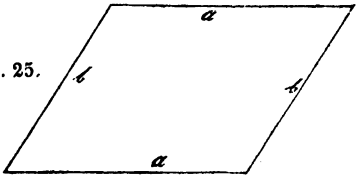
3) Der Rhombus oder die Raute (Fig. 24) mit 4 gleichen Seiten, aber schiefen Winkeln.

Fig. 24



4) Die Rhomboide oder der Rautling (Fig. 25), bei welcher je 2 gegenüberliegende Seiten gleich und die Winkel schiefe sind.

Fig. 25.



Digitized by Google

Anmerkung. Das Quadrat ist also ein rechtwinkliges gleichseitiges, das Rechteck ein rechtwinkliges ungleichseitiges, die Raute ein schiefwinkliges gleichseitiges und die Rhomboide ein schiefwinkliges ungleichseitiges Parallelogramm. Die Raute heißt auch verschobenes Quadrat und die Rhomboide verschobenes Rechteck.

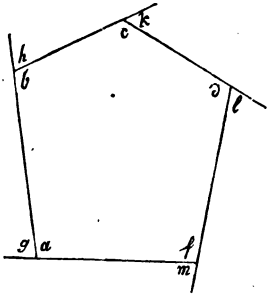
§. 22. Von den Vielecken.

Ein Vieleck wird regelmäßig genannt, wenn alle Seiten und Winkel in demselben einander gleich sind, unregelmäßig dagegen, wenn dies nicht der Fall ist.

Zieht man von einer Ecke eines Vielecks aus gerade Linien nach den andern Eckpunkten, so heißen diese Theillinien oder Diagonalen.

Die Winkel, welche von den Seiten des Vielecks gebildet werden, heißen Umfangswinkel, und diejenigen, welche entstehen, wenn man die Seiten nach ähnlicher Richtung verlängert, Außenwinkel des Vielecks. So sind z. B. in dem Fünfecke Fig. 26 die Winkel *a*, *b*, *c*, *d* und *f* die Umfangswinkel und *g*, *h*, *k*, *l* und *m* die Außenwinkel.

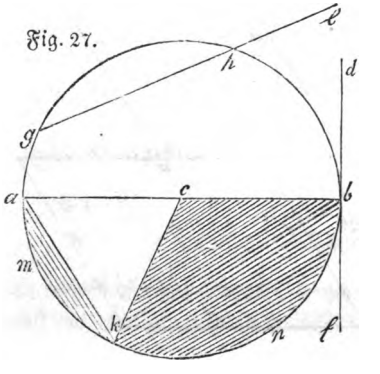
Fig. 26.



§. 23. Von dem Kreise.

Bewegt sich ein Punkt in einer Ebene so um einen andern, in derselben Ebene befindlichen Punkt, daß er immer gleich weit von ihm entfernt bleibt, so heißt die von ihm beschriebene Linie eine Kreislinie, und die von der Kreislinie eingeschlossene Fläche Kreisfläche oder kurz Kreis (Fig. 27).

Fig. 27.

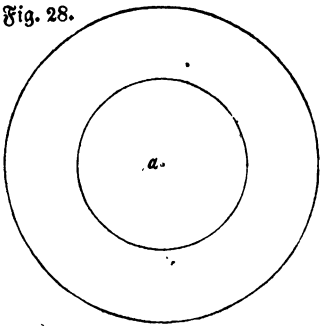


Die Länge der Kreislinie *aghbka* wird der Umfang oder die Peripherie des Kreises und ein Theil derselben, wie *amk*, ein Kreis-

Digitized by Google

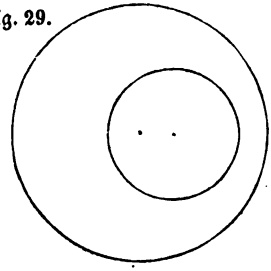
bogen genannt. Der feste Punkt *c* heißt der Mittelpunkt oder das Centrum. Jede Linie von einem Punkte der Kreislinie nach einem andern, wie *ak*, nennt man Sehne oder Chorde, geht sie aber durch den Mittelpunkt, wie *ab*, so erhält sie den Namen Durchmesser oder Diameter. Der halbe Durchmesser *ac* heißt Halbmesser oder Radius. Eine Linie, welche den Kreis schneidet, wie *gl*, wird Schneidelinie oder Sekante, und eine solche, die den Kreis nur in einem Punkte berührt, wie *df*, Berührungslinie oder Tangente genannt. Die Fläche *akma*, welche von einer Sehne und dem darüberliegenden Kreisbogen begrenzt ist, heißt Abschnitt oder Segment und das durch 2 Halbmesser (*cb* und *ck*) und dem zwischen ihnen liegenden Bogen (*bnk*) gebildete Stück *cbnk*, Ausschnitt oder Sektor. Ein Winkel, dessen Scheitel in den Mittelpunkt fällt, wie ∢ *ack*, heißt Centriwinkel.

Fig. 28.



Beschreibt man um einen Punkt *a* (Fig. 28) als Mittelpunkt zwei Kreise, so heißen diese concentrische; fallen aber die Mittelpunkte nicht zusammen, wie in Fig. 29, so werden sie excentrische genannt.

Fig. 29.



§. 24.

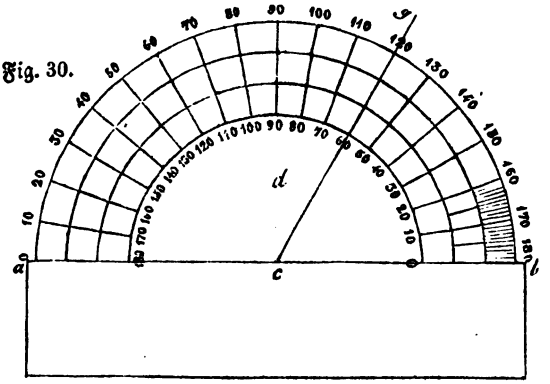
Schon §. 14 Anmerkung 2 wurde bemerkt, daß die Größe eines Winkels nicht von der Länge der Schenkel, sondern von der Weite

Digitized by Google

der Oeffnung, welche diese zwischen sich bilden, abhängig ist. Da nun diese Weite am einfachsten durch einen Bogen gemessen wird, welchen man zwischen den Schenkeln vom Scheitel des Winkels aus beschreibt, indem dieser Bogen bei gleichem Halbmesser genau in demselben Verhältnisse größer wird, als die Weite der Oeffnung zunimmt; so hat man hiernach folgendes Instrument construirt, um die Größe eines gegebenen Winkels zu bestimmen, oder um einen Winkel von gegebener Größe aufzutragen.

Man zeichnet über eine beliebige Linie *a b* (Fig. 30.) 2 con-

Fig. 30.



centrische Halbkreise, theilt jeden derselben in 180 gleiche Theile, Grade genannt, und bezeichnet die Theilpunkte des einen Halbkreises in der Richtung von rechts nach links von 10 zu 10, nach der Reihe mit 0, 10, 20 u. s. w. bis 180 und ebenso die des andern in entgegengesetzter Richtung. *)

Um auch sehr kleine Winkelgrößen bestimmen zu können, theilt man den Grad in 60 Minuten und die Minute in 60 Sekunden.

Anmerkung. Auch hier gebraucht man zur Abkürzung statt der Wörter: Grad, Minute, Sekunde, beziehungsweise die Zeichen °, ′, ″, so daß also z. B. 48° 24′ 32″ heißt: der Winkel habe eine Größe von 48 Graden, 24 Minuten und 32 Sekunden.

§. 25.

Das im vorigen Paragraph beschriebene Instrument heißt Winkelmesser oder Transporteur und wird beim Bestimmen der

*) Wird die Zeichnung auf einem undurchsichtigen Körper ausgeführt, so muß der Raum *a* ausgeschnitten werden.

Digitized by Google

Größe eines Winkels, so auf den zu untersuchenden Winkel gelegt, daß sein Mittelpunkt *c* (Fig. 30) auf den Scheitel fällt und der Durchmesser *ab* an einen der beiden Schenkel zu liegen kommt; die Zahl, nach welcher der andere Winkelschenkel auf dem Transporteur zeigt, wenn man auf der Seite aufsteigend zählt, auf welcher der erstere Schenkel nach 0 zeigt, gibt die Größe des Winkels an. So mißt z. B. in Fig. 30 der Winkel *gcb* nur 60°, der Winkel *gca* dagegen 120°.

Anmerkung. Der rechte Winkel hat immer 90°, ein spitzer ∢ weniger und ein stumpfer ∢ mehr als 90°.

Abschnitt IV.

Von dem Maaßstabe, dem Flächenmaaße und der Construktion der ebenen Figuren.

§. 26. Vom Maaßstabe.

Trägt man ein oder mehrere Male die Längeneinheit (§. 8) mit ihren Unterabtheilungen auf ein Lineal von Holz oder Metall auf, so erhält man einen Maaßstab. Da man diese Einheit aber entweder in ihrer natürlichen Länge oder verjüngt auftragen kann, so haben wir natürliche und verjüngte Maaßstäbe zu unterscheiden. Letztere werden besonders dann angewendet, wenn Längen, welche in der Natur abgemessen wurden, zu Papier gebracht werden sollen.

Solche verjüngte Maaßstäbe kann man sich, je nach der Größe des Raumes, welchen die Zeichnung einnehmen soll, selbst verfertigen, indem man eine Linie von beliebiger Länge als Einheit oder Fuß annimmt und hieraus die Unterabtheilungen bestimmt.

§. 27. Construktion eines Maaßstabes.

Man trage die als Fuß angenommene Länge *ga* (Fig. 31) mehrere Male auf einer geraden Linie auf, theile diese Einheit in 10 gleiche Theile, so stellt ein solcher Theil einen Zoll vor. Errichtet man nun *gm* senkrecht auf *ga* und trägt ein beliebiges Stück *gn*, 10 mal auf, zieht durch die Theilpunkte Parallellinien zu *gc* und verbindet den Endpunkt des 9. Zolles *p* mit *m* und zieht durch die übrigen Theilpunkte der Länge *ga* parallele Linien zu *pm*; so

Digitized by Google

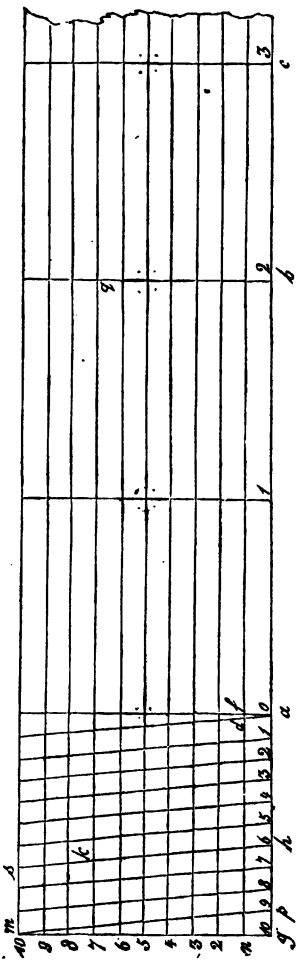


Fig. 31.

bekommt man einen Maaßstab, auf welchem man die gegebenen Längen verjüngt abgreifen kann.

Wäre z. B. eine Länge von 2′ 6″ 7‴ nach demselben aufzuzeichnen, (vorausgesetzt, daß *ga* die Länge eines Fußes ausdrückt), so setze man in dem 7. Theilpunkt der Senkrechten, welche um 2′ von *a* entfernt ist, von *b* aufwärts gerechnet, also in *q* ein, öffne den Zirkel bis zu dem Punkte, in welchem sich die durch den 6. Theilpunkt *h* der Zolle gehende Parallele *hs*, und die horizontale *q* 7 schneiden, also bis *k*, so stellt *qk* eine Länge von 2′ 6″ 7‴ vor.

Anmerkung. Sollte eine Länge in noch mehr verkleinertem Maaße aufgetragen werden, so kann man auch einen Theil, wie *a* 1 als Fuß, also *af* als Zoll betrachtet. Hieraus ist klar, was man, wenn *ya* einem natürlichen Zoll gleich ist, darunter zu verstehen hat, wenn es heißt, ein Gegenstand sei in $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$ u. s. w. der natürlichen Größe gezeichnet.

§. 28. Aufgaben.

1) Traget, nachdem ihr einen Maaßstab, wie er eben angegeben wurde, construirt habet, folgende Maaße darnach auf:
1′ 3″; 2′ 4″; 1′ 8″ 3‴; 2′ 4″ 8‴; 1′ 8″ 2‴; 5″ 8‴; 3′ 4″ 1‴; 12″ 3‴; 2′ 7‴; 3′ 4‴.

2) Einen Winkel von 70° und einen solchen von 135° aufzutragen, und die Schenkel 1′ 7″ 6‴ und 2′ 1″ 4‴ lang zu machen.

Digitized by Google

3) Drei Linien von 8″ 4‴, 1′ 3‴, 1′ 4″ 2‴, auf einer Geraden an einander zu tragen.

§. 29. Vom Flächenmaaße.

Um die Größe der Ausdehnung einer Fläche bestimmen zu können, nimmt man bei uns als Einheit ein Quadrat an, dessen Seite ein Fuß lang ist. Diese Einheit nennt man Quadratfuß, und gebraucht dafür das Zeichen □′. Der Quadratfuß enthält 100 Quadratzolle (□″), der Quadratzoll 100 Quadratlinien (□‴ und die Quadratlinie 100 Quadratpunkte (□^{IV}). Ein Quadrat von 10 Fuß Seite heißt Quadratruthe (□^{0}). Die Quadratruthe enthält 100 Quadratfuße; 100 Quadratruthen geben ein Viertel und 4 Viertel oder 400 Quadratruthen einen Morgen.

§. 30.

Als Einheit für das französische Flächenmaaß dient ein Quadrat, dessen Seite 10 Meter lang ist. Diese Einheit heißt Are und enthält 100 Quadratmeter.

Die Eintheilung dieses Maaßes läßt sich aus folgender Zusammenstellung leicht ersehen.

1	Are	hat	100 Quadratmeter.
10	=	geben	1 Dekare.
100	=	=	1 Hektare.
1000	=	=	1 Kilare.
10000	=	=	1 Myriare.
$\frac{1}{10}$	=	gibt	1 Deciare.
$\frac{1}{100}$	=	=	1 Centiare.
$\frac{1}{1000}$	=	=	1 Milliare.

Die Verwandlung des neubadischen Flächenmaaßes in französisches und umgekehrt, geschieht ähnlich, wie im §. 12 durch einfache Zweisatzrechnung. Es sind nämlich 100 Quadratfuß gleich 9 Quadratmeter.

§. 31. Aufgaben.

1) Wie viele Quadratzolle sind:
a) 8□′; b) 6□′ 5□″; c) 24□^{0} 84□′ 37□″; d) 5□^{0} 48□″; e) 3 Vtl. 27□^{0} 8□′; f) 3 Morg. 1 Vtl. 84□.″

Result.: a) 800□″; b) 605□″; c) 248437□″; d) 50048□″; e) 3270800□″; f) 13000084□″.

Digitized by Google

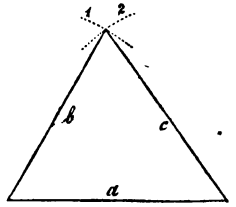
2) Wie viel Morgen, Viertel u. s. w. betragen:
a) 2467 □⁰; b) 3586 □⁰; c) 13007 □⁰.
Result.: a) 6 Mrg. 67 □⁰; b) 8 Mrg. 3 Vtl. 86 □⁰; c) 32 Mrg. 2 Vtl. 7 □⁰.

3) Folgende Maaße als Decimalbrüche anzuschreiben, in welchen die Quadratfuße als Ganze erscheinen:
a) 36 □′ 38 □″; b) 24 □′ 9 □″; c) 2 □⁰ 34 □′ 73 □″; d) 35 □⁰ 64 □″; e) 7 □⁰ 5 □′ 28 □″; f) 26 □⁰ 3 □′ 8 □″; g) 3 Vtl. 38 □⁰ 34 □″; h) 3 Mrg. 2 Vtl. 24 □‴; i) 2 Vtl. 38 □″; k) 6 □″; l) 53 ⊡″ 36 □‴; m) 7 □″ 4 □‴.
Result: a) 36,38 □′; b) 24,09 □′ c) 234,73 □′; d) 3500,64 □′; e) 705,28 □′; f) 2603,08 □′; g) 33800,34 □′; h) 140000,0024 □′; i) 20000,38 □′; k) 0,06 □′; l) 0,5336 □′; m) 0,0704 □′.

4) Wie viele Ruthen, Fuß u. s. w. sind:
a) 3,45 □′; b) 25,246 □⁰; c) 0,2476 □′; d) 3,27 □″; e) 876,45 Mrg.; f) 7,002356 Mrg.
Result.: a) 3 □′ 45 □″; b) 25 □⁰ 24 □′ 60 □″; c) 24 □″ 76 □‴; d) 3 □″ 27 □‴; e) 876 Mrg. 1 Vtl. 80 □⁰; f) 7 Mrg. 94 □′ 24 □″.

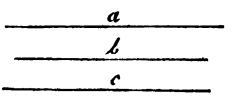
§. 32. Construktion der ebenen Figuren.

1) Mit drei gegebenen Linien *a*, *b*, *c* (Fig. 32) ein Dreieck zu zeichnen.



Auflös. Man beschreibe von den Endpunkten der Linie *a* aus mit *b* und *c* die Bogen 1 und 2 und ziehe die Linien *b* und *c*.

Fig 32.



2) Ueber eine Linie *a*, mit einer andern Linie *b* ein gleichschenkliges Dreieck zu zeichnen.
Auflösung. Man verfahre wie in vorhergehender Aufgabe, nur nehme man statt der Linie *c* nochmals *b* in Zirkel (Fig. 14).

3) Ueber eine gegebene Linie *a* ein gleichseitiges Dreieck zu construiren.

Digitized by Google

Auflöſ. Man beſchreibe die Bogen 1 und 2 in der erſten Aufgabe mit dieſer Linie *a* (Fig. 13).

4) Im Endpunkte *b* der Linie *ab* (Fig 33) eine Senkrechte auf dieſe zu ziehen, ohne die Linie ſelbſt zu verlängern.

Auflöſ. Nehme irgend ein Stück *bc* in Zirkel und beſchreibe von *b* und *c* aus damit die Bogen 1 und 2, mache *df* = *cd*, ſo iſt *fb* die zu beſtimmende Senkrechte.

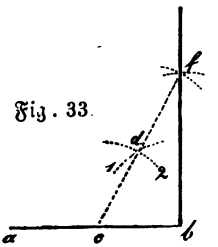


Fig. 33.

5) Die zwei den rechten Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks einſchließenden Seiten *a* und *b* (Fig. 34) ſind gegeben, man ſoll das Dreieck zeichnen.

Auflöſ. Errichte in dem Endpunkte der einen Seite *a* nach Aufgabe 4 die andere *b* ſenkrecht und verbinde ihre beiden andern Endpunkte durch eine gerade Linie *m*.

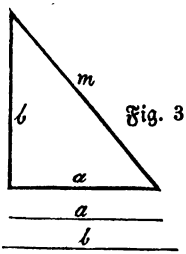


Fig. 34.

6) Von einem Rechtecke ſind die zwei anſtoßenden Seiten *a* und *b* gegeben (Fig. 23), daſſelbe zu konſtruiren.

Auflöſ. Man trage an den Endpunkten von *a* auf derſelben Seite die Linien *b* ſenkrecht auf (Aufgabe 4) und verbinde die Endpunkte dieſer Senkrechten miteinander.

7) Ueber eine gegebene Linie *a* ein Quadrat zu zeichnen (Fig. 22).

Auflöſ. Man mache in vorhergehender Aufgabe *b* ſo groß wie *a*.

8) Einen gegebenen Winkel *a* (Fig. 35) in irgend einem Punkte *p* der Linie *c d* anzutragen.

Auflöſ. Man beſchreibe mit beliebiger, aber gleicher Zirkelöffnung von *a* und *p* aus die Bogen 1 und 2, mache das Bogenſtück *hk* = *fg*, ſo iſt der ∢ *kpd* = dem ∢ *gaf*.

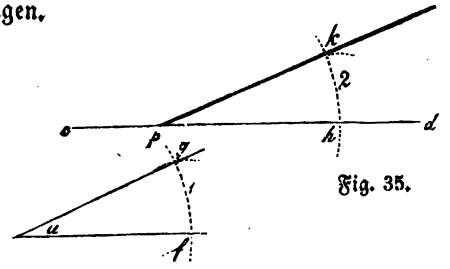


Fig. 35.

Digitized by Google

9) In dem Punkte *p* der Linie *a b* (Fig. 36) eine Senkrechte zu errichten.

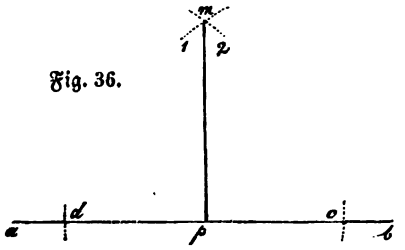


Fig. 36.

Auflöſ. Man ſchlage von *p* aus rechts und links *p c* = *p d* ab, beſchreibe mit beliebiger aber gleicher Zirkelöffnung von *c* und *d* aus die Bogen 1 und 2, ziehe *p m*, ſo ſteht dieſe ſenkrecht auf *a b*.

10) Eine gerade Linie *a b* (Fig. 37) und außerhalb derſelben ein Punkt *p* ſind gegeben, man ſoll von dieſem aus eine Senkrechte auf *a b* fällen.

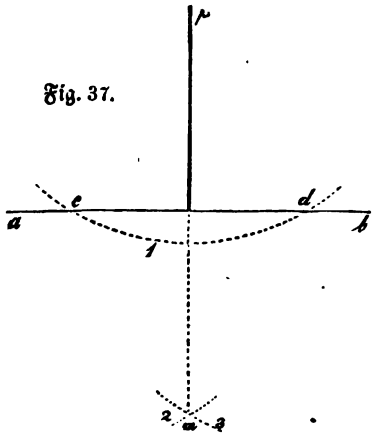
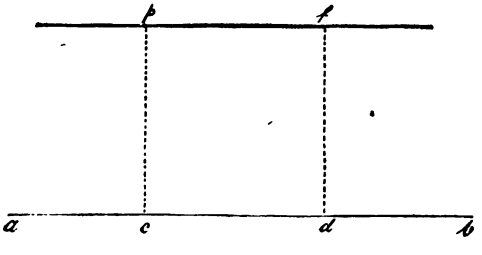


Fig. 37.

Auflöſ. Beſchreibe von *p* aus den Bogen 1, ſo daß er noch *a b* in *c* und *d* ſchneidet, von *c* und *d* aus die Bogen 2 und 3 mit gleicher Zirkelöffnung, ſo iſt *p m* die geſuchte Senkrechte.

11) Eine Linie *a b* (Fig. 38) iſt gegeben, man ſoll durch den Punkt *p* eine Parallele zu ihr ziehen.

Fig. 38.



Erſte Auflöſ. Errichte nach Aufgabe 10 die Linie *p c* ſenkrecht auf *a b*, dann in irgend einem Punkte *d* der Linie *a b* nach Aufgabe 9 eine zweite

Digitized by Google

Senkrechte df, mache $df = pc$, so ist die durch p und f gezogene Linie parallel zu ab.

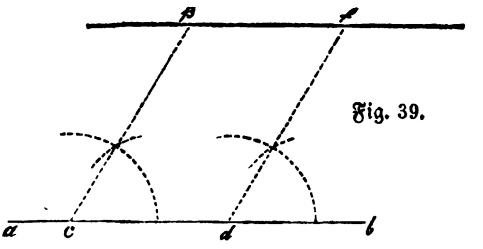


Fig. 39.

Zweite Auflös. Ziehe die schiefe Linie pc (Fig. 39) und trage $\sphericalangle pcb$ nach Aufgabe 8 in einem andern Punkte $d = \sphericalangle fdb$ an, mache $fd = pc$, so ist pf die Parallele.

Anmerkung. Die Aufgaben 4, 9, 10 und 11 können auch auf einfache Weise mittelst zweier Lineale, wovon das eine die Form eines rechtwinkligen Dreiecks haben muß, mechanisch gelöst werden.

Um hiermit die Aufgaben 4, 9 und 10 zu construiren, lege man eine der beiden am rechten Winkel liegenden Seiten des rechtwinkligen Dreiecks an Linie ab an und rücke die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite, so lange längs des zweiten Lineals hin, bis die dritte Seite des Dreiecks durch den gegebenen Punkt geht, so ist die Linie, welche man an ihr hinzieht, die verlangte Senkrechte.

Um mittelst dieser Vorrichtung die Aufgabe 11 zu lösen, lege man irgend eine Seite des Dreiecks an ab und schiebe es mit einer der beiden andern Seiten an dem zweiten Lineal so lange hin, bis die an ab gelegene Seite durch den Punkt p geht, so ist die an dieser Seite hingezogene Linie, die Parallele zu ab.

12) Eine Raute zu zeichnen, von welcher die Seite und ein an ihr liegender Winkel gegeben sind.

Auflös. Man trage vom Scheitel des Winkels aus die Seite auf den Schenkeln ab und ziehe durch die Endpunkte parallele Linien zu den gegenüberliegenden Schenkeln. (Fig. 24.)

13) Die zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel einer Rhomboide sind bekannt, diese zu construiren.

Auflös. Man trage vom Scheitel des Winkels aus auf dem einen Schenkel die eine Seite und auf dem andern Schenkel die zweite Seite ab, und ziehe durch die Endpunkte Parallele zu den gegenüberliegenden Schenkeln. (Fig. 25).

14) Ein Paralleltrapez zu zeichnen.

Auflös. Ziehe ab und cd (Fig. 20) mit einander parallel, dann ad und bc nach beliebigen Richtungen.

15) Ein Trapez zu zeichnen.

Digitized by Google

Auflöſ. Man zeichne ein Viereck (Fig. 21), in welchem keine Seite mit einer andern parallel iſt.

Anmerkung. Weitere Conſtruktionen ſiehe im Anhange I.

Abſchnitt V.

Berechnung der ebenen Flächen.

§. 33. Erklärung.

Unter dem Flächeninhalte einer Figur verſteht man die Größe des Raumes, welchen dieſelbe einnimmt. Dieſen Inhalt erhält man durch die Unterſuchung, wie oft die als Flächeneinheit (§. 29) angenommene Größe in der auszumeſſenden Fläche enthalten iſt.

Bei den Parallelogrammen und Dreiecken nimmt man immer eine Seite als Grundlinie an, und nennt alsdann die ſenkrechte Linie, welche man von der ihr gegenüberliegenden Ecke aus, auf die Grundlinie oder deren Verlängerung zieht, die Höhe. So iſt z. B. in dem Parallelogramm *abcd* (Fig. 40) *df* die Höhe, wenn *ab* als Grundlinie, dagegen *bg* die Höhe, wenn *ad* als Grundlinie angeſehen wird. Ebenſo iſt im Dreieck *abc* (Fig. 41) *cd* die zur Grundlinie *ab* gehörige Höhe. Wird aber in dem ſtumpfwinkligen Dreieck *abc* (Fig. 42) *ab* als Grundlinie angenommen, ſo muß man, da von *c* aus keine Senkrechte auf *ab* ſelbſt möglich iſt, die Höhe *cd* auf die Verlängerung von *ab* ſenkrecht ziehen.

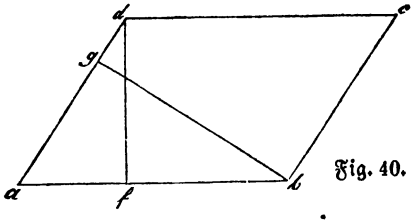


Fig. 40.

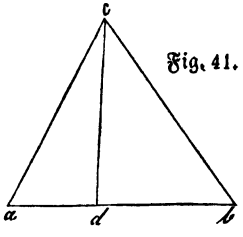


Fig. 41.

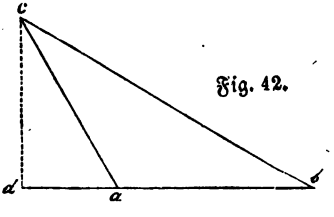


Fig. 42.

Digitized by Google

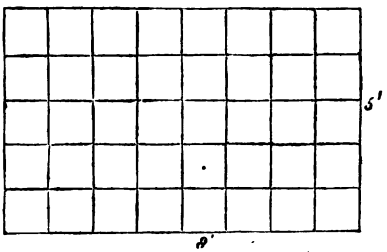
Aufgabe. Zeichnet eine Reihe von Parallelogrammen und Dreiecken, nehmet verschiedene Seiten als Grundlinien an und bestimmt die zugehörigen Höhen.

§. 34. Berechnung des Rechtecks.

a) Der Flächeninhalt eines Rechtecks wird gefunden, wenn man die Länge der Grundlinie mit der Länge der Höhe multiplicirt.

Würde z. B. die Länge der Grundlinie = 8′ und die Höhe = 5′ gemessen, so beträgt der Flächeninhalt $8 \times 5 = 40$ □′. Der Grund dieses Verfahrens ist leicht aus Fig. 43 zu ersehen; denn auf der Grundlinie können so viele Quadratschuhe neben einander stehen, als diese Fuße lang ist, und diese Reihe von 8 Quadratschuhen kann so oft über einander verzeichnet werden, als die Höhe Fuße beträgt; man hat also fünf Reihen von 8 □′, also im Ganzen 5×8 oder 40 □′.

Fig. 43.



b) Soll aus dem Inhalte und einer Seite die andere Seite berechnet werden, so dividire man mit der gegebenen Seite in den Inhalt.

§. 35. Beispiele.

1) Wie groß ist der Inhalt eines Rechtecks, dessen Grundlinie = 5° 8′ 3″ und dessen Höhe = 2° 4″?

Auflösung. Inhalt = 58,3′ × 20,4′

2332

11660

1189,32 □′ oder

Inhalt = 11 □° 89 □′ 32 □″.

2) Ein Boden, welcher die Form eines Rechteckes hat und 2° 3′ 2″ lang und 1° 2′ 8″ breit ist, soll mit rechteckigen Platten belegt werden, von welchen jede 3′ 3″ lang und 2′ breit ist; wie viele solcher Platten sind erforderlich?

Digitized by Google

Auflösung. Man rechne den Inhalt des Bodens und dividire diesen durch den Inhalt einer Platte.
Inhalt des Bodens = 23,2′ × 12,8′ = 296,96□′
„ einer Platte = 3,3′ × 2′ = 6,6□′,
folglich Anzahl der Platten = 296,96 : 6,6 = 45 Stück.

3) Ein Saal von 48′ Länge 26′ Breite soll mit Dielen belegt werden, der Quadratschuh kostet 6 kr.; wie hoch kommt die Belegung zu stehen?

Auflös. Rechnet den Inhalt des Bodens und multiplicirt diesen mit dem Preise eines Quadratschuhs.
Inhalt des Bodens = 48′ × 26′ = 1248□′,
diese kosten 1248 × 6 kr. = 124 fl. 48 kr.

4) Ein rechteckiger Garten hat einen Inhalt von 3 Mtl. 7□° 51□′ 28□″ und ist 21° 6′ 8″ lang; wie breit ist derselbe?

Auflös. Nach §. 34, b) erhält man:
Breite = 30751,28□′ : 246,8′ = 307512,8 : 2468 = 124,6′ oder 12° 4′ 6″.

5) Der Inhalt eines rechteckigen Bodens beträgt 7□° 16□′ 4□″, seine Breite 3° 6″; wie lang ist derselbe?

Auflös. Nach §. 34, b, wird die
Länge = 716,04 : 30,6 = 7160,4 : 306 = 23,4′ oder 2° 3′ 4″.

6) Ein rechteckiger Platz von 42′ 3″ Länge und 32′ 7″ Breite soll gepflästert werden; wie theuer kommt die Pflästerung, wenn der Quadratfuß 5 kr. kostet?

Auflös. Man multiplicirt den in Quadratfußen ausgedrückten Inhalt des Platzes mit dem Preise eines Quadratschuhes.
Der Inhalt des Platzes ist = 42,3 × 32,7 = 1383□′ 21□″, daher der Kostenbetrag = 1383,21 × 5 kr. = 115 fl. 15 kr.

§. 36. Berechnung des Quadrats.

a) Da ein Quadrat als ein Rechteck angesehen werden kann, bei welchem die Länge gleich der Breite ist, so folgt hieraus, daß der Flächeninhalt gefunden wird, wenn man eine Seite mit sich selbst multiplicirt.

Digitized by Google

Beträgt z. B. die Seite eines Quadrats 16 Fuß, so ist also der Inhalt $= 16 \times 16 = 256 \square'$.

b) Ist der Inhalt eines Quadrats gegeben und die Seite soll gefunden werden, so hat man nach a) eine Zahl zu suchen, welche mit sich multiplicirt den bekannten Inhalt gibt.

Zur Auffindung einer solchen Zahl ist aber ein besonderes Rechnungsverfahren nöthig, welches unter dem Namen des Quadratwurzelausziehens bekannt ist. Dieses Verfahren zu erklären, soll zunächst der Inhalt der folgenden Paragraphen sein.

§. 37. Vom Ausziehen der Quadratwurzel.

Multiplicirt man eine Zahl mit sich, so heißt das erhaltene Produkt die Quadratzahl oder auch das Quadrat der ersteren. So ist z. B. 64 (8×8) die Quadratzahl oder das Quadrat von 8, folglich muß umgekehrt (§. 36, b) die Quadratwurzel aus $64 = 8$ sein. Man deutet das Geschäft des Quadratwurzelausziehens durch das Zeichen $\surd$ an, welches man vor die gegebene Zahl setzt. Obige Aufgabe würde also ausgedrückt durch $\surd 64 = 8$.

Anmerkung. Die Quadratzahlen aller einziffrigen Zahlen sind dem Gedächtnisse wohl einzuprägen, weßhalb sie nach der Reihe hier aufgeführt sind:

Die	Quadratzahl	von	1	ist	1.
"	"	"	2	"	4.
"	"	"	3	"	9.
"	"	"	4	"	16.
"	"	"	5	"	25.
"	"	"	6	"	36.
"	"	"	7	"	49.
"	"	"	8	"	64.
"	"	"	9	"	81.

§. 38.

Um die Quadratwurzel aus einer größeren Zahl z. B. aus 7056 zu ziehen, verfährt man auf folgende Weise:

Digitized by Google

Man theilt die gegebene Zahl von der Rechten gegen die Linke in zweistellige Klassen und sucht nun in obiger Tabelle die der ersten Klasse (70) zunächst kleinere Quadratzahl 64. Die Quadratwurzel hieraus (8) schreibt man nach dem Gleichheitszeichen, zieht 64 von 70 ab und hängt dem Reste 6 die nächste Klasse 56 an. Hierauf nimmt man die zuerst gefundene Zahl 8 doppelt und dividirt mit dem Produkte 16 in die zuletzt erhaltene Zahl, ohne die letzte Ziffer, also in 65, so erhält man 4 als zweite Ziffer der zu suchenden Zahl. Diese 4 hängt man sowohl dem schon gefundenen 8, als auch dem doppelten Produkte 16 an und multiplizirt damit die Zahl 164. Das Produkt aus 4×164 zieht man von 656 ab und man erhält also, da die Subtraktion aufgeht, die Quadratwurzel aus $7056 = 84$.

$$\sqrt{70|56|} = 84$$
$$8.8 = 64$$
$$\overline{65|6 : 164}$$
$$4.164 = 656$$
$$\overline{\quad\quad}$$

Probe. Es ist wieder $84 \times 84 = 7056$.

Ist die Quadratzahl mehr als vierziffrig, so hänge man an den Rest, welcher nach der zweiten Subtraktion bleibt, abermals eine Klasse an, und dividire durch das doppelte Produkt der nach dem Gleichheitszeichen stehenden zweiziffrigen Zahl, indem man wieder die letzte Ziffer im Dividenden sich wegdenkt u. s. w.

z. B. $\sqrt{12|53|16|} = 354$
$(3 \times 3 =) \; 9$
$\overline{35|3 : 65}$
$(65 \times 5 =) \; 325$
$\overline{281|6 : 704}$
$(704 \times 4 =) \; 2816$
$\overline{\quad\quad\quad}$

§. 39.

Geht die Subtraktion zuletzt nicht auf, so heißt die Zahl eine unvollständige Quadratzahl. Um in diesem Falle die Wurzel noch weiter auszuziehen, verfahre man genau wie oben angegeben wurde, nur hänge man statt der nächsten zweistelligen Classe, zwei Nullen an den Rest an und trenne die weiter gefundenen Ziffern

Digitized by Google

im Resultat von den vorhergehenden durch ein Comma, so daß dasselbe also als Decimalbruch erscheint;

z. B. $\sqrt{41|43|} = 64{,}36\ldots\ldots$

$(6.6 =)\ 36$

$54|3 : 124$

$(4.124 =)\ 496$

$470|0 : 1283$

$(3.1283 =)\ 3849$

$8510|0 : 12866$

$(6.12866 =)\ 77196$

7904 u. s. w.

§. 40.

Soll die Quadratwurzel aus einem Decimalbruche gezogen werden, so theile man denselben vom Comma aus nach rechts und links in zweistellige Classen. Bleibt rechts noch eine Ziffer stehen, so hänge man dieser eine Null an. Im Uebrigen verfahre man nach §. 38 mit Rücksicht auf die Ganzen; z. B.

a) $\sqrt{6|83,|57|20} = 26{,}145\ldots$

4

283 : 46

276

757 : 521

521

23620 : 5224

20896

272400 : 52285

26142

10975 u. s. w.

b) $\sqrt{0,|03|25|} = 0{,}18027\ldots$

1

225 : 28

224

100 : 36

10000 : 3602

7204

279600 : 36047

252329

27271 u. s. w.

§. 41.

Soll aus einem gewöhnlichen Bruche die Quadratwurzel gezogen werden, so ziehe man dieselbe entweder aus dem Zähler und dem Nenner besonders und führe hierauf die Division aus, um das Resultat zu erhalten; oder man verwandle den gegebenen Bruch in einen De-

Digitized by Google

cimalbruch und ziehe hieraus nach §. 40 die Wurzel. So erhält man z. B. nach ersterer Art für:

$$\sqrt{\frac{5}{8}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}} = \frac{2{,}23606}{2{,}82842} = 0{,}79056.....$$

und nach letzterer:

$$\sqrt{\frac{5}{8}} = \sqrt{0{,}|62|50|} = 0{,}79056.....$$

49

1350 : 149

1341

900 : 158

90000 : 15805

79025

1097500 : 158106

948636

148864 u. s. w.

In den meisten Fällen ist die letztere Methode die kürzere.

Ist die Quadratwurzel aus einer gemischten Zahl zu ziehen, so wendet man am einfachsten die letzte der eben angegebenen zwei Methoden an. So ist z. B.

$$\sqrt{3\tfrac{7}{8}} = \sqrt{3{,}|87|50|} = 1{,}968.....$$

1

287 : 29

261

2650 : 386

2316

33400 : 3928

31424

1976

§. 42. Aufgaben.

1) a) $\sqrt{144}$; b) $\sqrt{361}$; c) $\sqrt{1156}$; d) $\sqrt{4225}$; e) $\sqrt{6561}$; f) $\sqrt{18496}$; g) $\sqrt{43264}$: h) $\sqrt{156025}$ i) $\sqrt{250000}$; k) 627264; l) $\sqrt{1522756}$; m) $\sqrt{9431041}$; n) $\sqrt{4024036}$; o) $\sqrt{10137856}$; p) $\sqrt{454670329}$; q) $\sqrt{937645641}$.

Resultate: a) 12; b) 19; c) 34; d) 65; e) 81; f) 136; g) 208; h) 395; i) 500; k) 792; l) 1234; m) 3071; n) 2006; o) 3184; p) 21323; q) 30621.

Digitized by Google

2) a) $\sqrt{655,36}$; b) $\sqrt{11,6964}$; c) $\sqrt{0,893025}$; d) $\sqrt{3,1415}$; e) $\sqrt{0,003}$; f) $\sqrt{864,342}$; g) $\sqrt{0,0364}$; h) $\sqrt{3,00462}$.
Resultate: a) 25,6; b) 3,42; c) 0,945; d) 1,77242; e) 0,054772; f) 29,3997; g) 0,19078; h) 1,73338.

3) a) $\sqrt{\frac{4}{9}}$; b) $\sqrt{1\frac{2}{4}\frac{1}{4}}$; c) $\sqrt{\frac{3}{4}}$; d) $\sqrt{\frac{9}{3\,2}}$; e) $\sqrt{\frac{5}{6}}$ f) $\sqrt{4\frac{1}{3}}$; g) $\sqrt{5_{11}^{7}}$; h) $\sqrt{23_{13}^{7}}$.
Resultate: a) $\frac{2}{3} = 0,6666\ldots$; b) $\frac{1}{1\,2} = 0,91666\ldots$; c) 0,86602; d) 0,53033; e) 0,79057; f) 2,1602; g) 2,3741; h) 4,8516...

§. 43. Beispiele über die Berechnung des Quadrats.

1) Es kauft Jemand einen Garten, welcher die Form eines Quadrats hat und dessen Seite $12^0\,6'$ lang ist. Er bezahlt für jede Quadratruthe 2 fl. 24 kr.; wie theuer ist der Garten?
Auflös. Nach §. 36. a. ist der Inhalt des Gartens $= 126' \times 126' = 15876\,\square'$ oder $158\,\square^0\,76\,\square'$. Kostet nun $1\,\square^0 = 2\frac{2}{3}$ fl., so kosten $158\,\square^0\,76\,\square' = 158,76 \times 2\frac{2}{3}$ fl. oder 381.
Wollte man alles in Quadratfußen ausdrücken, so erhielte man:
$100\,\square'$ kosten $2\frac{2}{3}$ fl.
$15876\,\square'$ = ?
$$\frac{12 \times 15876}{100 \times 5} = \frac{190512}{500} = 381 \text{ fl. wie oben.}$$

2) Ein rechteckiger Boden, welcher 38′ lang und 12′ breit ist, soll mit Platten belegt werden, welche $\frac{3}{4}'$ lang und breit sind; wie viel solcher Platten sind zur Belegung nöthig und wie theuer kommen dieselben, wenn das Stück mit 10 kr. bezahlt wird?
Auflös. Man dividire mit dem Inhalt einer Platte in den Inhalt des Bodens.
Der Inhalt des Bodens ist nach §. 34. a. $= 38 \times 12 = 456\,\square'$.
Der Inhalt einer Platte ist nach §. 36. a. $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = 0,75 \times 0,75 = 0,5625\,\square'$.
Demnach die Anzahl der Platten $= 456 : 0,5625 = 4560000 : 5625 = 810$ Stück. Diese kosten also:
810×10 kr. $= 135$ fl.

3) Ein Zimmer von der Form eines Quadrats mit 20′ 8″ langer Seite soll mit Brettern belegt werden, von welchen jedes

Digitized by Google

9′ 4″ lang und 1′ 5″ breit ist; wie viel Bretter sind zur Belegung erforderlich und was kosten dieselben, den Quadratfuß zu 5½ Kreuzer gerechnet?

Auflös. Man findet

den Inhalt des Zimmers = 20,8′ × 20,8′ = 432□′ 64□″

den Inhalt eines Brettes = 9,4′ × 1,5′ = 14□′ 10□″.

folglich beträgt die Anzahl der Bretter = 432,64 : 14,1 = 4326,4 : 141 = 30,6 Stück.

Diese kosten, da 432,64 □′ belegt werden müssen:

432,64 × 5½ kr. = 2379 kr. oder 39 fl. 39 kr.

4) Ein Acker von quadratischer Form hat einen Flächeninhalt von 7 Morgen 1 Viertel 70□° 25 □′; wie groß ist eine Seite desselben und wie viele Bäume sind zur Besetzung des Umfanges erforderlich, wenn dieselben 15 Fuß von einander entfernt zu stehen kommen?

Auflös. 7 Mrg. 1 Vtl. 70□° 25□′ geben nach §. 29 297025□′, folglich ist eine Seite des Feldes (nach §. 36, b) = $\sqrt{297025}$ = 545′; demnach der Umfang = 4 × 545′ = 2180′ und die Anzahl der erforderlichen Bäume = 2180 : 15 = 145 Stück.

§. 44. Berechnung der Raute und Rhomboide.

Hat ein Rechteck mit einer Raute oder Rhomboide gleiche Grundlinie und gleiche Höhe (§. 33), so ist auch der Inhalt des Rechtecks derselbe, wie der eines jeden der beiden andern Parallelogramme. Dieser Satz läßt sich leicht auf folgende Art nachweisen;

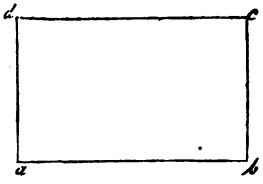


Fig. 44.

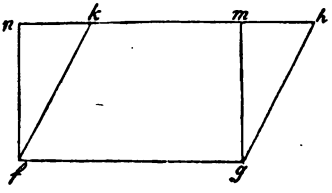


Fig. 45.

Es sei *abcd* das Rechteck (Fig. 44), welches mit der Rhomboide *fghk* (Fig. 45) gleiche Grundlinie (*ab* und *fg*) und gleiche Höhe (*ad* und *mg*) hat. Denkt man sich nun *abcd* so auf *fghk* gelegt, daß die Grundlinie *ab* genau auf *fg* fällt, so wird das Rechteck *abcd* nach *fgmn* zu liegen kommen.

Digitized by Google

Nun ist das Dreieck *fkn*, welches über die Rhomboide hinausfällt, aber im Rechteck liegt, ebenso groß, wie das Dreieck *gmk*, das über das Rechteck fällt, aber in der Rhomboide liegt.

Dasselbe Stück, welches also durch Auflegen des Rechtecks, von der Rhomboide auf der rechten Seite wegfällt, wird auf der linken wieder zugesetzt und somit ist das Rechteck dem Inhalte nach ebenso groß, wie die Rhomboide.

Auf gleiche Weise läßt sich das Ausgesprochene für die Raute nachweisen.

a) Um also den Inhalt der Rhomboide, sowie den der Raute zu finden, multiplicire man die Länge der Grundlinie mit der Länge der Höhe, wie beim Rechteck.

b) Für die Bestimmung der Grundlinie oder der Höhe aus dem Inhalte gilt das in §. 34. b. Gesagte.

§. 45. Beispiele.

1) Wie groß ist der Inhalt einer Raute, deren Grundlinie $4^0\ 6'\ 5''$ und deren Höhe $= 3^0\ 2''$ gemessen wurde?
Auflös. Inhalt $= 46{,}5 \times 30{,}2 = 1404{,}30\ \square'$ oder $14\ \square^0\ 4\ \square'\ 30\ \square''$.

2) Von einem Felde, welches die Form einer Rhomboide hat, wurde eine Seite $= 36^0\ 8''$ und die zugehörige Höhe $= 18^0\ 5'\ 6''$ gemessen; wie groß ist sein Flächeninhalt und was kostet das Feld, wenn die Quadratruthe zu 2 fl. 36 kr. berechnet wird?
Auflös. Inhalt $= 360{,}8 \times 135{,}6 = 66964{,}48\ \square'$, oder 1 Mrg. 2 Vtl. $69\ \square^0\ 64\ \square'\ 48\ \square''$; demnach kostet das Feld, da $66964{,}48\ \square' = 669{,}6448\ \square^0$ sind
$669{,}6448 \times 2\frac{1}{2}$ fl. $= 1741{,}07$ fl. oder 1741 fl. 4 kr.

3) Der Inhalt einer Raute beträgt $5542{,}3\ \square'$, eine Seite derselben ist $94{,}2'$ lang, wie groß ist die zugehörige Höhe?
Auflös. Höhe $= 55423 : 942 = 58{,}8'$ oder $5^0\ 8'\ 8''$.

4) Man kennt den Inhalt einer Rhomboide $= 316\ \square'\ 75\ \square''$ und die Höhe $= 12'\ 5''$; wie groß ist die zugehörige Seite?
Auflös. Seite $= 316{,}75 : 12{,}5$ oder $3167{,}5 : 125 = 25{,}35' = 2^0\ 5'\ 3''\ 5'''$.

Digitized by Google

§. 46. Berechnung des Dreiecks.

Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist immer halb so groß, wie der eines Parallelogramms, das mit ihm gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat, wie leicht aus Folgendem zu ersehen ist.

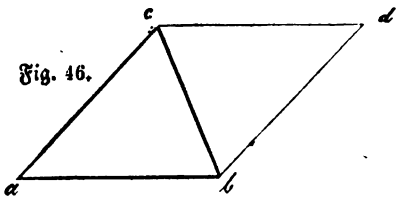


Fig. 46.

Es sei *abc* (Fig. 46) das Dreieck. Zieht man *bd* parallel mit *ac* und *cd* parallel mit *ab*, so entsteht ein Parallelogramm *abdc*, in welchem das Dreieck *abc* eben so groß ist, wie das Dreieck *bcd*; also beträgt ein solches Dreieck nur die Hälfte des Parallelogramms *abdc*.

Hieraus ergeben sich folgende Sätze:

a) Der Inhalt eines Dreiecks wird gefunden, wenn man die Grundlinie mit der zugehörigen Höhe (§. 33) multiplicirt und das Produkt durch 2 dividirt.

b) Die Grundlinie eines Dreiecks aus dem Inhalt und der Höhe wird erhalten, wenn man den doppelten Inhalt durch die Höhe dividirt.

c) Die Höhe aus Inhalt und Grundlinie findet man durch Division der Grundlinie in den doppelten Inhalt.

§. 47. Beispiele.

1) Wie groß ist der Inhalt eines Dreiecks, dessen Grundlinie = 8′ 4″ und dessen Höhe = 10′ 5″ gemessen wurde.

Auflös. Nach §. 46. a. folgt:

$$\text{Inhalt} = \frac{8{,}4' \times 10{,}5'}{2} = \frac{88{,}2\,\square'}{2} = 44{,}1\,\square'.$$

2) Der Inhalt eines Dreiecks beträgt 125 □′ 36□″, seine Höhe 18′ 4″; wie groß ist die zugehörige Grundlinie?

Auflös. Man erhält nach §. 46. b. die

$$\text{Grundlinie} = \frac{2 \times 125{,}36'}{18{,}4'} = \frac{250{,}72'}{18{,}4'} = 13{,}626'.$$

3) Ein Dreieck hat einen Inhalt von 47 □″ 36 □‴, eine Seite desselben ist 6″ 4‴ lang; wie groß ist die zugehörige Höhe?

Digitized by Google

Auflöſ. Nach §. 46. c. iſt die

$$\text{Höhe} = \frac{2.0{,}4736'}{0{,}64'} = \frac{0{,}9472'}{064'} = 1'\,4''\,8'''.$$

4) Ein Feld, welches die Form eines Dreiecks hat, ſoll mit Hafer beſäet werden. Man kennt eine Seite des Feldes $= 14°\,6'$ und die zugehörige Senkrechte von der gegenüberliegenden Ecke aus $= 20°\,5'$. Wenn nun auf je 70 Quadratruthen ein Seſter Ausſaat verwendet wird; wie viel Seſter ſind zur Beſäeung des ganzen Feldes nöthig?

Auflöſ. Rechnet den Inhalt des Feldes nach Quadratruthen und dividiret dieſen durch 70.

$$\text{Inhalt des Feldes} = \frac{146 \times 205}{2} = 14965\,\square' \text{ oder } 149{,}65\square°,$$

folglich braucht man $149{,}65 : 70 = 2{,}13$ Seſter $=$ 2 Seſter $\frac{13}{100}$ Meßlein.

§. 48. Beſtimmung der Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks.

(Pythagoräiſcher Lehrſatz.)

Zeichnet man über jede der drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks *abc* (Fig. 47) ein Quadrat, ſo iſt immer der Inhalt des Quadrats über der größten Seite (*cbdf*) ſo groß, als die Inhalte der Quadrate über den beiden andern Seiten (*abgh* und *aclk*) zuſammengenommen.

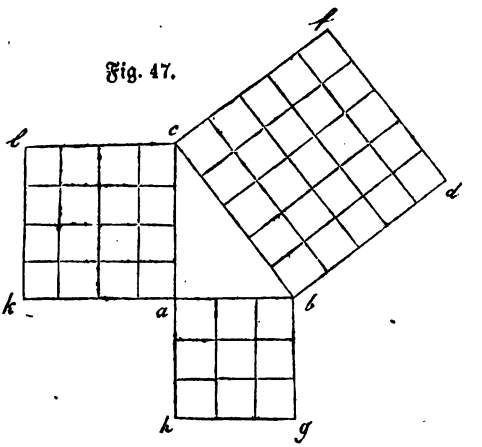


Fig. 47.

Die größte Seite (*bc*) des rechtwinkligen Dreiecks heißt die Hypotenuſe und die beiden andern Seiten (*ab* und *ac*) werden Catheten genannt. Obiger Satz läßt ſich daher auch auf folgende Weiſe ausdrücken:

Digitized by Google

Das Quadrat über der Hypotenuse ist so groß, als die Summe der Quadrate über den beiden Catheten; oder

Quadrat $cbdf$ = Quadrat $abgh$ + Quadrat $aclk$.

Anmerkung. Dieser in der Geometrie äußerst wichtige Satz, wird nach seinem Erfinder Pythagoras, der pythagoräische Lehrsatz genannt. Die Richtigkeit dieses Satzes läßt sich auf folgende Art nachweisen. Zeichnet man einen rechten Winkel cab (Fig. 47) und trägt auf den einen Schenkel 3 gleiche Theile und auf den andern 4 solcher Theile und verbindet die beiden Endpunkte durch die Linie bc, so findet man, daß diese Verbindungslinie (Hypotenuse) genau 5 solcher Theile lang wird. Es enthält also wirklich, wie die Figur zeigt, das Quadrat über bc so viele Quadrateinheiten, als die beiden Quadrate über ab und ac zusammen; denn $16 + 9 = 25$.

§. 49.

Aus vorhergehendem Paragraphen ergibt sich ein einfaches Verfahren in jedem rechtwinkligen Dreieck eine Seite zu berechnen, wenn die beiden andern bekannt sind.

Sind z. B. die beiden Catheten ab und ac (Fig. 47) $= 15'$ und $20'$ gegeben und es soll die Hypotenuse bc bestimmt werden, so muß der Inhalt des Quadrats über bc gleich sein
$15 \times 15 + 20 \times 20$ (§. 36. a) oder $= 225 + 400 = 625 \square'$, folglich nach §. 36. b. die Seite $bc = \sqrt{625} = 25$.

Aus dem Gesagten folgt zugleich, daß das Quadrat über einer Cathete gleich sein muß dem Quadrate über der Hypotenuse weniger dem Quadrate über der andern Cathete.

So ist z. B. wenn bc (Fig. 47) $= 30'$ und $ab = 18'$ gegeben sind, das Quadrat über $ac = 30 \times 30 - 18 \times 18$ oder $= 900 - 324 = 576 \square'$ also die Cathete $ac = \sqrt{576} = 24'$.

Anmerkung. Oft genügt es auch, wenn man die zu findende Seite des rechtwinkligen Dreiecks auf die Weise bestimmt, daß man nach §. 32. 5. oder nach Anhang I. b. 14. das Dreieck in verjüngtem Maaße aufträgt und dann diese Seite rückwärts auf dem Maaßstabe abmißt.

§. 50.

Mittelst Hilfe der Mathematik läßt sich auch umgekehrt nachweisen, daß jedes Dreieck, bei welchem das Quadrat über einer Seite so groß ist, als die Summe der Quadrate über den beiden andern Seiten, ein rechtwinkliges sein muß.

Digitized by Google

Dieses findet aber immer statt, wenn die drei Seiten eines Dreiecks in dem Verhältnisse von 3 zu 4 zu 5 stehen. Um daher andere Zahlen zu finden, welche als Seiten eines Dreiecks angenommen, ein rechtwinkliges geben, darf man nur die drei Zahlen 3, 4 und 5 mit jeder beliebigen ganzen oder gebrochenen Zahl zugleich multipliciren. So erhält man z. B. durch Multiplication mit 2 die Zahlen 6, 8 und 10, mit 3 die Zahlen 9, 12 und 15, und es ist auch wirklich $9 \times 9 + 12 \times 12 = 81 + 144 = 225$, ebenso $15 \times 15 = 225$.

Hieraus ergibt sich folgende einfache, im Praktischen häufig anzuwendende Construktion eines rechtwinkligen Dreiecks.

Man nehme irgend eine Länge als Einheit an, und beschreibe mit der 3-, 4- und 5-, oder 6-, 8- und 10-, oder 9-, 12- und 15-fachen Länge ein Dreieck (§. 32. 1); so wird dieses immer ein rechtwinkliges sein.

Man kann ferner mittelst dieses Satzes prüfen, ob ein Winkel z. B. eines Zimmerbodens ein rechter ist. Man messe nämlich von der Ecke aus an der einen Wand auf dem Boden 6 Fuß, an der andern 8 Fuß ab und untersuche alsdann die Länge der Verbindungslinie der Endpunkte dieser abgemessenen Stücke. Wird diese = 10 Fuß gefunden, so ist der Winkel ein rechter, beträgt sie aber weniger oder mehr, so ist er ein spitzer oder stumpfer.

§. 51. Beispiele.

1) Die beiden Catheten eines rechtwinkligen Dreiecks sind $3^0\ 8'\ 4''$ und $5^0\ 6''$ lang; wie groß ist die Hypotenuse?

Auflös. Nach §. 48 ist das Quadrat über der Hypotenuse $= 38{,}4 \times 38{,}4 + 50{,}6 \times 50{,}6 =$
$1474{,}56\,\square' + 2560{,}36\,\square' = 4034{,}92\,\square'$,
folglich die Hypotenuse $= \sqrt{4034{,}92} = 63{,}5'$ oder $6^0\,3'\,5''$.

2) Von einem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse $= 3''\ 2'''$ und eine Cathete $= 2''\ 4'''$ gegeben; wie groß ist die andere Cathete?

Auflös. Nach §. 49 ist das Quadrat über der Cathete $=$
$0{,}32 \times 0{,}32 - 0{,}24 \times 0{,}24 = 0{,}1024 - 0{,}0576$
$= 0{,}0448\,\square'$; also die Cathete $= \sqrt{0{,}0448} = 0{,}211'$
oder $2''\ 1'''\ 1^{IV}$.

Digitized by Google

3) Eine Leiter von 24′ Länge ist schief gegen eine Wand gestellt, so daß die senkrechte Entfernung ihres Endes auf dem Boden von der Wand 8′ beträgt, in welcher Höhe liegt die Leiter an der Wand an?

Auflös. Die Leiter, die Entfernung des einen Endes vom Boden und die des andern Endes von der Wand bilden ein rechtwinkliges Dreieck, worin die fragliche Höhe als Cathete erscheint. Man erhält daher: Quadr. über der Höhe $= 24 \times 24 - 8 \times 8 = 576 - 64 = 512$, folglich die Höhe $= \sqrt{512} = 22{,}6'$ oder 22′ 6″.

4) Wie groß ist der Inhalt des rechtwinkligen Dreiecks abc (Fig. 47), wenn die Hypotenuse $bc = 4''\ 2'''$ und die Cathete $ab = 3''\ 3'''$ Länge haben?

Auflös. Man bestimme zuerst die Cathete ac und rechne dann nach §. 46. a. den Inhalt.

Für das Quadrat über ac hat man $0{,}42 \times 0{,}42 - 0{,}33 \times 0{,}33 = 0{,}1764 - 0{,}1089 = 0{,}0675\,\square'$, folglich wird $ac = \sqrt{0{,}0675} = 0{,}259'$ oder $2''\ 5'''\ 9^{IV}$. Demnach ist der Inhalt des Dreiecks

$$= \frac{0{,}33 \times 0{,}259}{2} = 0{,}042735\,\square' \text{ oder}$$

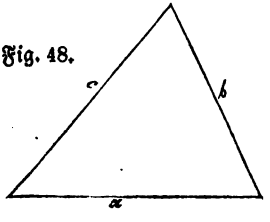
$$4\,\square''\ 27\,\square'''\ 35\,\square^{IV}.$$

§. 52. Berechnung des Inhalts eines Dreiecks aus den drei Seiten.

Sehr häufig kommt es vor, daß man am bequemsten die drei Seiten eines Dreiecks mißt und aus diesen den Inhalt bestimmt, wie z. B. bei Vermessung von Feldern, Bauplätzen u. dgl.

Für diesen Fall hat man mittelst Hilfe der Buchstabenrechnung eine Formel abgeleitet, nach welcher sich die Aufgabe auf einfache Weise lösen läßt.

Fig. 48.



Bezeichnen nämlich a, b und c (Fig. 48) die Längen der drei Seiten eines Dreiecks und drückt S die Summe dieser drei Seiten, also $a + b + c$ aus, so hat man gefunden, es wird der

Digitized by Google

$$\text{Inhalt} = \sqrt{\frac{S}{2} \times \left(\frac{S}{2} - a\right) \times \left(\frac{S}{2} - b\right) \times \left(\frac{S}{2} - c\right)}.$$

In Worten ausgedrückt, sagt uns diese Formel:

Um den Inhalt eines Dreiecks zu finden, wenn die drei Seiten gegeben sind, zähle man diese zusammen, halbire die Summe und multiplicire diese halbe Summe und alle Reste, welche übrig bleiben, wenn man jede der drei Seiten nach der Reihe von der halben Summe abzieht, mit einander, und ziehe zuletzt aus dem ganzen Produkt die Quadratwurzel.

Ein Beispiel soll dies näher erläutern.

Es seien die 3 Seiten eines Dreiecks $= 8'$, $15'$ und $12'$; so ist die Summe der 3 Seiten oder $S = 8' + 15' + 12' = 35'$

also $\frac{S}{2} = \frac{35}{2} = 17\frac{1}{2} = 17{,}5$;

$$\text{folglich } \frac{S}{2} - a = 17{,}5 - 8 = 9{,}5$$

$$\frac{S}{2} - b = 17{,}5 - 15 = 2{,}5$$

$$\frac{S}{2} - c = 17{,}5 - 12 = 5{,}5;$$

demnach, wenn für die Buchstabenausdrücke in obiger Formel die gefundenen Zahlenwerthe gesetzt werden:

$$\text{der Inhalt} = \sqrt{17{,}5 \times 9{,}5 \times 2{,}5 \times 5{,}5} =$$
$$\sqrt{2285{,}9375} = 47{,}81\,\square'.$$

Anmerkung. Im Praktischen genügt es oft, den Inhalt des Dreiecks dadurch zu bestimmen, daß man dasselbe in verjüngtem Maaßstabe zu Papier bringt (§. 32. 1), die zu einer Seite gehörige Höhe zieht, diese rückwärts auf dem Maaßstabe abmißt und die Berechnung nach §. 36 a. vornimmt.

§. 53. Beispiele.

1) Die drei Seiten eines Dreiecks sind 10^0, 14^0 und 18^0 lang, wie groß ist der Flächeninhalt desselben?

Auflös. $S = 10 + 14 + 18 = 42$, also $\frac{S}{2} = \frac{42}{2} = 21$,

daher $\frac{S}{2} - a = 21 - 10 = 11$

Digitized by Google

$$\frac{S}{2} - b = 21 - 14 = 7$$

$$\frac{S}{2} - c = 21 - 18 = 3 \text{ und}$$

$$\text{Inhalt} = \sqrt{21 \times 11 \times 7 \times 3} = \sqrt{4851} = 69{,}64\,\square^0$$

oder $69\,\square^0\,64\,\square'$.

2) Ein dreieckiges Stück Feld, dessen 3 Seiten $25^0\,8'$, $16^0\,3'$ und $18^0\,5'$ lang sind, soll mit Waizen besäet werden, wenn nun auf je 50 Quadratruthen ein Sester Aussaat kommt; wie viel Waizen ist zur ganzen Aussaat erforderlich?

Auflös. Man rechne den Flächeninhalt des Feldes und hieraus die Menge der Aussaat.

Es ist $S = 258' + 163' + 185' = 606'$ und $\frac{S}{2} = 303'$.

folglich $\frac{S}{2} - a = 303 - 258 = 45$

$$\frac{S}{2} - b = 303 - 163 = 140.$$

$$\frac{S}{2} - c = 303 - 185 = 118, \text{ demnach der}$$

$$\text{Inhalt} = \sqrt{303 \times 45 \times 140 \times 118} =$$

$$\sqrt{225250200} = 15008\,\square'.$$

Den zur Besäeung erforderlichen Waizen findet man wie folgt:

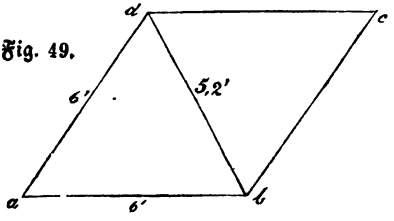
zu $5000\,\square'$ braucht man 1 Sester

$= 15008\,\square' \quad = \quad = x$

$$\frac{1 \times 15008}{5000} = \frac{15008}{5000} = 3 \text{ Sester.}$$

3) Von einer Raute $a\,b\,c\,d$ (Fig. 49) kennt man die Seite $= 6'$ und eine Diagonale $b\,d = 5'\,2''$; wie groß ist ihr Flächeninhalt?

Fig. 49.



Auflös. Da das Dreieck $a\,b\,d$ denselben Inhalt hat, wie das Dreieck $b\,d\,c$ (§. 46) und von jedem die 3 Seiten bekannt

Digitized by Google

sind, so rechne man zuerst nach §. 52 den Inhalt eines Dreiecks und nehme diesen doppelt.

$$S = 6 + 6 + 5{,}2 = 17{,}2;\quad \frac{S}{2} = \frac{17{,}2}{2} = 8{,}6$$

$$\text{daher } \frac{S}{2} - a = 8{,}6 - 6 = 2{,}6$$

$$\frac{S}{2} - b = 8{,}6 - 6 = 2{,}6$$

$$\frac{S}{2} - c = 8{,}6 - 5{,}2 = 3{,}4 \text{ und}$$

$$\text{Inhalt} = \sqrt{8{,}6 \times 2{,}6 \times 2{,}6 \times 3{,}4} = \sqrt{197{,}6624} = 14{,}05\ \square';$$

demnach ist der

Inhalt der Raute $= 14{,}05\ \square' \times 2 = 28{,}1\ \square'$ oder $28\ \square'\ 10\ \square''$.

§. 54. Berechnung des Paralleltrapezes.

a) Man findet den Flächeninhalt eines Paralleltrapezes, wenn man die Längen der beiden parallelen Seiten addirt, mit ihrem senkrechten Abstande die Summe multiplicirt und das erhaltene Produkt durch 2 dividirt.

Sind z. B. die beiden parallelen Seiten *ab* und *cd* (Fig. 50) $= 14'$ und $8'$, ihr senkrechter Abstand $df = 7'$, so hat man

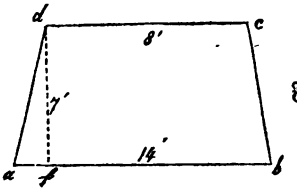


Fig. 50.

$$14 + 8 = 22$$

$$\underline{\quad 7}$$

$$\text{Inhalt} = 154 : 2 = 77\ \square'.$$

b) Ist der Inhalt, der senkrechte Abstand und eine der beiden parallelen Seiten bekannt, so findet man die andere, wenn man den doppelten Inhalt durch die Höhe dividirt und vom Quotienten die gegebene parallele Seite abzieht.

Der Inhalt sei z. B. $= 125\ \square'$, eine der beiden parallelen Seiten $= 20'$ und der senkrechte Abstand $= 9'$, so erhält man

$125 \times 2 = 250 : 9 = 27{,}77$ davon

$\underline{\quad 20}$ abgezogen

gibt $7{,}77$ für die andere Seite.

Digitized by Google

c) Wenn die beiden parallelen Seiten und der Inhalt gegeben sind, so erhält man den senkrechten Abstand durch Division der Summe der beiden parallelen Seiten in den doppelten Inhalt.

Sind z. B. die beiden parallelen Seiten = 15′ und 24′, und der Inhalt = 234 □′, so ist 15 + 24 = 39, folglich

$$\text{der senkrechte Abstand} = \frac{234 \times 2}{39} = 12'.$$

§. 55. Beispiele.

1) Wie groß ist der Flächeninhalt eines Paralleltrapezes, wenn dessen parallelen Seiten 8° 3′ 2″, 11° 4′ und der senkrechte Abstand (Höhe) = 5° 4″ lang sind?

Auflös. Nach §. 54 a) folgt:

$$83{,}2 + 110{,}4 = 193{,}6$$
$$54$$
$$7744$$
$$9680$$
$$10454{,}4 : 2 = 5227{,}2 \square'$$

2) Die beiden parallelen Seiten eines Paralleltrapezes sind 5″ 4‴ und 8″ 2‴ lang, die Höhe beträgt 4″; wie groß muß die Seite eines Quadrats werden, damit es denselben Inhalt hat, wie das Paralleltrapez?

Auflös. Man rechne zuerst den Inhalt des Paralleltrapezes, und ziehe hieraus die Quadratwurzel (nach §. 36. b.).

$$\text{Inhalt des Paralleltrapezes} = \frac{0{,}54 + 0{,}82}{2} \times 0{,}4 =$$

$0{,}272 \square'$; folglich die Seite des Quadrats =

$$\sqrt{0{,}272} = 0{,}521, \text{ oder } 5'' \; 2\tfrac{1}{10}'''.$$

3) Ein Paralleltrapez, dessen zwei parallelen Seiten 10° 4′ und 18° 6′ lang sind und dessen Höhe 4° 2′ beträgt, soll in ein Rechteck von gleichem Inhalte verwandelt werden. Wenn nun die Höhe die nämliche bleiben soll, wie lang muß dasselbe werden?

Auflös. Man findet den Inhalt des Paralleltrapezes nach §. 54. a. = 6090 □′, folglich wird nach §. 34. b. die Länge des Rechtecks = 6090 : 42 = 145′.

Anmerkung. Dasselbe Resultat erhält man durch Halbiren der Summe der beiden parallelen Seiten. Warum?

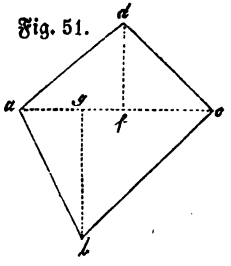
Digitized by Google

§. 56. Berechnung des Trapezes und der unregelmäßigen Vielecke.

a) Um den Inhalt eines Trapezes zu finden, theile man dasselbe durch eine Diagonale in zwei Dreiecke, rechne den Inhalt eines jeden Dreiecks (§. 46. a.) und addire beide.

Hat man z. B. von einem Bauplatze *abcd* (Fig. 51), der ein unregelmäßiges Viereck bildet, die Diagonale $ac = 16^0\ 4'$ und die beiden Senkrechten $df = 8^0\ 2'$ und $bg = 10^0\ 4'$ gemessen so ist

Fig. 51.



der Inhalt des Dreiecks *acd* (§. 46. a.) $= \frac{164 \times 82}{2} = 6724\ \square'$

" " " " *acb* $= \frac{164 \times 104}{2} = 8528\ \square'$

folglich der Inhalt des Platzes *abcd* $= 15252\ \square'$.

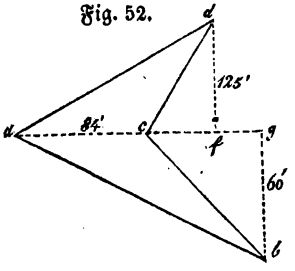
Anmerkung. In der Praxis bestimmt man die beiden Senkrechten *df* und *bg* gewöhnlich dadurch, daß man den Platz in verjüngtem Maaßstabe auf Papier aufträgt, dann diese Linien auf der Zeichnung zieht und die Länge derselben wieder rückwärts auf dem verjüngten Maaßstabe abgreift.

Das Auftragen kann dadurch geschehen, daß man die vier Seiten und eine Diagonale mißt und dann nach §. 32. 1. über die Diagonale die zwei Dreiecke construirt. Genauer geschieht die Bestimmung der beiden Höhen mittelst Meßinstrumenten (Kreuzscheibe und Meßlatten) auf dem Platze selbst.

§. 57. Beispiele.

1) Den Inhalt eines Vierecks, das die Form *abcd* (Fig. 52) hat, zu bestimmen, wenn $ac = 8^0\ 4'$, $df = 12^0\ 5'$ und $bg = 6^0$ ist?

Fig. 52.



Digitized by Google

Auflöſ. Nach §. 46. a. iſt

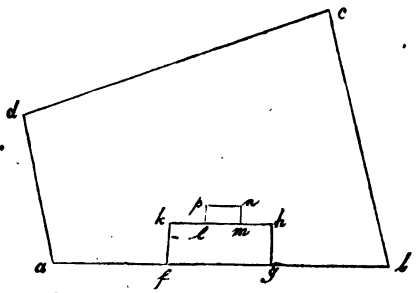
der Inhalt des Dreiecks $acd = \frac{84 \times 125}{2} = 5250 \square'$

„ „ „ „ $abc = \frac{84 \times 60}{2} = 2520 \square'$

folglich der Inhalt von $abcd = 7770 \square'$.

2) Auf einem Platze $abcd$ (Fig. 53) ſteht ein Gebäude, deſſen Grundriß die in der Figur angegebene Form fn hat. Wenn nun der noch freie Raum gepflaſtert werden ſoll, wie viel Quadratſchuh Pflaſter enthält derſelbe?

Fig. 53.

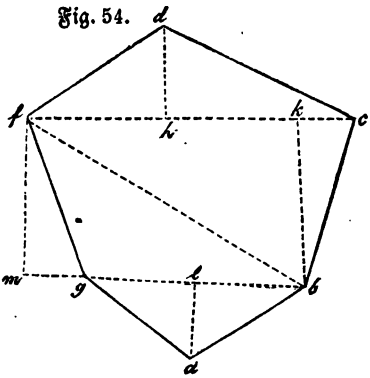


Auflöſ. Man berechne den Inhalt des ganzen Vierecks $abcd$, zähle dann die Inhalte der Rechtecke $fghk$ und $lmnp$ zuſammen und ziehe dieſe Summe von dem Inhalte des ganzen Vierecks ab.

§. 58.

Der Flächeninhalt eines jeden unregelmäßigen Vielecks wird gefunden, wenn man daſſelbe durch Theillinien in Dreiecke zerlegt, den Inhalt eines jeden Dreiecks beſtimmt und hierauf ſämmtliche Inhalte addirt; z. B.:

Fig. 54.



Von dem Sechsecke $abcdfg$ (Fig. 54) wurden gemeſſen: $fc = 32'$; $dh = 12'$; $bk = 18'$; $gb = 25'$; $fm = 14'$ und $al = 8'$; wie groß iſt der Flächeninhalt:

Digitized by Google

Auflöſ. Nach §. 46. a iſt:

der Inhalt des Dreiecks $fcd = \frac{32 \times 12}{2} = 192 \square'$

" " " " $fcb = \frac{32 \times 18}{2} = 289 \square'$

" " " " $fbg = \frac{25 \times 14}{2} = 175 \square'$

" " " " $bga = \frac{25 \times 8}{2} = 100 \square'$

folglich der Inhalt des Sechsecks $= 756 \square'$.

Anmerkung. Die Rechnung wird bedeutend abgekürzt, wenn man immer diejenige Linie als Grundlinie annimmt, welche zwei Dreiecke gemein haben. So wurde z. B. in vorſtehender Aufgabe fc als gemeinſchaftliche Grundlinie für die beiden Dreiecke fdc und fbc angeſehen.

Conſtruktion und Berechnung der regelmäßigen Vielecke.

§. 59. Erklärung.

Theilt man den Umfang eines Kreiſes in eine beliebige Anzahl gleicher Theile und verbindet die Theilpunkte durch gerade Linien mit einander, ſo entſteht ein regelmäßiges Vieleck (§. 22). Fig. 55 ſtellt alſo ein regelmäßiges Sechseck vor.

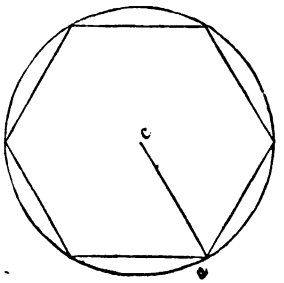


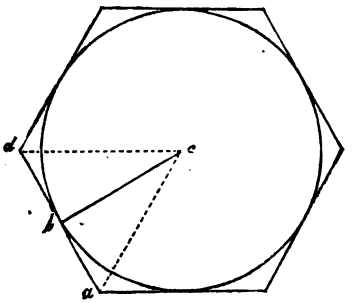
Fig. 55.

Der Mittelpunkt c des Kreiſes iſt zugleich auch der Mittelpunkt des Vielecks und es läßt ſich immer mit der Entfernung eines Eckpunktes des Vielecks vom Mittelpunkte (z. B. mit ac) von dieſem aus ein Kreis zeichnen, welcher durch ſämmtliche Eckpunkte des Vielecks geht. Man ſagt in dieſem Falle, das Vieleck ſei in den Kreis oder auch der Kreis ſei um das Vieleck beſchrieben.

Digitized by Google

Errichtet man von dem Mittelpunkte *c* (Fig. 56) eines regelmäßigen Vielecks aus, auf eine Seite desselben, z. B. auf *a d* eine Senkrechte *c b*, und beschreibt mit dieser von *c* aus einen Kreis, so berührt derselbe alle Seiten des Vielecks. Hier heißt das Vieleck ein umschriebenes oder der Kreis ist in das Vieleck beschrieben.

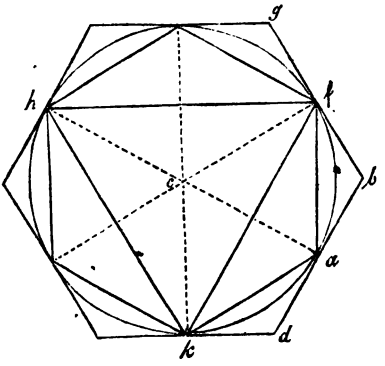
Fig. 56.



§. 60. Construktion der regelmäßigen Vielecke.

1) In und um einen Kreis ein regelmäßiges Sechseck zu zeichnen. Auflös. Man erhält die sechs Theilpunkte des eingeschriebenen Sechsecks, wenn man den Halbmesser des Kreises in der Peripherie herumträgt (Fig. 57.)

Fig. 57.



Um das umgeschriebene Sechseck zu erhalten, ziehe man Halbmesser nach den sechs Theilpunkten, wie *c f*, *c a* u. s. w., errichte in den Endpunkten *f* und *a* Senkrechte auf dieselben, wie *g b*, *b d*, bis sie sich schneiden, so geben die Durchschnittspunkte, wie *b*, *d*, die Eckpunkte des umschriebenen Sechsecks.

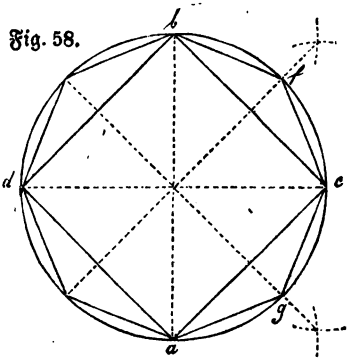
2) In und um einen Kreis ein regelmäßiges Dreieck zu zeichnen. Auflös. Suche die sechs Theilpunkte der vorigen Aufgabe und lasse bei dem Verbinden derselben immer einen Theilpunkt aus, so erhält man *k f h* (Fig. 57) als eingeschriebenes Dreieck.

Das umgeschriebene Dreieck wird ähnlich gefunden, wie für das Sechseck oben gezeigt wurde.

Digitized by Google

3) In einen Kreis ein regelmäßiges Viereck (Quadrat) zu zeichnen.

Fig. 58.



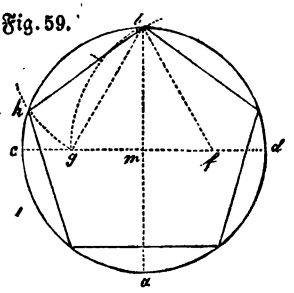
Auflös. Errichte zwei auf einander stehende Durchmesser *ab* und *cd* (Fig. 58), so sind die Durchschnittspunkte *a, c, b* und *d* die vier Eckpunkte des Quadrats.

4) In einen Kreis ein regelmäßiges Achteck zu zeichnen.

Auflös. Man suche die vier Eckpunkte des eingeschriebenen Quadrats nach 3) und halbire den zwischen je zwei aufeinander folgenden Punkten liegenden Bogen in *f, g* u. s. w. (Fig. 58), so erhält man die Eckpunkte des Achtecks.

5) Ein regelmäßiges Fünfeck in einen Kreis zu zeichnen.

Fig. 59.



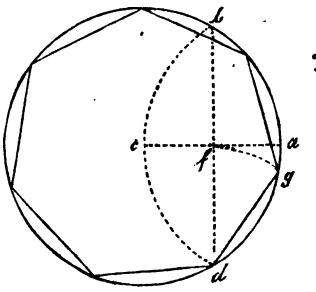
Aufl. Man ziehe zwei auf einander senkrecht stehende Durchmesser *ab* und *cd* (Fig. 59.), halbire *md* in *f*, beschreibe mit *fb* von *f* aus den Bogen *bg* und von *b* aus mit *bg* den Bogen *gh* ziehe *hb*, so ist dieses die Seite des Fünfecks, welche nun in dem Umfange des Kreises herumzutragen ist.

Anmerkung. Halbirt man die über den Fünfeckseiten liegende Bogen, so erhält man die Eckpunkte des eingeschriebenen regelmäßigen Zehnecks. (Eine weitere Construktion siehe bei 8.)

6) Ein regelmäßiges Siebeneck in einen Kreis zu zeichnen.

Digitized by Google

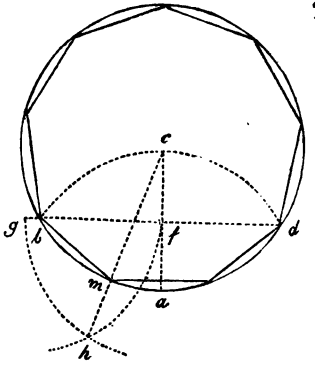
Fig. 60.



Auflös. Halbire ca in f (Fig. 60) errichte bd senkrecht auf ac, beschreibe mit df von d aus den Bogen fg, so ist dg die gesuchte Siebeneckseite.

7) In einen Kreis ein regelmäßiges Neuneck zu zeichnen.

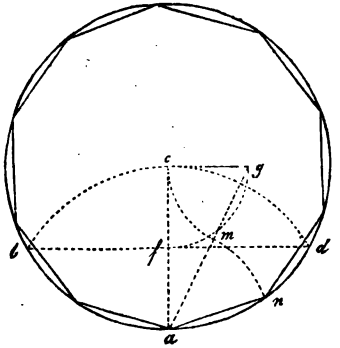
Fig. 61.



Auflös. Man ziehe ca (Fig. 61), in der Mitte f errichte man darauf db senkrecht, beschreibe von f aus mit ac den Bogen gh und von dem Durchschnittspunkt g dieses Bogens mit der Verlängerung von db aus den Bogen fh, ziehe hc und mb, so ist dieses die verlangte Neuneckseite.

8) Ein regelmäßiges Zehneck in einen Kreis zu zeichnen.

Fig. 62.



Auflös. Ziehe ca und bd (Fig. 62) wie oben, errichte cg senkrecht auf ac, trage cf nach cg, ziehe ag, beschreibe von g aus mit gc den Bogen cm und von a aus mit am den Bogen mn, so ist an die Zehneckseite.

Anmerkung. Aus den bis jetzt angegebenen Construktionen lassen sich noch viele andere regelmäßige Vielecke ableiten, wenn man die über den

Digitized by Google

Seiten liegende Bogen in 2, 3 u. s. w. gleiche Theile theilt und die Theilpunkte durch Sehnen verbindet.*)

§. 61. Berechnung der regelmäßigen Vielecke.

a) Der Umfang eines regelmäßigen Vielecks wird erhalten, wenn man die Länge einer Seite mit der Anzahl aller Seiten multiplicirt.

Ist z. B. die Seite des regelmäßigen Achtecks = 7 Zoll, so ist der Umfang = $7 \times 8 = 56''$ oder $5' 6''$.

b) Ist die Seite eines regelmäßigen Vielecks gegeben, so findet man den Halbmesser des um- und eingeschriebenen Kreises, wenn man die Seite mit dem in folgender Tabelle, bei dem betreffenden Vielecke stehenden Zahlenwerthe multiplicirt.

Bezeichnet nämlich S die Seite, R den Halbmesser des umgeschriebenen und r den des eingeschriebenen Kreises, so ist:

für das Dreieck, $R = 0{,}578 \times S$ und $r = 0{,}289 \times S$
" " Viereck, $R = 0{,}705 \times S$ " $r = 0{,}500 \times S$
" " Fünfeck, $R = 0{,}852 \times S$ " $r = 0{,}688 \times S$
" " Sechseck, $R = 1{,}000 \times S$ " $r = 0{,}866 \times S$
" " Siebeneck, $R = 1{,}160 \times S$ " $r = 1{,}038 \times S$
" " Achteck, $R = 1{,}307 \times S$ " $r = 1{,}207 \times S$
" " Neuneck, $R = 1{,}470 \times S$ " $r = 1{,}374 \times S$
" " Zehneck, $R = 1{,}625 \times S$ " $r = 1{,}539 \times S$
" " Elfeck, $R = 1{,}777 \times S$ " $r = 1{,}703 \times S$
" " Zwölfeck $R = 1{,}940 \times S$ " $r = 1{,}866 \times S$.

Beispiel. Um und in ein regelmäßiges Achteck, von $5''$ Seite, sollen Kreise beschrieben werden, wie groß muß man die Halbmesser nehmen?

Auflös. Aus obiger Tabelle folgt:
Halbmesser des umschriebenen Kreises $= 1{,}307 \times 0{,}5 = 0{,}6535'$
" " eingeschriebenen " $= 1{,}207 \times 0{,}5 = 0{,}6035'$.

c) Ist der Halbmesser des um- oder eingeschriebenen Kreises bekannt und man soll die Seite eines regelmäßigen Vielecks bestimmen, so dient hierzu folgende Zusammenstellung:

---

*) Weitere Construktionsaufgaben über regelmäßige Vielecke siehe Anhang I. d.

Digitized by Google

für das	Dreieck	ist S	=	1,732 × R	oder	=	3,463 × r
" "	Viereck	" S	=	1,412 × R	"	=	2,000 × r
" "	Fünfeck	" S	=	1,447 × R	"	=	1,453 × r
" "	Sechseck	" S	=	1,000 × R	"	=	1,155 × r
" "	Siebeneck	" S	=	0,867 × R	"	=	1,963 × r
" "	Achteck	" S	=	0,765 × R	"	=	0,828 × r
" "	Neuneck	" S	=	0,681 × R	"	=	0,728 × r
" "	Zehneck	" S	=	0,646 × R	"	=	0,649 × r
" "	Elfeck	" S	=	0,561 × R	"	=	0,587 × r
" "	Zwölfeck	" S	=	0,516 × R	"	=	0,536 × r.

d) Der Flächeninhalt eines regelmäßigen Vielecks wird erhalten, wenn man den Umfang desselben mit dem Halbmesser des eingeschriebenen Kreises multiplicirt und das Produkt durch 2 dividirt.

Ist jedoch nur die Seite S oder nur der Halbmesser R des umschriebenen Kreises bekannt und man will nicht vorher den Halbmesser des eingeschriebenen Kreises nach b) bestimmen, so kann man sich mit Vortheil nachstehender Tabelle bedienen, nach welcher man also nur die Seite oder auch nur den Halbmesser des umschriebenen Kreises mit sich und mit dem beistehenden Zahlenwerthe zu multipliciren hat, um den Inhalt J zu erhalten.

für das	Dreieck	ist J	=	0,433 × S × S	oder	=	1,299 × R × R
" "	Viereck	" J	=	1,000 × S × S	"	=	2,000 × R × R
" "	Fünfeck	" J	=	1,720 × S × S	"	=	2,370 × R × R
" "	Sechseck	" J	=	2,598 × S × S	"	=	2,598 × R × R
" "	Siebeneck	" J	=	3,634 × S × S	"	=	2,732 × R × R
" "	Achteck	" J	=	4,828 × S × S	"	=	2,825 × R × R
" "	Neuneck	" J	=	6,182 × S × S	"	=	2,867 × R × R
" "	Zehneck	" J	=	7,694 × S × S	"	=	2,920 × R × R
" "	Elfeck	" J	=	9,365 × S × S	"	=	2,947 × R × R
" "	Zwölfeck	" J	=	11,296 × S × S	"	=	2,975 × R × R.

e) Hieraus folgt zugleich, daß man die Seite S bei bekanntem Inhalte findet, wenn man diesen durch die vor S × S bei dem betreffenden Vielecke in vorhergehender Tabelle stehende Zahl dividirt und aus dem erhaltenen Resultat die Quadratwurzel zieht; ferner, daß der Halbmesser des umschriebenen

Digitized by Google

Kreises gefunden wird, wenn man den Inhalt durch die bei R × R stehende Zahl dividirt und dann die Quadratwurzel auszieht.

f) Um den Halbmesser r des eingeschriebenen Kreises aus dem Inhalte zu bekommen, bestimme man zuerst nach e) die Seite S und dann aus den Tafeln bei b) den Halbmesser r.

§. 62. Beispiele.

1) Man soll die Halbmesser der zwei Kreise berechnen, welche um und in ein regelmäßiges Siebeneck von 3′ 8″ Seite beschrieben werden können?

Auflös. Nach §. 61. b. folgt für das Siebeneck der
Halbmesser des umschriebenen Kreises R = 1,160 × S
= 1,160 × 3,8′ = 4,408′
Halbmesser des eingeschriebenen Kreises r = 1,038 × S =
1,038 × 3,8′ = 3,9444′.

2) In einen Kreis von 5″ Halbmesser wird ein regelmäßiges Fünfeck gezeichnet, welche Größe hat die Seite desselben?

Auflös. Der Kreis ist also ein umschriebener, und aus der Tabelle in §. 61. c. ersieht man, daß für das Fünfeck S = 1,447 × R oder S = 1,447 × 0,5 = 0,7235′ sein muß.

3) Wie groß wird in vorhergehender Aufgabe die Seite des umschriebenen Fünfecks?

Auflös. Da in diesem Falle der Kreis als eingeschrieben erscheint, so erhält man aus §. 61. c. die Seite S =
1,453 × r = 1,453 × 0,5′ = 0,7265′.

4) Die Seite eines regelmäßigen Achtecks ist 2′ 4″ lang; wie groß ist der Inhalt desselben, wenn der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises 2,897′ beträgt?

Auflös. Umfang nach §. 61. a. = 2,4 × 8 = 19,2′ folglich nach d. der Inhalt = $\frac{19,2 \times 2,897}{2}$ = 27,8112 □′.

5) Vorhergehende Aufgabe zu lösen, wenn nur die Seite = 2′ 4″ bekannt ist.

Auflös. Aus der in §. 61. d. angegebenen Tabelle folgt für das Achteck:
der Inhalt = 4,828 × S × S = 4,828 × 2,4 × 2,4
= 27,80928 □′, wie in Aufgabe 4.

Digitized by Google

6) Wie groß ist der Inhalt eines regelmäßigen Zehnecks, wenn der Halbmesser des um dasselbe beschriebenen Kreises 2′ 2″ lang ist?

Auflös. Aus der Tabelle in §. 61. d. folgt der Inhalt $= 2,920 \times R \times R = 2,92 \times 2,2 \times 2,2 = 14,1328 \square'$.

7) Ein regelmäßiges Zwölfeck hat einen Inhalt von $3 \square^0 91 \square' 86 \square''$; wie groß ist die Seite desselben?

Auflös. Aus §. 61. e. folgt:

$$\text{Seite} = \sqrt{\frac{391,86}{11,196}} = \sqrt{35} = 5,916'.$$

8) Wie groß muß man den Halbmesser des Kreises nehmen, welcher um ein regelmäßiges Dreieck von $157,179 \square'$ Inhalt beschrieben werden soll?

Auflös. Nach e) findet man den

$$\text{Halbmesser} = \sqrt{\frac{157,179}{1,299}} = \sqrt{121'} = 11'.$$

9) Der Inhalt eines regelmäßigen Neunecks beträgt $15 \square' 45 \square''$; wie groß wird der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises?

Auflös. Die Seite des Neunecks (§. 61. f.) ist nach §. 61. e.

$$= \sqrt{\frac{15,45}{6,182}} = \sqrt{2,499} = 1,581',$$

folglich nach b) der Halbmesser $r = 1,374 \times 1,581 = 2,172294'$.

10) Der Halbmesser des um ein regelmäßiges Elfeck beschriebenen Kreises ist 5′ lang, wie groß ist der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises?

Auflös. Rechne zuerst aus §. 61. c. die Seite des Vielecks und hieraus nach b) den Halbmesser.

Nach c) ist die Seite $= 0,561 \times 5 = 2,805'$,

folglich nach b) $r = 1,703 \times S = 1,703 \times 2,805 = 4' 7'' 7\frac{7}{10}'''$.

11) Um einen Kreis von 6′ Halbmesser wurde ein regelmäßiges Siebeneck gezeichnet; wie groß ist der Halbmesser des um das Vieleck gezeichneten Kreises?

Auflös. Rechne wie in Aufgabe 10 zuerst die Seite aus dem gegebenen Halbmesser r nach §. 61. c. und dann nach b) aus S den Halbmesser R.

Digitized by Google

Man findet die Seite $= 0{,}963 \times r = 0{,}963 \times 6 =$ 5,778′, folglich der Halbmesser $R = 1{,}160 \times S =$ $1{,}16 \times 5{,}778 = 6{,}70248'$.

§. 63. Berechnung des Kreises und seiner Theile.

a) Der Umfang eines Kreises wird gefunden, wenn man den Durchmesser, oder was dasselbe ist, den doppelten Halbmesser mit dem unächten Bruche $\frac{22}{7}$ oder mit dem Decimalbruche 3,14 multiplicirt.

Anmerkung. Nach diesem Verfahren erhält man Resultate, welche für die meisten Fälle hinreichend genau sind; wird jedoch eine genauere Lösung der Aufgabe verlangt, so bediene man sich statt des Decimalbruchs 3,14 des Ausdrucks 3,1416.

Beispiel. Der Halbmesser eines Kreises ist 5′ 4″ lang; wie groß ist sein Umfang?

Auflös. Durchmesser $= 5' 4'' \times 2 = 10' 8''$,
folglich Umfang $= 3{,}14 \times 10{,}8 = 33{,}912'$.
Genauer wäre der Umfang $= 3{,}1416 \times 10{,}8 = 33{,}92928'$.

b) Den Durchmesser erhält man nach a), wenn der Umfang gegeben ist, durch Division der Zahl 3,14 in den Umfang.

Wird der Durchmesser halbirt, so erhält man den Halbmesser.

Beispiel. Der Umfang eines Kreises beträgt 48′ 5″ 7‴; wie groß ist der Halbmesser?

Auflös. Durchmesser $= 48{,}57' : 3{,}14' = 15' 4'' 6'''$,
folglich Halbmesser $= 15{,}46' : 2 = 7' 7'' 3'''$.

Anmerkung. Aus a) folgt, daß man, um den Umfang eines Kreises auf einer geraden Linie aufzutragen, nur den Durchmesser in 7 gleiche Theile zu theilen und 22 solcher Theile auf der Linie abzuschlagen hat. Soll dagegen der Kreisumfang gleich einer gegebenen Linie werden, so theile man diese in 22 gleiche Theile und beschreibe über 7 solchen als Durchmesser einen Kreis, so ist dies der verlangte.

c) Bei Bestimmung des Inhaltes können zwei Fälle vorkommen, nämlich entweder ist nur der Umfang oder nur der Halbmesser bekannt.

1) Für den Fall, daß nur der Umfang gegeben ist, findet man den Inhalt, indem man zuerst nach b) den Halbmesser

Digitized by Google

sucht, diesen alsdann mit dem Umfange multiplicirt, und das Produkt durch 2 dividirt.

2) Ist nur der Halbmesser bestimmt, so multiplicire man diesen mit sich und das Produkt nochmals mit 3,14.

Beispiele. 1) Wie groß ist der Inhalt eines Kreises, dessen Umfang 94′ 6″ beträgt?

Auflös. Durchmesser nach b) =
94,6 : 3,1416 = 30,112; folglich

$$\text{Halbmesser} = \frac{30,112}{2} = 15,056, \text{ daher nach c. 1.}$$

$$\text{Inhalt} = \frac{94,6 \times 15,056}{2} = 712,1488 \square'.$$

2) Wie groß ist der Inhalt, wenn der Halbmesser = 15′ gemessen wurde?

Auflös. Nach c. 2. ist der Inhalt = 15 × 15 × 3,14 =
= 225 × 3,14 = 706,5 □′.

d) Den Halbmesser findet man aus dem Inhalte, wenn man letztern durch 3,14.. dividirt und aus dem Resultate die Quadratwurzel auszieht.

Beispiel. Der Inhalt eines Kreises beträgt 28□′ 27□″ 44□‴; wie groß ist sein Halbmesser?

$$\text{Auflös. Halbmesser} = \sqrt{\frac{28,2744}{3,1416}} = \sqrt{9} = 3'$$

(es ist 28,2744 : 3,1416 = 9).

e) Soll der Umfang bestimmt werden, wenn der Inhalt gegeben ist, so suche man nach d) den Halbmesser und rechne hieraus nach *a*) den Umfang.

Beispiel. Der Inhalt eines Kreises soll 384 □′ betragen; wie groß muß sein Umfang werden?

Auflös. Nach d) ist sein Halbmesser =

$$\sqrt{\frac{384}{3,14}} = \sqrt{122,29} = 11,05'.$$

Demnach aus a) der Umfang = 11,05′ × 3,14 =
34′ 6″ 9‴.

f) Wenn die Länge eines Kreisbogens gefunden werden soll, so multiplicire man den Umfang des Kreises mit dem Maaße des Centriewinkels, welcher zu dem Bogen gehört und dividire

Digitized by Google

das Produkt, wenn der Centriewinkel in Graden ausgedrückt ist, durch 360.

Enthält aber dieser Winkel auch noch Minuten, so drücke man die Größe des Centriewinkels in Minuten aus und theile alsdann statt mit 360 mit $360 \cdot 60 = 21600$.

Beispiele. 1) Der Halbmesser eines Kreises mißt 1′ 5″; wie groß ist der zu einem Centriewinkel von 78° gehörige Bogen?

Auflös. Umfang des Kreises nach a) $=$ $3{,}14 \times 3' = 9{,}42'$; folglich:

$$\text{Bogen} = \frac{9{,}42 \times 78}{360} = 2{,}041'$$

2) Wie groß ist der zu einem Centriewinkel von 36° 25′ gehörige Bogen, wenn der Halbmesser $= 8'\ 5''$ lang ist?

Auflös. Umfang des Kreises $= 3{,}14 \times 17 = 53{,}38'$; folglich, da $36° 25' = 2185$ Minuten geben,

$$\text{Bogen} = \frac{53{,}38 \times 2185}{21600} = 5{,}399' \ldots\ldots$$

g) Der Inhalt eines Kreissektors oder Ausschnitts *adbc* (Fig. 63) wird erhalten, wenn man die Länge des Bogens *adb* mit dem Halbmesser multiplicirt und das Produkt halbirt.

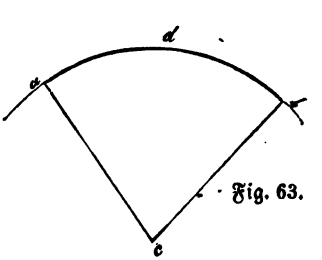


Fig. 63.

Beispiel. Wie groß ist der Inhalt eines Kreisausschnitts, dessen Bogen $= 1'\ 2''$ und dessen Halbmesser $= 8''$ ist?

Auflös. Inhalt $= \frac{1{,}2 \times 0{,}8}{2} = 0{,}48\square' = 48\square''$.

Anmerkung. Ist die Länge des Bogens nicht bekannt, so messe man zuerst den Centriewinkel und bestimme diese hieraus und aus dem Halbmesser nach f).

h) Ist der Inhalt eines Kreissegments oder Abschnitts *abc* (Fig. 64) zu bestimmen, so rechne man zuerst den Inhalt des Sektors *adbca* nach g) und ziehe hiervon den Inhalt des Dreiecks *adb* ab.

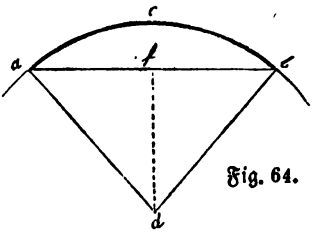


Fig. 64.

Digitized by Google

Beispiele. 1) Es wurde gemessen: Bogen $acb = 1' 8''$, Sehne $ab = 1' 5''$, Halbmesser des Kreises $= 1' 1''$ und die Senkrechte $df = 8''$; wie groß ist der Inhalt des Segments abc?

Auflös. Nach g) ist der Inhalt des Sektors $adbc =$

$$\frac{1{,}8 \times 1{,}1}{2} = 0{,}99\,\square'$$

und nach §. 46. a. der Inhalt des Dreiecks $abd =$

$$\frac{1{,}5 \times 0{,}8}{2} = 0{,}6\,\square';$$

folglich der Inhalt des Segments $abc =$

$$0{,}99\,\square' - 0{,}6\,\square' = 39\,\square'';$$

2) Wie groß ist der Inhalt eines Segments abc (Fig 64), wenn folgende Stücke bekannt sind: der zum Bogen gehörige Centriewinkel $d = 50^0$, der Halbmesser $ad = 8'$, die Sehne $ab = 6' 7'' 6'''$ und die Höhe $df = 7' 2'' 5'''$?

Auflös. Nach f. (siehe Anmerkung bei g.) erhält man:

Länge des Bogens $acb = \frac{16 \times 3{,}14 \times 50}{360} = 6{,}97'$

Inhalt des Sektors $acbd = 6{,}97' \times 4 = 27{,}88\,\square'$

Inhalt des Dreiecks $adb = \frac{6{,}76 \times 7{,}25}{2} = 24{,}505\,\square'$

folglich der Inhalt des Segments $= 3{,}375\,\square'$.

§. 64. Beispiele über die Berechnung des Kreises.

1) Wie groß ist der Umfang eines Kreises von $3^0\ 2''$ langem Durchmesser?

Auflös. Nach §. 63. a. ist der

Umfang $= 30{,}2 \times 3{,}14 = 94{,}828'$.

2) Der Durchmesser eines Kreises ist $9''$ lang; wie groß ist der Umfang und Inhalt desselben, wenn große Genauigkeit verlangt wird?

Auflös. Nach der Anmerkung zu §. 63. a, folgt:

Umfang $= 0{,}9 \times 3{,}1416 = 2{,}82744'$ und da der

Halbmesser $= \frac{9''}{2} = 4{,}5'' = 0{,}45'$, so ist nach §. 63. c. 1.

Digitized by Google

der Inhalt $= \frac{2,82744 \times 0,45}{2} = 0,636174\square' =$

$63\square'' 61\square''' 74\square^{IV}$.

3) Der Umfang eines Kreises beträgt $8^0 4'$; wie groß ist sein Inhalt?

Auflös. Man rechne zuerst nach §. 63 b. den Durchmesser und hieraus aus c. 1. den Inhalt.

Durchmesser $= 84 : 3,14 = 26,75'$ also

Halbmesser $= \frac{26,75}{2} = 13,375$; demnach

$$\text{Inhalt} = \frac{84 \times 13,375}{2} = 561,75\square'.$$

4) Der Halbmesser eines Kreises ist $5'' 3'''$ lang; wie groß ist der Inhalt desselben?

Auflös. Nach §. 63. c. 2. folgt:

Inhalt $= 0,53 \times 0,53 \times 3,14 = 0,2809 \times 3,14$
$= 0,882026\square'$ oder $88\square'' 20\square''' 26\square^{IV}$.

5) Der Inhalt eines Kreises beträgt $400\square'$; wie groß ist der Halbmesser und sein Umfang?

Auflös. Nach §. 63. d. folgt:

$$\text{Halbmesser} = \sqrt{\frac{400}{3,14}} = \sqrt{127,3885} = 11,28'$$

Durchmesser also $= 11,28 \times 2 = 22,56'$

und Umfang nach a. $= 22,56 \times 3,14 = 70,8384'$.

6) Die Länge eines Kreisbogens zu finden, wenn der zugehörige Centriewinkel $= 36^0 30'$ und der Halbmesser $3'$ gemessen wurden?

Auflös. Nach §. 63. f. ist die Länge des Bogens $=$

$$\frac{6 \times 3,14 \times 36\frac{1}{2}}{360} = \frac{18,84 \times 73}{720} = \frac{1375,32}{720} = 1,91'$$

7) Von einem Kreisausschnitt wurden gemessen: Der Centriewinkel $= 108^0$ und der Halbmesser $= 4' 5''$; wie groß ist der Inhalt desselben?

Auflös. Nach §. 63. f. und g. folgt:

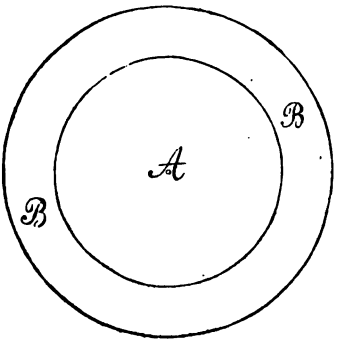
$$\text{Bogen} = \frac{9 \times 3,14 \times 108}{360} = \frac{3052,08}{360} = 8,47', \text{ folglich}$$

$$\text{Inhalt des Sektors} = \frac{8,47 \times 4,5}{2} = \frac{38,115}{2} = 19,0575\square'.$$

Digitized by Google

8) Um einen kreisförmigen Platz A (Fig. 65) führt ein Weg B. Wenn nun der Halbmesser von $A = 38'$ und die Wegbreite $= 5'$ angenommen wird; wie groß ist der Flächeninhalt des Weges und wie hoch kommt die Ueberführung desselben mit Sand, wenn auf je 500 □′ ein Wagen gerechnet wird, für welchen man 24 kr. bezahlen muß.

Fig. 65.



Auflös. Der Inhalt des Weges B wird gefunden, wenn man den Inhalt des Platzes A von dem Inhalt des großen Kreises, welcher durch den äußeren Wegrand gebildet wird, abzieht.

Inhalt des großen Kreises (§. 63. c. 2)
$= 43 \times 43 \times 3,14 = 5805,86$ □′
(denn sein Halbmesser ist $= 38' + 5' = 43'$)
Inhalt des kleineren Kreises $A =$
$38 \times 38 \times 3,14 = 4534,16$ □′
folglich Inhalt des Weges $B = 1271,7$ □′
Demnach sind zur Ueberführung erforderlich
$1271,7 : 500 = 2\frac{1}{2}$ Wagen Sand (beinahe).
Diese kosten $2\frac{1}{2} \times 24$ kr. $= 1$ fl.

Digitized by Google

Anhang.

I. Geometrische Constructionsaufgaben.

A. Aufgaben über gerade Linien und Winkel.

1) Es sind zwei Linien gegeben, eine dritte zu zeichnen, welche gleich der Summe dieser beiden ist.

Auflös. Man trage die beiden Linien auf einer Geraden an einander.

2) Zwei Linien sind gegeben, den Unterschied beider durch eine dritte darzustellen.

Auflös. Man trage die kleinere Linie von dem einen Endpunkte aus auf der größeren ab, so ist der Ueberschuß der letztern der gesuchte Unterschied.

3) Eine Linie zu zeichnen, welche viermal so groß als eine gegebene ist.

Auflös. Man schlage die gegebene Linie viermal neben einander auf einer Geraden ab.

4) Eine gegebene Linie *a b* (Fig. 66) durch eine Senkrechte zu halbiren.

Auflös. Man beschreibe von *a* und *b* aus mit beliebiger, aber gleicher Zirkelöffnung die Bogen 1 und 2, ebenso Bogen 3 und 4, und verbinde die Durchschnittspunkte derselben durch *c d*, so steht diese Linie senkrecht auf *a b* und halbirt sie.

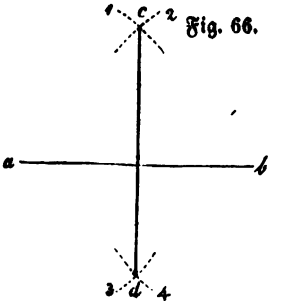
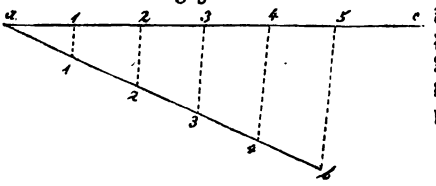


Fig. 66.

Digitized by Google

5) Eine gegebene Linie *ab* (Fig. 67) in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile zu theilen, z. B. in 5.

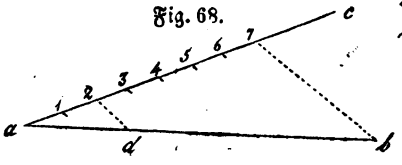
Fig. 67.



Auflös. Man ziehe von *a* aus irgend eine Linie *ac* und trage darauf einen Theil *a* 1 neben einander 5 mal auf, verbinde den letzten Theilpunkt 5 mit *b* und ziehe durch die übrigen Theilpunkte Parallelen zu dieser Verbindungslinie, so theilen diese die Linie *ab* in die verlangte Anzahl gleicher Theile.

6) Eine gegebene Linie *ab* (Fig. 68) in zwei Theile zu theilen, welche sich verhalten wie 2 zu 5.

Fig. 68.

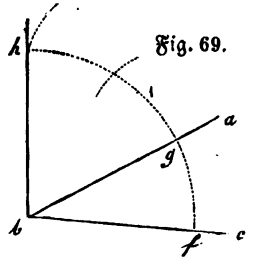


Auflös. Trage auf die beliebige Linie *ac* von *a* aus $5 + 2 = 7$ gleiche Theile auf, ziehe *b*7 und damit durch 2 eine Parallele *d*2, so sind *ad* und *db* die verlangten Theile.

Anmerkung. Auf ähnliche Weise geschieht die Auflösung, wenn eine Linie in drei oder mehr Theile nach bestimmtem Verhältnisse getheilt werden soll, oder wenn sich die Theile der Linie *ab*, wie irgend gegebene Längen, die durch Linien ausgedrückt sind, verhalten sollen. Man trägt in letzterem Falle nur statt der Summe der Verhältnißzahlen, die Summe der gegebenen Linien, nach Aufgabe 1., auf *ac* auf.

7) Einen gegebenen Winkel *abc* (Fig. 69) zu vervielfachen, z. B. zu verdreifachen.

Fig. 69.



Auflös. Man beschreibe mit beliebiger Zirkelöffnung von *b* aus den Bogen *fgh*, trage darauf von *g* aus das Bogenstück *fg* noch zweimal ab bis *h*, so ist $\sphericalangle$ *hbc* dreimal so groß als $\sphericalangle$ *abc*.

8) Einen gegebenen Winkel *abc* (Fig. 70) zu halbiren.

Digitized by Google

Auflöſ. Von *b* aus beſchreibe man den Bogen 1, dann Bogen 2 und 3 von *a* und *c* aus mit beliebiger aber gleicher Zirkelöffnung, ziehe Linie *b d*, ſo halbirt dieſe den Winkel.

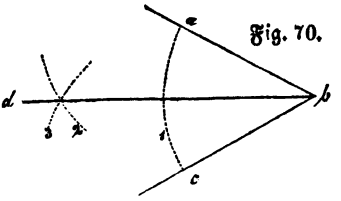


Fig. 70.

Anmerkung. Durch fortgeſetztes Halbiren läßt ſich ein Winkel in 4, 8, 16 u. ſ. w. gleiche Theile theilen.

9) Einen rechten Winkel *abc* (Fig. 71) in 3 gleiche Theile zu theilen.

Auflöſ. Beſchreibe mit beliebiger Zirkelöffnung zwiſchen die Schenkel den Bogen *ac*, trage *bc* nach *cd* und *af*, ſo ſind *bd* und *bf* die Theillinien.

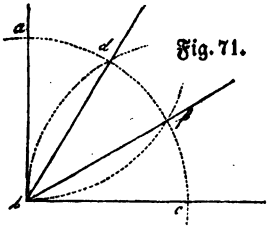


Fig. 71.

B. Aufgaben über die Dreiecke.

10) Von einem Dreieck kennt man die zwei Seiten *a* und *b* und den von ihnen eingeſchloſſenen Winkel *c* (Fig 72); das Dreieck zu conſtruiren.

Auflöſ. Trage an einem Endpunkt von *a* die Seite *b* unter dem ∠ *c* nach §. 32. 8. an und verbinde die Endpunkte beider Schenkel durch die Linie *m*.

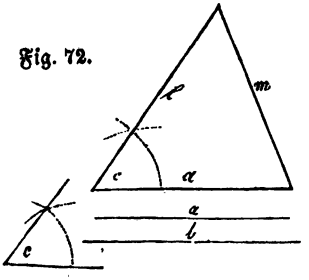


Fig. 72.

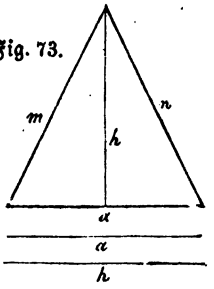
11) Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gegeben ſind.

Auflöſ. Man trage die beiden Winkel an den Endpunkten der gegebenen Linie auf derſelben Seite an und verlängere ihre Schenkel bis ſie ſich ſchneiden.

12) Von einem gleichſchenkligen Dreieck iſt die ungleiche Seite *a* (Fig. 73) und die zugehörige Höhe *h* bekannt; wie wird das Dreieck conſtruirt?

Digitized by Google

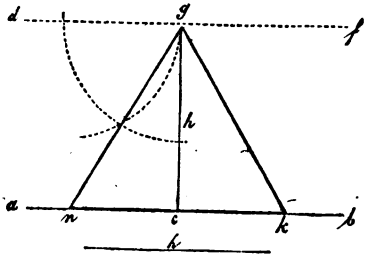
Fig. 73.



Auflöſ. Errichte in der Mitte von a, die Höhe h ſenkrecht, ziehe die Linien m und n, ſo iſt amn das gleichſchenklige Dreieck.

13) Man kennt von einem gleichſeitigen Dreieck nur die Höhe, wie zeichnet man daſſelbe?

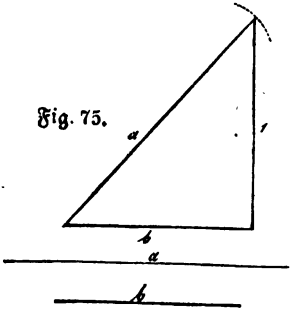
Fig. 74.



Auflöſ Es ſei h (Fig. 74) die Höhe. Errichte in irgend einem Punkte c einer Linie ab eine Senkrechte $cg = h$ (§. 32. 9.), ziehe $df \parallel ab$ (§. 32. 11.) und mache $\sphericalangle cgn$ gleich dem dritten Theile des rechten Winkels cgd (Aufg. 9), trage cn nach ck, ſo iſt nkg das gleichſeitige Dreieck.

14) Von einem rechtwinkligen Dreieck ſind gegeben die Hypotenuſe $= a$ und eine Cathete $= b$ (Fig. 75); wie zeichnet man daſſelbe?

Fig. 75.



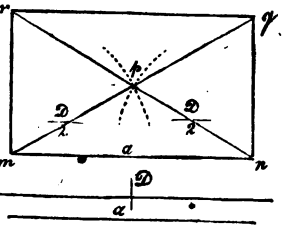
Auflöſ. Man errichte im Endpunkte der Linie b eine Senkrechte 1 (nach §. 32. 4.) und durchſchneide dieſe von dem andern Endpunkte aus mit der Zirkelöffnung $= a$, ſo iſt das Dreieck gefunden.

Digitized by Google

C. Aufgaben über die Parallelogramme, das Pararalleltrapez und Trapez.

15) Man kennt die Diagonale D (Fig. 76) und eine Seite a eines Rechtecks; wie wird dasselbe construirt?

Fig. 76.

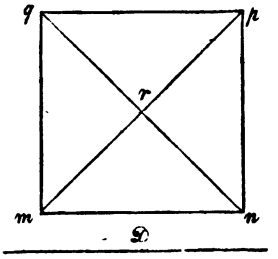


Erste Auflös. Die beiden Diagonalen eines Rechtecks sind gleich und halbiren sich gegenseitig. Man beschreibe daher über a mit der Hälfte von D ein gleichschenkliges Dreieck mpn und mache $pq = mp$ und $rp = pn$.

Zweite Aufl. Errichte in den Endpunkten m und n die Senkrechten mr und nq und schlage von n aus D nach nr und von m aus nach mq um die Eckpunkte des Rechtecks zu erhalten.

16) Die Diagonale eines Quadrats ist gegeben, dasselbe zu construiren.

Fig. 77.



Auflös. Es sei D (Fig. 77) die Diagonale. Ziehe zwei auf einander senkrecht stehende Linien mp und nq und trage die Hälfte von D nach rp, rq, rm und rn.

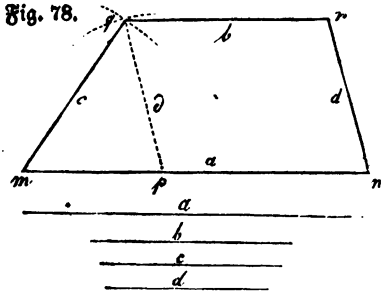
17) Eine Raute zu zeichnen, von welcher die zwei Diagonalen gegeben sind.

Auflös. Man ziehe wie in vorhergehender Aufgabe qn und mp (Fig. 77) und trage von r aus die Hälfte der einen Diagonale gegen rq und rn und die Hälfte der andern Diagonale gegen rp und rm.

18) Ein Paralleltrapez zu construiren, dessen vier Seiten gleich den vier Linien a, b, c, d (Fig. 78) werden.

Digitized by Google

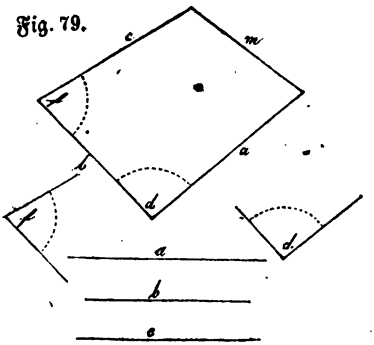
Fig. 78.



Auflöſ. Man mache $mn = a$, trage b von n aus nach np, zeichne mit c und d ein Dreieck mpq über pm (§. 32. 1.), ziehe qr parallel zu mn und nr parallel zu pq, ſo iſt $mnrq$ das verlangte Paralleltrapez.

19) Von einem unregelmäßigen Viereck (Trapez) ſind drei Seiten a, b, c (Fig. 79) und die zwei von ihnen eingeſchloſſenen Winkel d und f gegeben, daſſelbe zu conſtruiren.

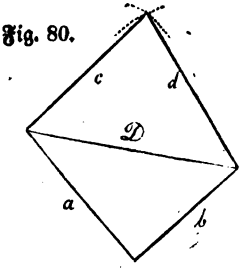
Fig. 79.

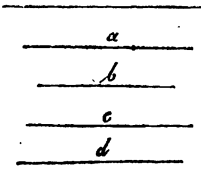


Auflöſ. Trage b am Endpunkte von a unter dem Winkel d an, ebenſo Linie c unter dem Winkel f am Endpunkte von b und verbinde die Endpunkte von a und c durch die Linie m.

20) Man hat die vier Seiten a, b, c und d (Fig. 80) eines Trapezes und eine Diagonale D gemeſſen; wie wird daſſelbe aus dieſen Stücken gezeichnet?

Fig. 80.





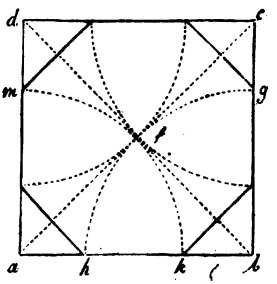
Auflöſ. Man beſchreibe über die Diagonale D auf der einen Seite mit a und b und auf der andern Seite mit c und d Dreiecke, ſo bilden dieſe zuſammen das Viereck.

Digitized by Google

D. Aufgaben über die regelmäßigen Vielecke.

21) In ein Quadrat ein regelmäßiges Achteck zu construiren.

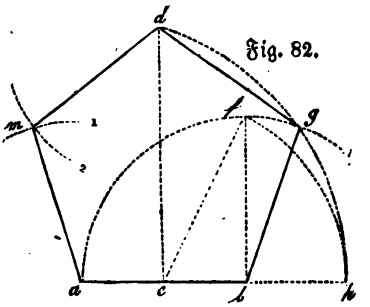
Fig. 81.



Auflös. *abcd* (Fig. 81) sei das Quadrat. Ziehe die Diagonalen *ac* und *bd* und beschreibe von den vier Eckpunkten des Quadrats aus die Bogen *hfg*, *kfm* u. s. w., so sind die Durchschnittspunkte derselben mit den Quadratseiten, also *h*, *g*, *k*, *m* u. s. w., die Eckpunkte des Achtecks.

22) Ueber eine gegebene Linie *ab* (Fig. 82) ein regelmäßiges Fünfeck zu zeichnen.

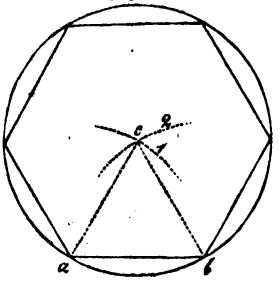
Fig. 82.



Auflös. Man errichte im Halbirungspunkte *c* und im Endpunkte *b* die Senkrechten *cd* und *bf*, beschreibe von *b* aus den Bogen *ag*, ziehe *fc* und von *c* aus mit *cf* den Bogen *fh* und von *a* aus mit *ah* den Bogen *hgd* so sind die Durchschnittspunkte mit dem Bogen *afg* und mit der Senkrechten *cd*, also *g* und *d* Eckpunkte des Fünfecks und *bg* und *gd* zwei Seiten desselben Beschreibt man nun mit *ab* von *a* und *d* aus die Bogen 1 und 2, so erhält man *m* als den fünften Eckpunkt.

23) Ueber eine gegebene Linie *ab* (Fig. 83) ein Sechseck zu zeichnen.

Fig. 83.

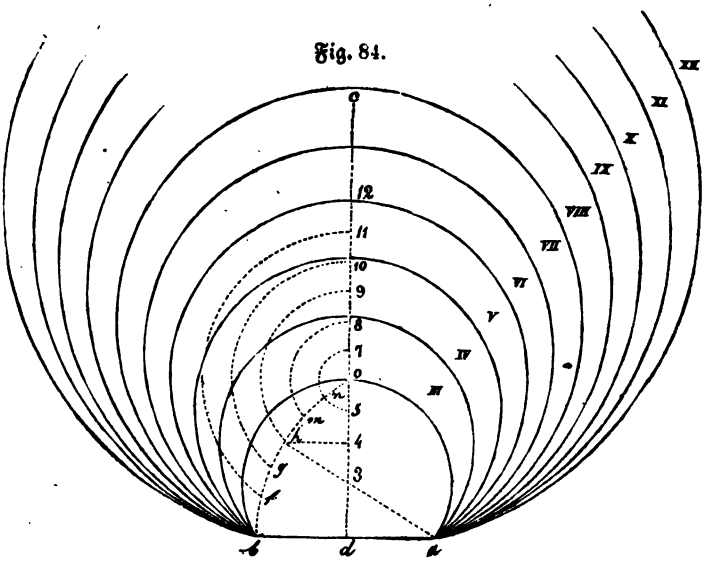


Auflös. Man beschreibe mit *ab* von *a* und *b* aus die Bogen 1 und 2, und von *c* aus mit *ca* den Kreis, so läßt sich *ab* in der Peripherie desselben sechsmal herumtragen.

Digitized by Google

24) Eine Linie *ab* (Fig. 84) ist gegeben, man soll über dieselbe ein regelmäßiges Drei- Vier- Fünfeck u. s. w., bis zu einem Zwölfeck construiren.

Fig. 84.



Auflös. Halbire die Linie *ab* durch eine Senkrechte *cd*, beschreibe von *a* aus mit *ab* den Bogen *bAo* und theile diesen in 6 gleiche Theile. Zieht man nun von dem dritten Theilpunkte A nach *a*, und nimmt den Durchschnittspunkt 3 dieser Verbindungslinie mit der Senkrechten *cd* als Mittelpunkt eines Kreises III an, welcher durch die Endpunkte *a* und *b* geht, so läßt sich in dessen Peripherie *ab* 3 mal auftragen und man erhält das regelmäßige Dreieck. Zieht man durch *h* eine Parallele zu *ab*, bis sie die Senkrechte *cd* in 4 trifft, und nimmt diesen Punkt als Mittelpunkt eines Kreises IV an, welcher durch *a* und *b* geht, so kann *ab* in dessen Umfang 4 mal aufgetragen werden und man findet das regelmäßige Viereck. Wird die Entfernung *on* von *o* aus nach *o*5 getragen, so ist 5 der Mittelpunkt für einen Kreis V durch *a* und *b* gehend, in dessen Peripherie *ab* fünfmal enthalten ist; folglich ist auch das regelmäßige Fünfeck gefunden. Für den durch *a* und *b* gehenden Kreis VI, in dessen Umfang *ab* 6 mal aufgeht, ist *o* der Mittelpunkt. Trägt man *on* von *o* aus aufwärts nach *o* 7, so ist 7 der Mittelpunkt für den Kreis VII, in welchen sich das Siebeneck zeichnen läßt. Fährt man nun so fort, von *o* aus die Stücke *om*, *ok*, *og*, *of*, *oh* nach *o*8, *o*9, *o*10, *o*11 und *o*12 zu tragen, so erhält man der Reihe nach die Punkte 8, 9, 10, 11 und 12 als Mittel-

Digitized by Google

punkte für Kreise, welche, wenn sie durch die Endpunkte a und b gehen, die Eigenschaft haben, daß ab beziehungsweise 8, 9, 10, 11 und 12 mal in der Peripherie aufgeht.

E. Aufgaben aus der Kreislehre.

25) Den Mittelpunkt eines Kreisbogens oder eines ganzen Kreises zu finden.

Auflös. Ziehe irgend 2 Sehnen ab und df (Fig. 85) und errichte im Mittelpunkte derselben Senkrechte, so ist der Durchschnittspunkt c dieser der gesuchte Mittelpunkt.

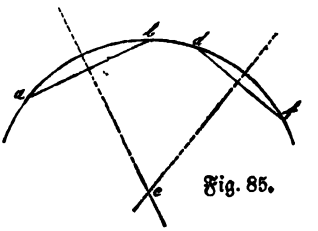


Fig. 85.

26) Einen Kreis mit gegebenem Halbmesser r (Fig. 86) zu zeichnen, welcher durch 2 bestimmte Punkte a und b geht.

Auflös. Beschreibe von a und b aus mit der Zirkelöffnung $= r$ die Bogen 1 und 2, so ist ihr Durchschnittspunkt c der Mittelpunkt des zu suchenden Kreises.

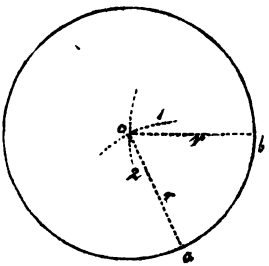


Fig. 86.

27) Einen Kreis zu zeichnen, welcher durch die 3 Punkte a, b und c (Fig. 87), oder was dasselbe ist, durch die drei Eckpunkte eines Dreiecks abc geht.

Auflös. Betrachte ab und bc als Sehnen des zu suchenden Kreises und verfahre wie in Aufg. 25.

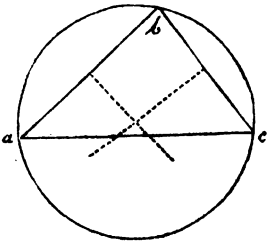


Fig. 87.

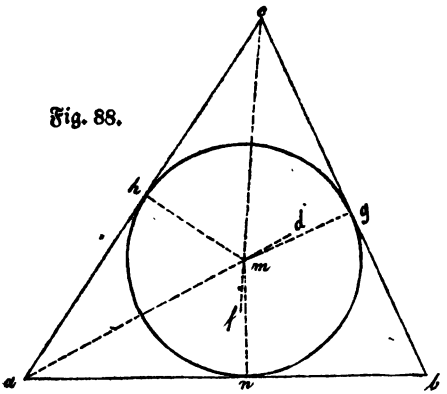
Digitized by Google

28) In ein Quadrat einen Kreis zu zeichnen, welcher die 4 Seiten berührt.

Auflöſ. Die Mittelpunkte der Seiten ſind die Berührungspunkte und der Durchſchnittspunkt der Verbindungslinien je zweier gegenüberliegenden Berührungspunkte iſt der Mittelpunkt.

29) In ein Dreieck einen Kreis zu zeichnen, welcher die 3 Seiten berührt.

Fig. 88.



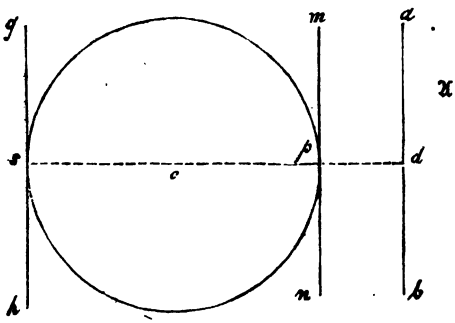
Auflöſ. *abc* (Fig. 88) ſei das Dreieck. Halbire irgend 2 Winkel deſſelben z. B. *a* und *c* durch die Linien *ad* und *cf* (Aufg. 8), ſo iſt ihr Durchſchnittspunkt *m* der Mittelpunkt, und wenn *mh*, *mg* und *mn* beziehungsweiſe ſenkrecht auf *ac*, *bc* und *ab* gezogen werden, ſo erhält man *h*, *g* und *n* als die Berührungspunkte.

30) Einen Kreis zu zeichnen, welcher durch die vier Eckpunkte eines Rechtecks geht.

Auflöſ. Der Durchſchnittspunkt der beiden Diagonalen iſt der Mittelpunkt.

31) Eine Linie zu ziehen, welche einen Kreis in einem gegebenen Punkte *p* (Fig. 89) berührt.

Fig. 89.



Auflöſ. Ziehe einen Radius *cp* nach *p* und errichte im Endpunkte *p* eine Senkrechte *mn* (§. 32. 4), ſo iſt dies die Tangente.

Digitized by Google

32) Von einem außerhalb der Peripherie eines Kreises liegenden Punkte aus, zwei Tangenten an diesen zu ziehen.

Auflös. p (Fig. 90) sei der Punkt, c der Mittelpunkt des Kreises. Beschreibe mit pc den Bogen 1 von p aus, durchschneide diesen von c aus mit dem Durchmesser mn durch die Bogen 2 in d und f, ziehe dc und fc, so sind x und y die Berührungspunkte und px und py die 2 Tangenten.

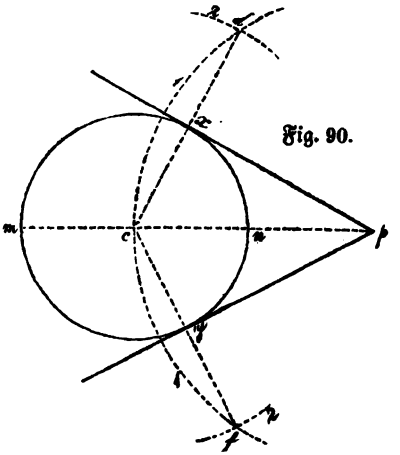


Fig. 90.

33) Parallel mit einer der Richtung nach gegebenen Linie ab (Fig. 89) eine Tangente an den Kreis zu ziehen.

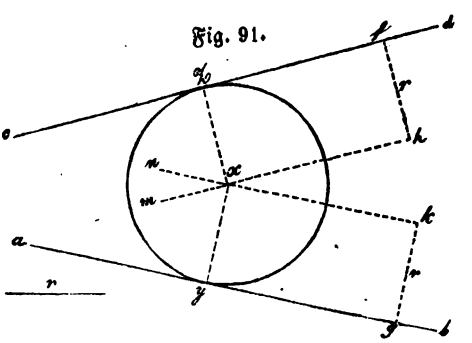
Auflös. Errichte vom Mittelpunkte des Kreises c aus eine Senkrechte cd auf ab, so ist der Durchschnittspunkt p der Berührungspunkt und wenn mn parallel zu ab in p gezogen wird, dies die Tangente.

Da die Senkrechte cd in der Verlängerung den Kreis nochmals in s trifft, so ist noch eine zweite Tangente gh möglich, welche der Bedingung entspricht.

34) Zwei nicht parallele Linien ab und cd (Fig. 91) sind gegeben, einen Kreis mit bestimmtem Radius r zu zeichnen, welcher beide berührt.

Auflös. Errichte in beliebigen Punkten f und g der Linien beziehungsweise die Senkrechten fh und gk und mache diese gleich der gegebenen Länge von r, ziehe hm # zu dc und kn # zu ba,

Fig. 91.



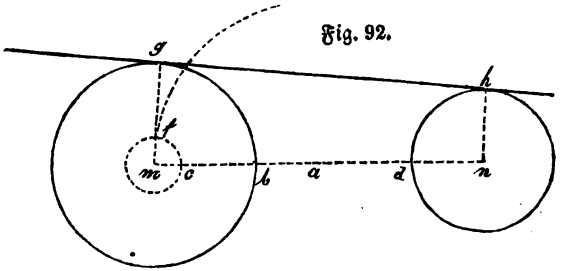
Digitized by Google

so ist x der Mittelpunkt und wenn xz senkrecht auf cd und xy senkrecht auf ab gefällt werden, ergeben sich z und y als die Berührungspunkte.

Anmerkung. Schneiden sich die beiden Schenkeln in Aufgabe 8 nicht unmittelbar, wie z. B. ab und cd in vorliegendem Falle, und der Winkel, welchen sie bilden, soll dennoch halbirt werden; so construire man, wie eben gezeigt wurde, den $\sphericalangle hxk$, indem man r beliebig annimmt, suche die Halbirungslinie dieses Winkels nach Aufg. 8, so ist diese zugleich die verlangte.

35) **An zwei Kreise (Fig. 92) eine gemeinschaftliche Tangente zu ziehen, welche die Verbindungslinie mn der Mittelpunkte nicht durchschneidet.**

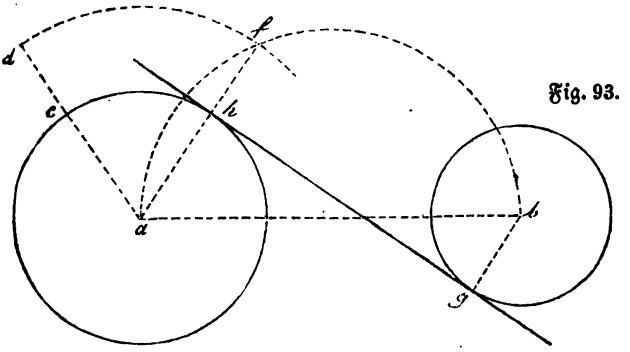
Fig. 92.



Auflös. Trage den Halbmesser des kleineren Kreises (nd) nach bc und zeichne mit dem Reste mc von m aus einen Kreis; durchschneide diesen vom Mittelpunkt a der Linie mn aus mit am in f, ziehe durch m und f eine Linie mg und hiermit nh parallel, so sind g und h die beiden Berührungspunkte.

36) **Eine gemeinschaftliche Tangente an 2 gegebene Kreise (Fig. 93.) ziehen, welche die Verbindungslinie ab der Mittelpunkte durchschneidet.**

Fig. 93.



Digitized by Google

Auflöſ. Beſchreibe über ab einen Halbkreis, ziehe von a aus eine beliebige Linie ad, mache $cd =$ dem Halbmeſſer des kleineren Kreiſes, beſchreibe von a aus mit ad einen Bogen df bis zum Durchſchnitt mit dem Halbkreiſe in f, ziehe af, und bg parallel zu af, ſo ſind h und g die Berührungspunkte und hg iſt die Tangente.

37) In der Peripherie eines Kreiſes c (Fig. 94), iſt ein Punkt p gegeben, man ſoll einen zweiten Kreis mit dem Halbmeſſer $= r$ zeichnen, welcher den erſten in p berührt.

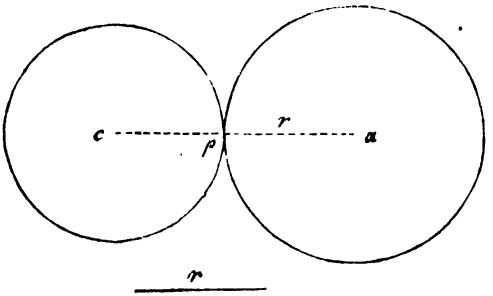


Fig. 94.

Auflöſ. Ziehe den Halbmeſſer cp und trage r in der Verlängerung deſſelben nach pa, ſo iſt a der Mittelpunkt des zu ſuchenden Kreiſes.

38) Einen Kreis mit beſtimmtem Halbmeſſer r (Fig 95) zu zeichnen, welcher 2 gegebene Kreiſe a und b ausſchließend berührt.

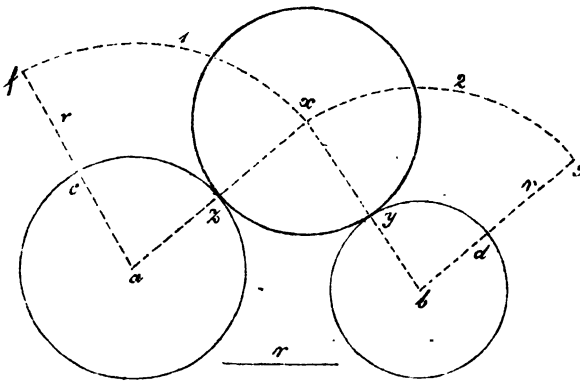


Fig. 95.

Auflöſ. Ziehe beliebige Radien ac und bd, trage auf der Verlängerung derſelben r von der Peripherie aus ab, alſo nach cf und dg, beſchreibe von a aus den Bogen 1 und von b aus den Bogen 2, ſo iſt der Durchſchnittspunkt x beider Bogen

Digitized by Google

der Mittelpunkt und werden $x\,a$ und $x\,b$ gezogen, so sind z und y die Berührungspunkte des zu suchenden Kreises.

39) Die Richtung einer Linie und ein Punkt außerhalb dieser sind gegeben, mit bestimmtem Radius einen Kreis zu zeichnen, welcher die gerade Linie berührt und durch den Punkt geht.

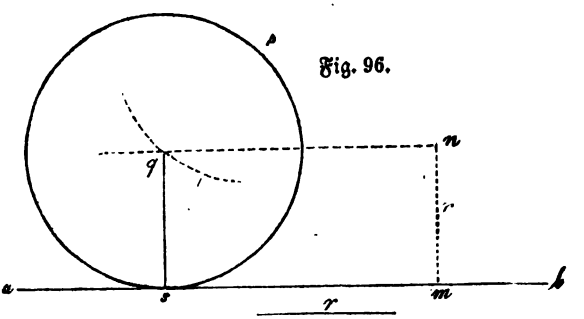


Fig. 96.

Auflös. $a\,b$ (Fig. 96) sei die Richtung der Linie, p der Punkt und r der Halbmesser.

Errichte in irgend einem Punkte m von $a\,b$ eine Senkrechte $m\,n = r$, ziehe $n\,q$ parallel zu $a\,b$, beschreibe von p aus mit r einen Bogen 1, so ist der Durchschnittspunkt q desselben mit der Parallelen $n\,q$ der Mittelpunkt und wenn $q\,s$ senkrecht auf $a\,b$ gezogen wird, s der Berührungspunkt des gesuchten Kreises.

40) Ein Kreis c (Fig. 97) und die Richtung $a\,b$ einer Geraden außerhalb desselben, sind gegeben, man soll mit der Linie r als Halbmesser einen zweiten Kreis zeichnen, welcher beide berührt.

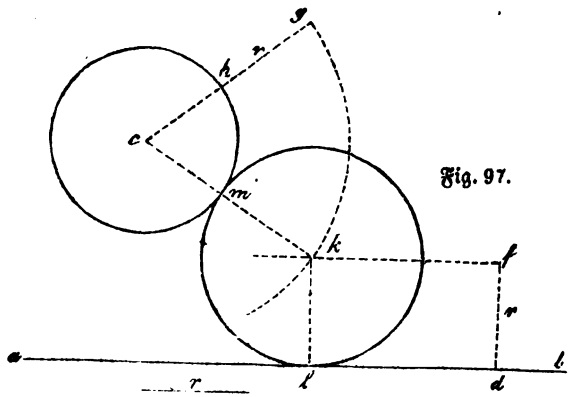


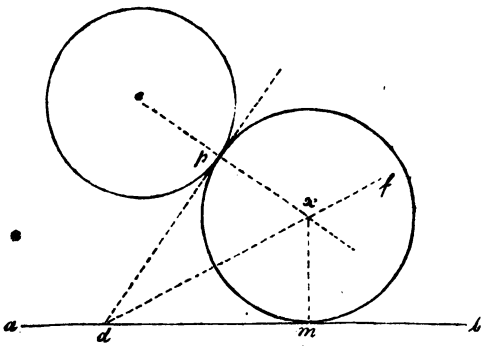
Fig. 97.

Digitized by Google

Auflöſ. Errichte in irgend einem Punkte d der Linie ab eine Senkrechte $df = r$, trage auch r auf der Verlängerung eines Halbmeſſers ch nach hg, beſchreibe von c aus mit cg den Bogen gk und ziehe $fk \parallel$ zu ab, ſo iſt der Durchſchnittspunkt k der Mittelpunkt und wenn man von k nach c und kl ſenkrecht auf ab zieht, ſo ergeben ſich m und l als die Berührungspunkte.

41) Ein Kreis c und eine gerade Linie ab (Fig. 98) ſind gegeben, einen zweiten Kreis zu conſtruiren, welcher den erſten in dem Punkte p und die gerade Linie berührt.

Fig. 98.



Auflöſ. Ziehe den Halbmeſſer cp, errichte pd ſenkrecht auf cp, halbire den Winkel pdb (Aufg. 8), ſo iſt der Durchſchnittspunkt x der Halbirungslinie df mit der Verlängerung des Halbmeſſers cp, der Mittelpunkt und wenn xm ſenkrecht auf ab gezogen wird, m der Berührungspunkt.

F. Verwandlung der Flächen.

42) Ein gegebenes Parallelogramm in ein Rechteck zu verwandeln.

Auflöſ. $abcd$ (Fig. 99) ſei das Parallelogramm. Errichte bf ſenkrecht auf ab und zeichne das Rechteck $abfg$, ſo iſt dies das geſuchte. (nach §. 44.)

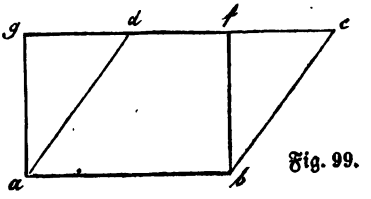
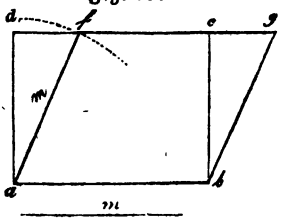


Fig. 99.

43) Ein Rechteck in ein Parallelogramm zu verwandeln, von welchem eine Seite gegeben iſt.

Digitized by Google

Fig. 100.



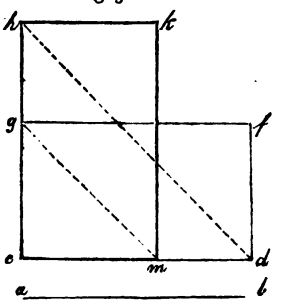
Auflöſ. *abcd* (Fig. 100) ſei das Rechteck und *m* die gegebene Seite. Trage *m* von *a* aus nach *af*, ziehe *bg* parallel mit *af*, ſo iſt *abgf* das Parallelogramm, denn es hat mit dem Rechteck gleiche Grundlinie und gleiche Höhe, alſo auch gleichen Inhalt.

44) Ein Rechteck *abcd* (Fig. 100) in ein Parallelogramm zu verwandeln, von welchem ein Winkel gegeben iſt.

Auflöſ. Trage den gegebenen Winkel in *a* an *ab* an (§. 32. 8), verlängere den Schenkel *af* bis er *dc* in *f* ſchneidet u. ſ. w., wie in 43.

45) Ein Rechteck in ein anderes zu verwandeln, von welchem eine Seite gegeben iſt.

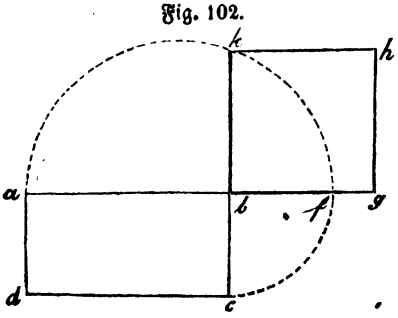
Fig. 101.



Auflöſ. *cdfg* (Fig. 101) ſei das Rechteck, *ab* die gegebene Seite. Verlängere *cg*, mache *ch* = *ab*, ziehe *hd*, dann *gm* parallel mit *hd*, ſo iſt das Rechteck über *hc* und *cm*, alſo *hcmk* das zu ſuchende.

46) Ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.

Fig. 102.



Auflöſ. *abcd* (Fig. 102) ſei das Rechteck. Schlage *bc* von *b* aus auf die Verlängerung von *ab* nach *bf*, beſchreibe über *af* den Halbkreis *akf*, verlängere *cb*, bis zum Durchſchnitt *k* mit *akf*, ſo iſt *bk* die Quadratſeite und *bghk* das Quadrat.

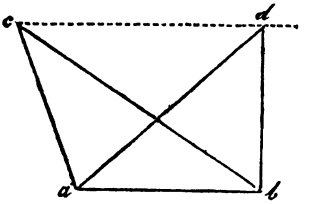
Digitized by Google

47) **Ein Parallelogramm in ein Quadrat zu verwandeln.**

Aufl. Verwandle dieses erst nach Aufgabe 42 in ein Rechteck und letzteres dann nach 46 in ein Quadrat.

48) **Ein gegebenes Dreieck (Fig. 103) in ein rechtwinkliges zu verwandeln.**

Fig 103.

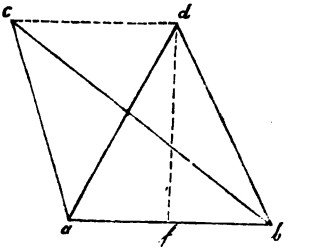


Auflös. Errichte auf ab im Endpunkte b die Senkrechte bd und ziehe c durch die zu ab Parallele cd, verbinde a mit d, so ist abd das rechtwinklige Dreieck.

Beide Dreiecke haben gleiche Grundlinie und gleiche Höhe, also auch gleichen Inhalt.

49) **Ein gegebenes Dreieck abc (Fig. 104) in ein gleichschenkliges zu verwandeln.**

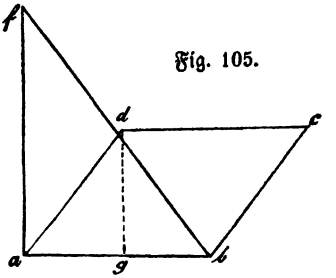
Fig. 104.



Auflös. Errichte in der Mitte von ab die Senkrechte fd, ziehe cd parallel zu ab, so ist adb das gleichschenklige Dreieck, welches mit dem Dreieck abc gleichen Inhalt hat.

50) **Ein Parallelogramm $abcd$ (Fig. 105) in ein rechtwinkliges Dreieck zu verwandeln.**

Fig. 105.



Auflös. Errichte über ab als Grundlinie ein rechtwinkliges Dreieck afb, dessen Cathete af gleich der doppelten Höhe dg ist.

Der Grund dieses Verfahrens ergibt sich aus §. 46.

51) **Ein Parallelogramm in ein gleichschenkliges Dreieck zu verwandeln.**

Auflös. Errichte im Mittelpunkt der Grundlinie des Parallelogramms eine Senkrechte gleich der doppelten Höhe desselben, so ist der Endpunkt der Scheitel des Dreiecks.

Digitized by Google

52) Ein Dreieck in ein Rechteck zu verwandeln.

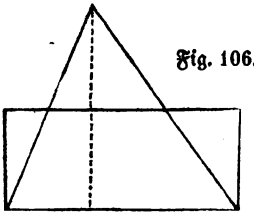


Fig. 106.

Auflöſ. Zeichne über der ganzen Grundlinie und halben Höhe (Fig. 106) oder auch über der halben Grundlinie und der ganzen Höhe des Dreiecks ein Rechteck, ſo iſt dies das zu findende. (Vergl. §. 46.)

53) Ein Dreieck in ein Quadrat zu verwandeln.

Auflöſ. Verwandle das Dreieck nach Aufg. 52 in ein Rechteck und dieſes nach Aufgabe 46 in ein Quadrat.

54) Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, von welchem die Höhe gegeben iſt.

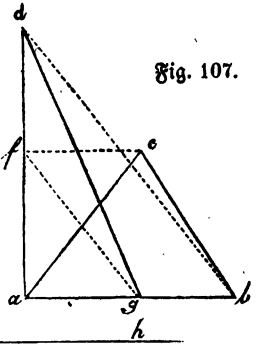


Fig. 107.

Auflöſ. abc (Fig. 107) ſei das gegebene Dreieck, h die Höhe. Errichte $ad = h$ ſenkrecht auf ab, ziehe db, $cf \parallel$ mit ab und fg parallel mit db, ſo iſt adg das Dreieck.

Dieſes rechtwinklige Dreieck adg kann nun leicht wieder nach den vorhergehenden Aufgaben in andere beſondern Bedingungen entſprechende Dreiecke von dieſer Höhe h verwandelt werden.

55) Ein unregelmäßiges Viereck in ein Dreieck zu verwandeln.

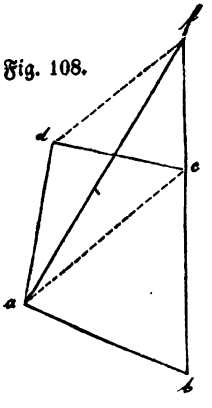


Fig. 108.

Auflöſ. $abcd$ (Fig. 108) ſei das Viereck, ziehe die Diagonale ac, dann df parallel zu ac bis zur Verlängerung von bc, ſo iſt abf das Dreieck, welches dem Viereck an Inhalt gleich iſt; denn das Dreieck acd, welches durch die Linie ac abgeſchnitten wurde, hat mit dem Dreieck acf, welches dafür angeſetzt worden iſt, gleiche Grundlinie und gleiche Höhe, alſo auch gleichen Inhalt.

Digitized by Google

56) Dieſes Viereck in ein Rechteck zu verwandeln.

Auflöſ. Verwandle daſſelbe zuerſt in ein Dreieck nach Aufg. 55 und dieſes in ein Rechteck nach 52.

57) Daſſelbe Viereck *abcd* (Fig. 108) in ein Quadrat zu verwandeln.

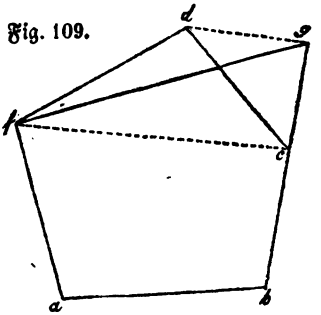
Auflöſ. Verwandle das in 56 gefundene Rechteck nach 46 in ein Quadrat.

Auf ähnliche Weiſe läßt ſich dieſes Viereck in andere, gegebenen Bedingungen entſprechende Parallelogramme oder Dreiecke verwandeln.

58) Ein unregelmäßiges Fünfeck in ein Dreieck, Parallelogramm u. ſ. w. zu verwandeln.

Auflöſ. *abcdf* (Fig. 109) ſei das Fünfeck. Verwandle dieſes ähnlich wie in Aufg. 55 in das Viereck *abgf* und dieſes nach den vorhergehenden Aufgaben in die verlangte Figur.

Fig. 109.



59) Ein Vieleck in ein Dreieck zu verwandeln.

Auflöſ. Verwandle das Vieleck in ein anderes, welches eine Seite weniger hat (Aufg. 55 und 58), dieſes abermals in ein ſolches, das wieder eine Seite weniger hat u. ſ. f., bis man zuletzt ein Dreieck erhält.

60) Ein regelmäßiges Vieleck in ein Dreieck zu verwandeln.

Auflöſ. Zeichne ein Dreieck, deſſen Grundlinie ſo groß wie der Umfang des Vielecks und deſſen Höhe = dem Halbmeſſer des eingeſchriebenen Kreiſes iſt. (§. 61. a.)

61) Ein Quadrat zu zeichnen, welches doppelt ſo groß iſt, als ein gegebenes.

Auflöſ. Ziehe die Diagonale des Quadrats und zeichne hierüber ein Quadrat, ſo iſt dies das zu ſuchende. Warum?

62) Ein Quadrat zu conſtruiren, welches den 4fachen Inhalt eines gegebenen hat.

Auflöſ. Das Quadrat über der doppelten Seite des gegebenen iſt das verlangte. Warum?

Digitized by Google

63) Ein Quadrat zu zeichnen, welches so groß ist als 2 gegebene zusammen genommen, deren Seiten *a* und *b* sind.

Auflös. Beschreibe mit *a* und *b* als Catheten ein rechtwinkliges Dreieck, so ist das Quadrat über der Hypotenuse das zu suchende. (§. 48.)

64) Ein Quadrat zu zeichnen, welches halb so groß ist als ein gegebenes.

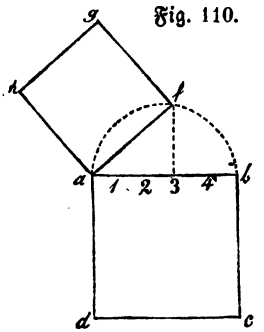
Auflös. Construire über der halben Diagonale ein Quadrat, so ist dies das verlangte. Warum?

65) Ein Quadrat zu construiren, welches gleich dem vierten Theil eines gegebenen ist.

Auflös. Das Quadrat über der Hälfte einer Seite des gegebenen Quadrats ist das zu findende. Warum?

66) Ein Quadrat zu zeichnen, welches $\frac{3}{4}$ eines gegebenen ist.

Fig. 110.



Auflös. *abcd* (Fig. 110) sei das gegebene Quadrat. Theile eine Seite z. B. *ab* in 5 gleiche Theile, beschreibe über *ab* einen Halbkreis, errichte im dritten Theilpunkte die Senkrechte *f3*, ziehe *af*, so ist dies die verlangte Quadratseite und *afgh* das Quadrat.

67) Einen Kreis in ein Dreieck zu verwandeln.

Auflös. Trage den Umfang nach der in §. 60 b. gegebenen Anmerkg. auf eine gerade Linie und zeichne hierüber ein Dreieck, dessen Höhe = dem Halbmesser des Kreises ist. Der Grund dieses Verfahrens ergibt sich aus §. 63. c. 1.

68) Einen Kreis annähernd in ein Quadrat zu verwandeln.

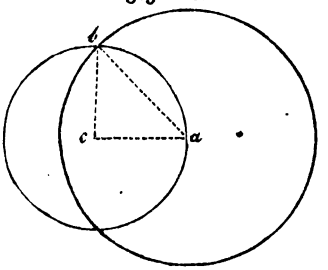
Auflös. 1) Verwandle das in Aufg. 67 gefundene Dreieck nach 53 in ein Quadrat.

2) Ziehe 2 auf einander senkrecht stehende Durchmesser, theile einen davon in 8 gleiche Theile und trage einen solchen Theil von der Peripherie aus auf die Verlängerungen der beiden Durchmesser ab, so bilden die vier dadurch entstehende Endpunkte die Eckpunkte des Quadrats.

69) Einen Kreis zu zeichnen, welcher den doppelten Inhalt eines gegebenen hat.

Digitized by Google

Fig. 111.



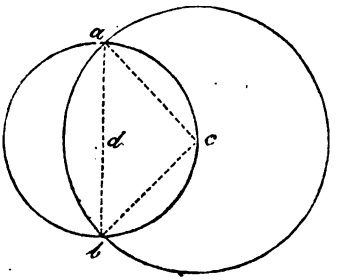
Auflöſ. c ſei der Mittelpunkt des gegebenen Kreiſes (Fig. 111), ziehe die beiden Radien ca und cb, ſo daß ſie bei c einen rechten Winkel bilden, verbinde a mit b, ſo iſt ab der Halbmeſſer des zu conſtruirenden Kreiſes.

70) Einen Kreis zu zeichnen, welcher den vierfachen Inhalt eines gegebenen hat.

Auflöſ. Der Durchmeſſer des gegebenen Kreiſes iſt zugleich der Halbmeſſer des zu findenden.

71) Einen Kreis zu conſtruiren, welcher halb ſo groß iſt als ein gegebener.

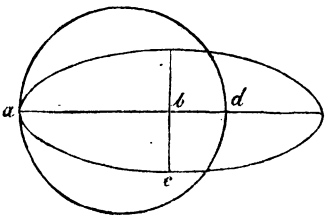
Fig. 112.



Auflöſ. Beſtimme ab (Fig. 112) wie in Aufgabe 69, halbire dieſe Linie in d, ſo iſt da der Halbmeſſer des zu findenden Kreiſes.

72) Eine Ellipſe (ſ. Aufg. 83) in einen Kreis zu verwandeln.

Fig. 113.



Auflöſ. Schlage die halbe kleine Achſe bc (Fig. 113) von b aus nach bd, ſo iſt der über ad als Durchmeſſer beſchriebene Kreis der zu ſuchende.

Digitized by Google

6. Construktion der wichtigsten krummen Linien.

73) Einen Korbbogen zu construiren, von welchem die Weite *ab* und die Höhe *cd* (Fig. 114) gegeben sind.

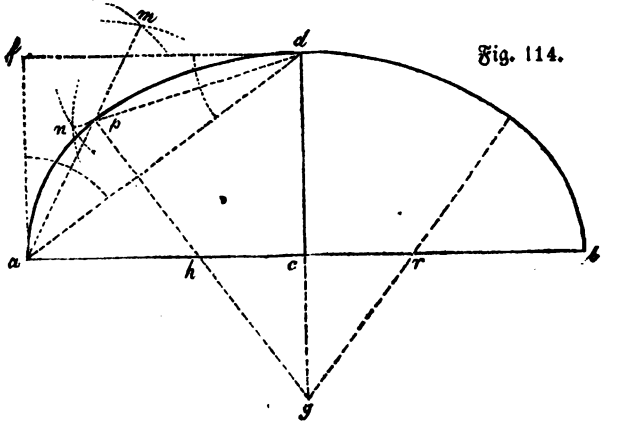


Fig. 114.

Erste Auflös. Construire über *ac* und *cd* das Rechteck *acdf*, ziehe die Diagonale *ad*, halbire die zwei Winkel *fad* und *adf* durch die Linien *am* und *dn* (Aufg. 8), errichte vom Durchschnittspunkt *p* aus eine Senkrechte auf *ad*, verlängere diese bis sie die Verlängerung von *dc* in *g* trifft, so sind *h* und *g* die Mittelpunkte der Bogen *ap* und *pd*, welche zusammen den halben Korbbogen bilden.

Trägt man *ch* nach *cr*, so sind *r* und *g* die Mittelpunkte für die zweite Hälfte.

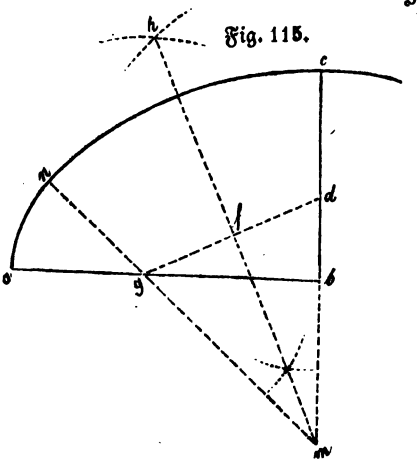


Fig. 115.

Zweite Auflös. Es sei *ab* Fig. 115) die halbe Weite und *bc* die Höhe. Man trage von *c* und *a* aus nach *cd* und *ag* beliebige aber gleiche Theile, ziehe die Linie *gd*, errichte in deren Mittelpunkt eine Senkrechte *hm* (Aufg. 4), bis sie die Verlängerung von *cb* in *m* trifft, ziehe von *m* durch *g* die Linie *mn*, so sind *g* und *m* die Mittelpunkte der Bogen *an* und *nc*.

Die zweite Hälfte wird ähnlich wie in der ersten Auflösung erhalten.

Digitized by Google

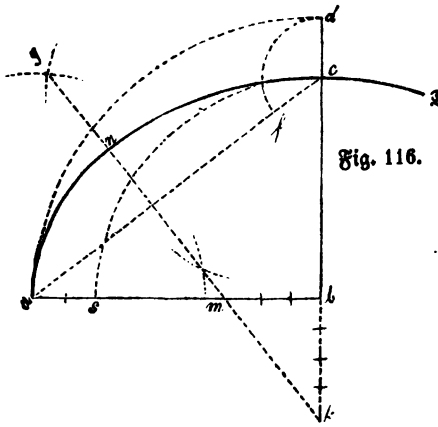


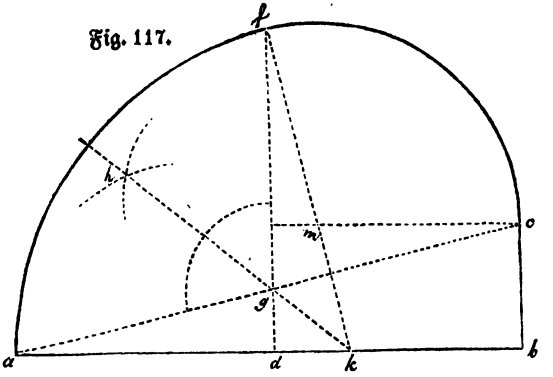
Fig. 116.

Dritte Auflöſ. Schlage *ba* (Fig. 116) nach *bd*, ziehe *ac* und trage auf dieſer von *c* aus *cd* nach *cf*; halbire *af* durch eine Senkrechte *gk* (Aufg. 4), bis ſie die Verlängerung von *cb* in *k* trifft; ſo ſind *k* und *m* die Mittelpunkte der Bogen *cn* und *na*.

Vierte Auflöſ. Schlage *bc* (Fig. 116) nach *bp*, theile *ap* in zwei gleiche Theile, trage einen ſolchen Theil von *b* aus 3 mal gegen *m* und 4 mal auf der Verlängerung von *cb* nach *k* ab, ſo ſind *m* und *k* die Mittelpunkte der Bogen *an* und *nc*.

74) Einen ſteigenden Bogen zu conſtruiren.

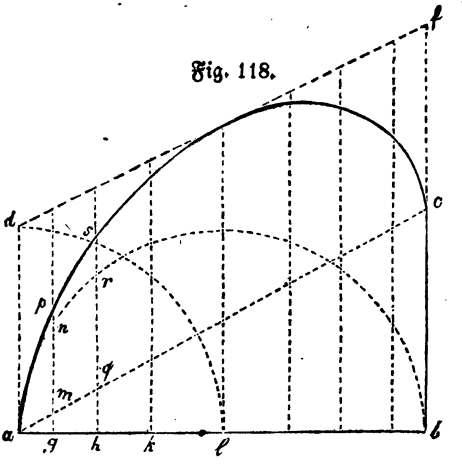
Fig. 117.



Erſte Auflöſ. *ab* (Fig 117) ſei die Weite und *bc* die Höhe. Ziehe *ac* und im Mittelpunkte *d* von *ab* die Senkrechte *df*, halbire den Winkel *fga* durch die Linie *hk* (Aufg. 8), ſo iſt *k* der Mittelpunkt für den Bogen *af*. Zieht man nun *fk* und durch *c* eine Parallele *cm* zu *ab*, bis ſie *fk* in *m* ſchneidet, ſo iſt *m* der Mittelpunkt für den Bogen *fe*.

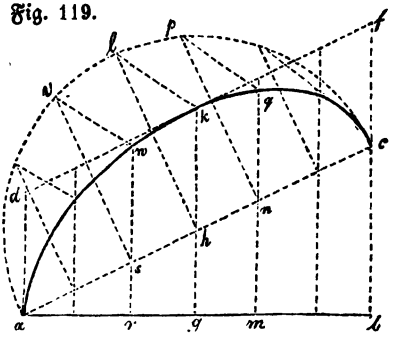
Digitized by Google

Fig. 118.



Zweite Auflöſ. Gegeben ſind die Weite *ab* (Fig. 118) und die Höhe *bc*. Errichte *ad* ſenkrecht auf *ab* und mache ſie = der Hälfte von *ab*, ziehe *df* parallel zu *ac*, bis ſie die Verlängerung von *bc* in *f* trifft; beſchreibe über *ab* einen Halbkreis und errichte in verſchiedenen Punkten *g*, *h*, *k*, *l* ꝛc. ꝛc. der Linie *ab* Perpendikel *gp*, *hs* u. ſ. w. und trage auf dieſen von dem jedesmaligen Durchſchnittspunkt mit *ac* aus, den Abſtand des Endpunktes auf *ab* von der Kreisperipherie, nach aufwärts, ſo daß alſo *gn* nach *mp*, *hr* nach *qs* ꝛc. ꝛc. kommt, ſo ſind *p*, *s* ꝛc. ꝛc. Punkte der krummen Linie, welche nun aus freier Hand durch dieſelben zu ziehen iſt.

Fig. 119.



Dritte Auflöſ. Die Weite *ab* (Fig. 119), die Höhe *bc* und eine Parallele *df* zu *ac* in beliebiger Entfernung ſind gegeben, der ſteigende Bogen ſoll die Linie *df* berühren.

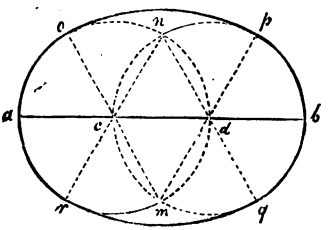
Ziehe *ad* ſenkrecht auf *ab* und verlängere *bc* bis zum Durchſchnitt mit *df*, beſchreibe über *ac* einen Halbkreis und fälle in beliebigen Punkten *r*, *g*, *m* ꝛc. ꝛc. der Linie *ab*, Perpendikel *rw*, *gk*, *mq* ꝛc. ꝛc.; in den Durchſchnittspunkten derſelben mit *ac*, ziehe man die Senkrechten *sv*, *hl*, *np* ꝛc. auf *ac*, verbinde den Punkt *l*, in welchem der in der Mitte von *ac* gefällte Perpendikel *hl* den Halbkreis ſchneidet, mit dem Punkte *k*, in dem die in der Mitte von *ab* gezogene Senkrechte *gk* die Parallele *df* trifft, durch Linie *lk* und ziehe hiermit durch die Punkte *v*, *p*, u. ſ. w. Parallelen, bis ſie die entſprechenden auf *ab* gefällten Perpendikel *rw*, *mq* ꝛc. ꝛc. ſchneiden, ſo ſind die Durchſchnittspunkte *w*, *k*, *q* ꝛc. ꝛc. Punkte der krummen Linie.

Digitized by Google

75) Ein Oval zu construiren, welches eine gegebene Länge hat.

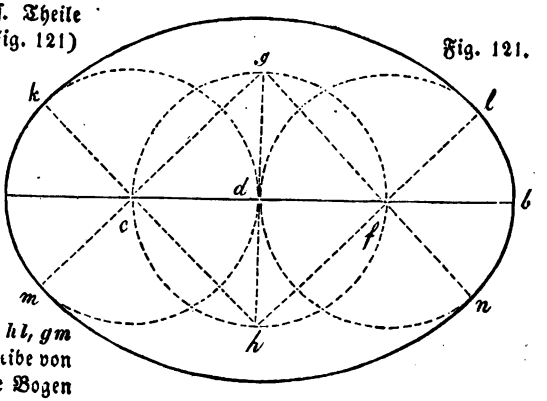
Erste Auflös. Theile die gegebene Länge *ab* (Fig. 120) in 3 gleiche Theile und beschreibe mit einem solchen Theil von den Theilpunkten *c* und *d* aus Kreise. Ziehe von den Punkten *m* und *n* aus durch *c* u. *d* die Linien *mo*, *mp*, *nr* und *nq* und beschreibe von *m* u. *n* aus die Bogen *op* u. *rq*, so bilden diese mit den Theilen *rao* u. *qbp* der beiden Kreise das verlangte Oval.

Fig. 120.



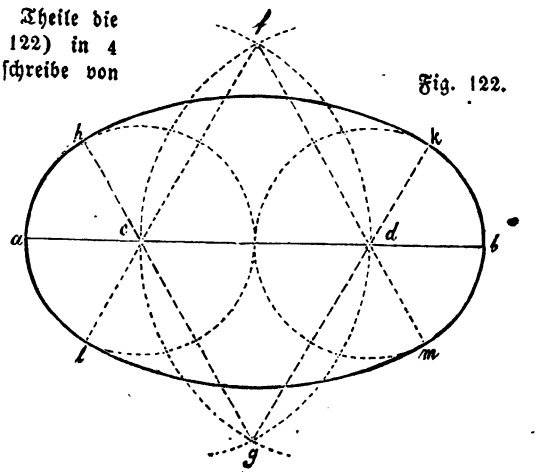
Zweite Auflös. Theile die Länge *ab* (Fig. 121) in 4 gleiche Theile und beschreibe mit einem solchen Theil von den Theilpunkten *c d* und *f* aus Kreise, errichte *gh* senkrecht in der Mitte von *ab*, ziehe *hk*, *hl*, *gm* und *gn* und beschreibe von *h* und *g* aus die Bogen *kl* und *mn*.

Fig. 121.



Dritte Auflös. Theile die Länge *ab* (Fig. 122) in 4 gleiche Theile, beschreibe von den Theilpunkten *c* u. *d* aus mit einem solchen Theil, Kreise, u. mit der Zirkelöffnung *cd* die Bogen *fdg* und *fcg*, so sind ihre Durchschnittspunkte *f* u. *g* die Mittelpunkte für die Bogen *lm* u. *hk*.

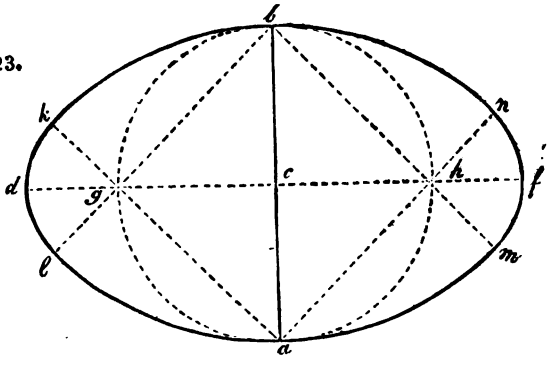
Fig. 122.



Digitized by Google

76) Ein Oval zu construiren, das eine gegebene Breite hat.

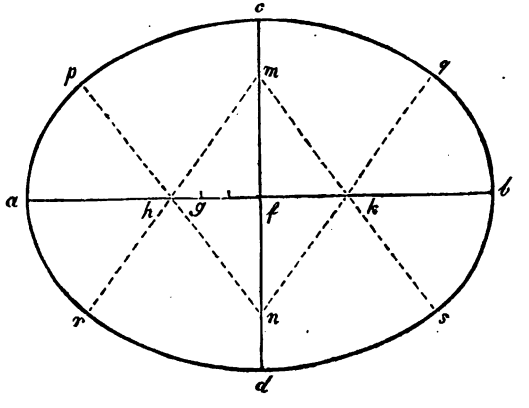
Fig. 123.



Auflös. Es sei ab (Fig. 123) die gegebene Breite. Halbire diese in c, errichte durch diesen Punkt gehend, df senkrecht auf ab, beschreibe von c aus mit ca einen Kreis, ziehe von a und b aus durch g und h die Linien ak, an, bl und bm; beschreibe mit ab von a aus den Bogen kbn und von b aus den Bogen lam und zuletzt von g und h aus mit gk und hn die Bogen kdl und nfm.

77) Ein Oval zu zeichnen, von welchem die Länge und Breite gegeben sind.

Fig. 124.

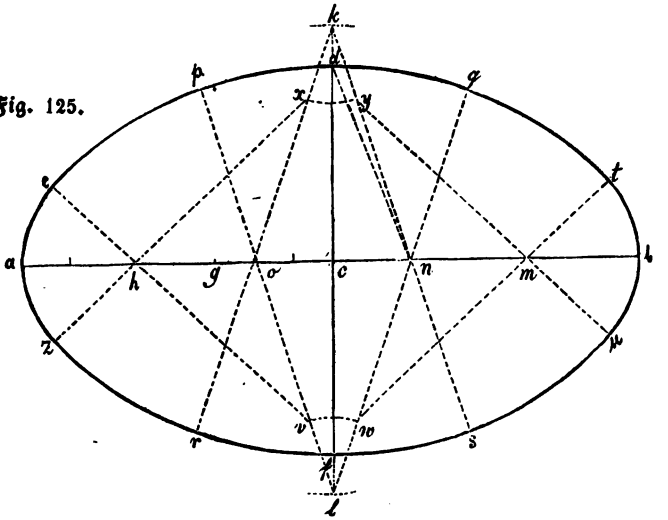


Erste Auflös. Trage ab (Fig. 124) gleich der gegebenen Länge auf und errichte im Mittelpunkte f eine Senkrechte cd,

Digitized by Google

mache $fc = fd$ gleich der halben gegebenen Breite. Schlage fc von a aus nach ag, theile gf in zwei gleiche Theile und trage einen solchen Theil von g nach h, mache $fk = fh$, $fn = fm$ gleich $2 . fg$, ziehe von n und m aus durch h und k die Linien np, nq, mr und ms. Beschreibe von n und m als Mittelpunkte aus mit nc die Bogen pcq und rds und von h und k aus mit hp und kq die Bogen par und qbs.

Fig. 125.

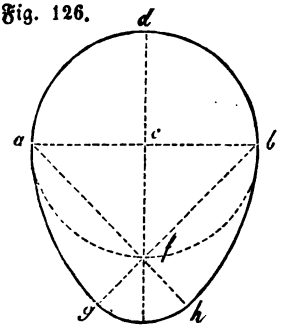


Zweite Auflös. Trage ab (Fig. 125) gleich der gegebenen Länge auf, errichte im Mittelpunkte c eine Senkrechte und schlage von c aus die halbe Breite auf- und abwärts nach cd und cf darauf ab. Mache $ag = cd$, theile gc in 3 gleiche Theile, trage 2 solcher Theile von g nach h und 6 derselben von c aufwärts nach k und abwärts nach l. Schlage ferner 2 der erwähnten Theile oder co nach cn, und ch nach cm; ziehe die Geraden lp, lq, kr und ks von l und k aus durch die Punkte o und n. Nehme nun co in Zirkel und trage dieses von l und k aus auf den zuletzt gezogenen Linien nach v, w, x und y; ziehe durch diese Punkte und h und m die Linien ve, wt, xz und yu. Beschreibe alsdann von h aus mit ha den Bogen zae, von m aus mit mb den Bogen tbu, dann von l aus mit ld den Bogen pdq, von k aus mit kf den Bogen rfs und endlich von v und w aus die Bogen ep und qt und von x und y aus die Bogen zr und su, so bilden diese Bogen zusammen das Oval.

Digitized by Google

78) Eine Eilinie zu construiren.

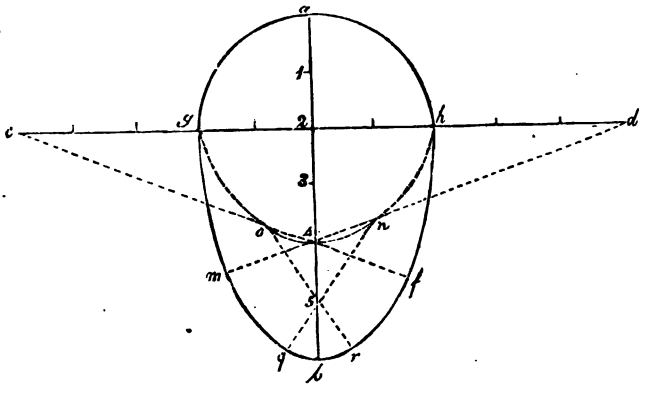
Fig. 126.



Auflöſ. Zeichne einen Kreis *adbf* (Fig. 126) und ziehe 2 auf einander ſenkrecht ſtehende Durchmeſſer *ab* und *df*, dann durch *b* und *f* die Linie *bg*, durch *a* und *f* die Linie *ah*; beſchreibe von *a* und *b* aus mit *ab* die Bogen *bh* und *ag* und von *f* aus den Bogen *gh*, ſo bilden dieſe Bogen mit dem Halbkreis *adb* zuſammen die Eilinie.

79) Eine Eilinie zu zeichnen, welche eine gegebene Länge hat.

Fig. 127.



Auflöſ. Theile die gegebene Länge *ab* (Fig. 127) in 6 gleiche Theile, errichte im Theilpunkt 2 die Linie *cd* ſenkrecht auf *ab* und beſchreibe von 2 aus mit zwei Theilen als Halbmeſſer einen Kreis *gah* 4. Trage von *g* gegen *c* und von *h* gegen *d* 3 ſolcher Theile ab, ziehe durch *c* und 4 die Linie *cf*, durch *d* und 4 die Linie *dm*, und dann von den Durchſchnittspunkten *n* und *o* dieſer Linien mit dem Kreiſe durch 5 die Geraden *nq* und *or*. Beſchreibe nun von *c* und *d* aus die Bogen *hf* und *gm* und von *o* und *n* aus mit *of* die Bogen *fr* und *mq* und endlich von 5 aus mit *b*5 den Bogen *qbr*.

Digitized by Google

80) Eine Eilinie zu construiren, von welcher die Länge und Breite gegeben sind.

Auflös. Trage die Länge cd auf (Fig. 128), mache $cf =$ der halben Breite, errichte in f die Linie ab senkrecht auf cd und beschreibe hierüber mit fc von f aus einen Halbkreis. Schlage von d aus fa nach dg; theile fg in 3 gleiche Theile und mache $gh = 2$ solcher Theile. Zeichne von f aus mit fh einen Halbkreis bis er die Verlängerung von ab in m und k trifft. Beschreibe dann von m und k aus, mit der Zirkelöffnung ma die Bogen an und bp und von h aus den Bogen ndp.

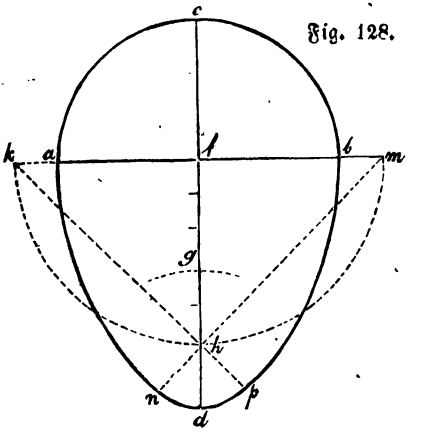
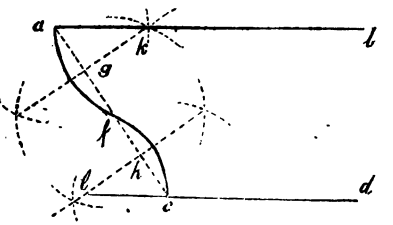


Fig. 128.

81) Eine Kehlleiste zu construiren.

Auflös. Ziehe ac (Fig. 129) halbire diese Linie in f und ebenso die Stücke af und fc in g und h, errichte in diesen Punkten Senkrechte gk und hl auf ac, so sind k und l die Mittelpunkte der Bogen af und fc.

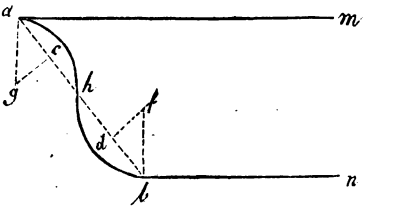
Fig. 129.



82) Eine Rinnleiste zu zeichnen.

Auflös. Ziehe ab (Fig. 130) halbire diese Linie in h, errichte in den Halbirungspunkten c und d der Stücke ah und hb Senkrechte cg und df auf ab, ebenso ag und bf senkrecht auf am und bn, so sind die Durchschnittspunkte g und f die Mittelpunkte der Bogen ah und hb.

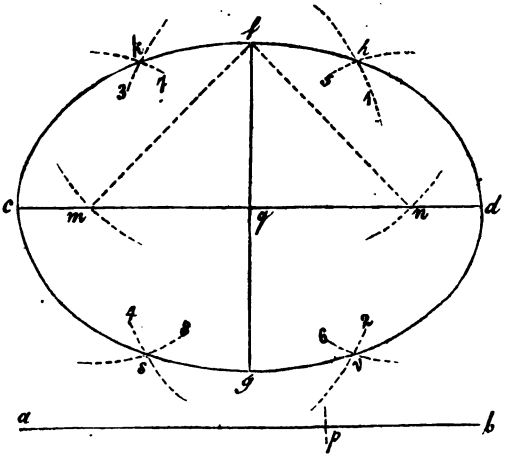
Fig. 130.



Digitized by Google

83) Die Länge und Breite einer Ellipse sind gegeben, dieselbe zu construiren.

Fig. 131.



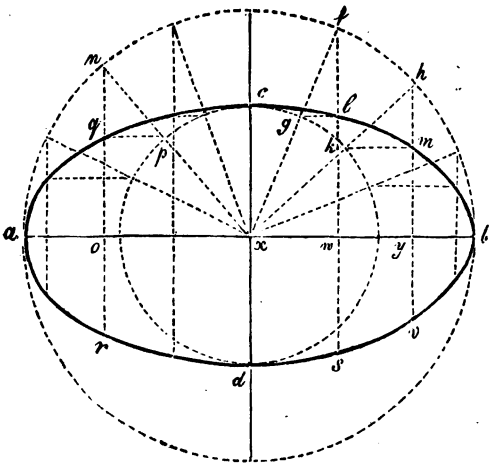
Erste Auflös. Trage cd (Fig. 131) gleich der Länge der Ellipse ab auf, errichte im Mittelpunkt q die Linie fg senkrecht auf cd und mache qf gleich qg gleich der halben Breite, so sind d, f, c, g die äußersten Punkte (Scheitel) der krummen Linie. Schlage hierauf cq von f aus nach fm und fn, nehme von der gegebenen Länge ab einen Theil, etwa ap in Zirkel und beschreibe von m aus die Bogen 1 und 2, von n aus die Bogen 3 und 4, und durchschneide diese mit dem noch übrigen Theil pb von n und m aus durch die Bogen 5, 6, 7 und 8, so sind die Durchschnittspunkte h, v, s, k vier weitere Punkte der Ellipse. Auf dieselbe Weise fahre man fort Punkte der Linie zu bestimmen, indem man neue Theile auf der Linie ab in den Zirkel nimmt, und verbinde zuletzt sämmtliche Punkte durch eine krumme Linie, um die Ellipse zu erhalten.

Anmerkung. Jeder Punkt dieser krummen Linie hat die Eigenschaft, daß seine Entfernungen von 2 festen Punkten zusammen immer eine gleiche Länge ab ausmachen. So muß z. B. $mf + fn = ab$ oder $= cd$ sein.

Die Linie cd nennt man die große, fg die kleine Achse und die festen Punkte m und n die Brennpunkte der Ellipse.

Digitized by Google

Fig. 132.



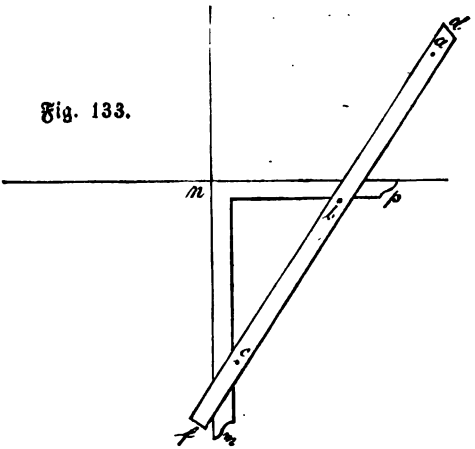
Zweite Auflöſ. Trage ab (Fig. 132) gleich der großen Achſe auf, errichte im Mittelpunkte x, $xc = xd =$ der Hälfte der kleinen Achſe ſenkrecht auf ab und beſchreibe mit xb und xc Kreiſe. Ziehe von x aus nach der Peripherie des größeren Kreiſes beliebige Linien xn, xf, xh ꝛc. ꝛc. und no, fw, hy ꝛc. ꝛc. ſenkrecht auf ab und von den Durchſchnittspunkten mit der Peripherie des kleineren aus die zu ab Parallelen pq, gl, km ꝛc. ꝛc., ſo ſind die Durchſchnittspunkte der zuſammengehörigen Senkrechten und Paralleten, alſo q, l, m ꝛc. ꝛc. Punkte der Ellipſe, durch welche dieſe aus freier Hand zu ziehen iſt. Um die untere Hälfte der krummen Linie zu finden, trage man oq nach or, wl nach ws, ym nach yv u. ſ. w.

Dritte Auflöſ. Ein in vielen Fällen ſehr zweckmäßiges mechaniſches Verfahren iſt folgendes:

Trage (Fig. 131) cd gleich der großen Achſe auf, errichte in der Mitte q die Senkrechte fg und mache $qf = qg =$ der halben kleinen Achſe. Nehme die halbe große Achſe cq in Zirkel und ſchlage ſie von f aus nach m und n, ſo ſind dies die Brennpunkte der Ellipſe. In dieſen Punkten ſchlage man Nadeln, Pfähle u. dgl. ein und befeſtige daran eine Schnur mfn ſo, daß wenn die beiden Theile mf und fn geſpannt werden, der Punkt f gerade auf den Endpunkt der kleinen Achſe fällt. Bewegt man nun längs der Schnur einen Stift f ſo hin, daß beide Theile immer geſpannt bleiben, ſo beſchreibt derſelbe die Ellipſe.

Digitized by Google

Fig. 133.



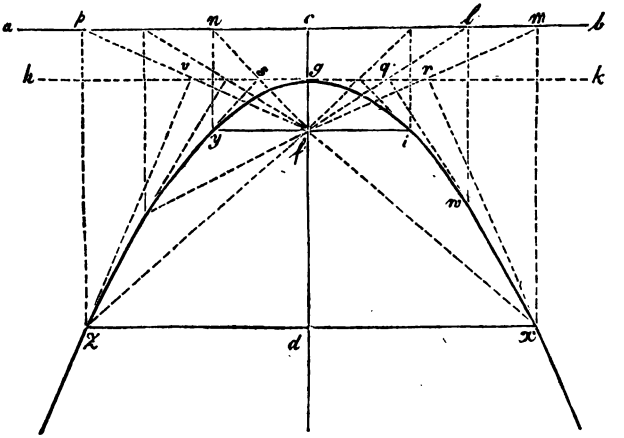
Vierte Auflöſ. Befeſtige in einen Stab *df* bei einem Punkte *a* (Fig. 133) einen ſpurlaſſenden Stift und trage von dieſem aus die halbe große Achſe nach *ac* und die halbe kleine Achſe nach *ab*. Schlägt man nun in den 2 gefundenen Punkten *b* u. *c* hölzerne oder eiſerne Stifte ein und bewegt den Stab *df* ſo, daß die Stifte *b* u. *c* immer an der innern Seite des rechten Winkels *mnp* anliegen; ſo beſchreibt der Stift bei *a* die verlangte Ellipſe.

Anmerkung. Um den Inhalt einer elliptiſchen Fläche zu finden, multiplicire man die Hälfte der großen Achſe mit der Hälfte der kleinen Achſe und das erhaltene Produkt nochmals mit 3, 14. Sind z. B. die beiden Achſen 12′ und 8′ lang, ſo iſt der

$$\text{Inhalt} = \frac{12}{2} \times \frac{8}{2} \times 3{,}14 = 75{,}36\,\square' = 75\,\square'\ 36\,\square''.$$

84) Eine Parabel zu conſtruiren.

Fig. 134.



Auflöſ. Ziehe eine Gerade *ab* (Fig. 134) und in irgend einem Punkte

c darauf die Senkrechte cd, nehme in dieser Linie einen Punkt f an, halbire fc in g und ziehe durch g parallel mit ab die Linie hk. Zieht man nun von f aus beliebige Linien fl, fm, fn, fp u. s. w. nach der Linie ab, errichtet in den Durchschnittspunkten q, r, s, v ꝛc. ꝛc. mit hk die Senkrechten qw, rx, sy, vz, auf die betreffenden Linien, und ebenso in den Punkten l, m, n, p ꝛc. ꝛc. Senkrechte auf ab, so geben die Durchschnittspunkte w, x, y, z ꝛc. ꝛc. je zweier zusammengehörigen Senkrechten, wie z. B. mx und rx, Punkte der Parabel.

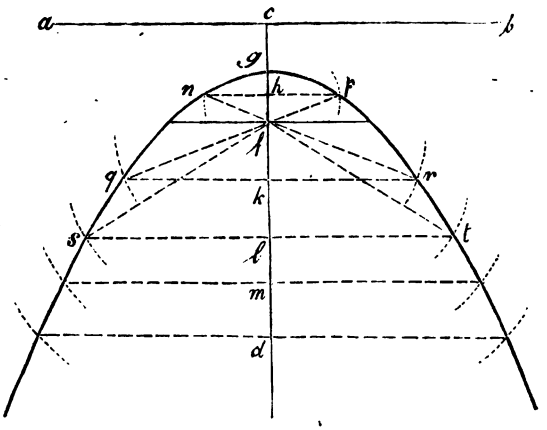
Anmerkung. Jeder Punkt dieser krummen Linie hat die Eigenschaft, daß er von einer gegebenen Geraden (ab) und einem außerhalb derselben liegenden gegebenen Punkte (f) gleich weit entfernt ist, so daß also $xm = xf, zp = zf$ u. s. w. sein muß.

Die Gerade ab heißt die Directrix, der feste Punkt f der Brennpunkt, die durch f parallel zu ab gehende Linie yi der Parameter, die Senkrechte cd die Achse und Punkt g der Scheitel der Parabel.

Um den Flächeninhalt eines Parabelsegments wie $zxwgyz$ zu finden, multiplicire man die Länge von zx mit der Länge von dg und das Produkt nochmals mit $\frac{2}{3}$.

85) Eine Parabel zu construiren, von welcher die Directrix und der Brennpunkt gegeben sind.

Fig. 135.

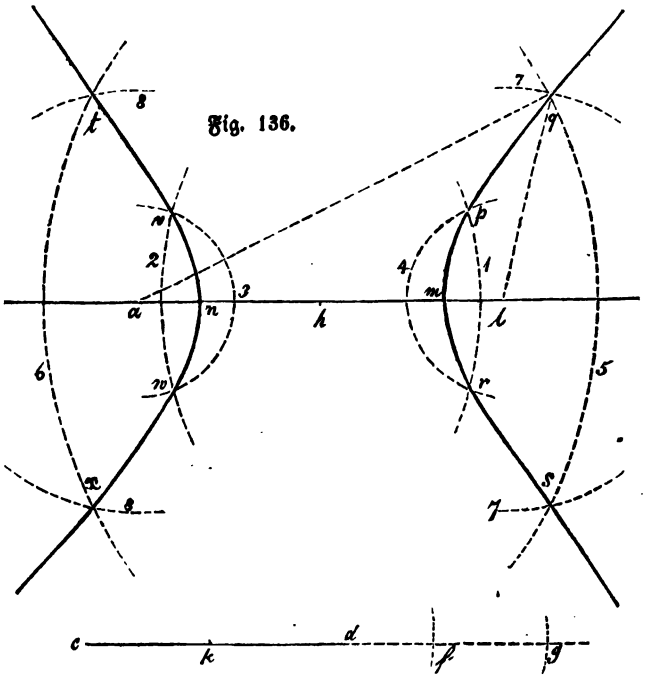


Auflös. ab (Fig. 135) sei die Directrix und f der Brennpunkt. Ziehe durch f die auf ab senkrecht stehende Linie cd, halbire cf in g, so ist dies der Scheitel. Nun führe man die Construktion entweder auf die in Aufg. 84 angegebene Weise aus, oder verfahre auf folgende Art:

Digitized by Google

Ziehe durch beliebige Punkte h, k, l ꝛc. der Linie cd parallele Linien np, qr, st ꝛc. zu ab, nehme ch, ck, cl ꝛc. in Zirkel und schlage diese Stücke nach der Reihe von f aus auf die betreffende Parallele ab, so daß also wird $ch = fp = fn$, $ck = fr = fq$, $cl = ft = fs$ ꝛc., so sind p, r, t, n, q ꝛc. Punkte der Parabel.

86) Eine Hyperbel zu construiren.



Auflöſ. Nehme irgend eine gerade Linie cd (Fig. 136) und 2 feſte Punkte a und b außerhalb derſelben an. Verlängere cd, faſſe ein beliebiges Stück cf in Zirkel und beſchreibe damit von a und b aus die Bogen 1 und 2, nehme dann den Ueberſchuß df in den Zirkel und beſchreibe die Bogen 3 und 4 von a und b aus; ſo ſind die Durchſchnittspunkte v, w, p und r Punkte der Hyperbel. Auf dieſelbe Weiſe erhält man noch mehr Punkte, indem man ein anderes Stück cg in den Zirkel nimmt, damit abermals von a und b aus die Bogen 5 und 6 zeichnet und dieſe mit dem Theil dg durchſchneidet (Bogen 7 und 8). Um die Durchſchnittspunkte n und m der krummen Linie mit ab d. h. die Scheitel zu finden, trage man

Digitized by Google

von dem Mittelpunkt h der Linie ab rechts und links die Hälfte von cd nach hn und hm.

Anmerkung. Die Hyperbel ist eine krumme Linie, in welcher der Unterschied der Entfernungen eines jeden Punktes von 2 festen Punkten (a und b) immer gleich einer unveränderlichen Geraden (cd) ist. So muß z. B. für den Punkt q die Linie aq weniger der Linie qb = der Linie cd sein.

Man nennt a und b die beiden **Brennpunkte**, ab die **Excentricität** und nm die erste Achse der Hyperbel.

Wie eine Hyperbel zu zeichnen ist, von welcher die Entfernung der beiden Brennpunkte und die erste Achse gegeben sind, folgt aus vorstehender Construktion.

87) Eine Schneckenlinie zu zeichnen

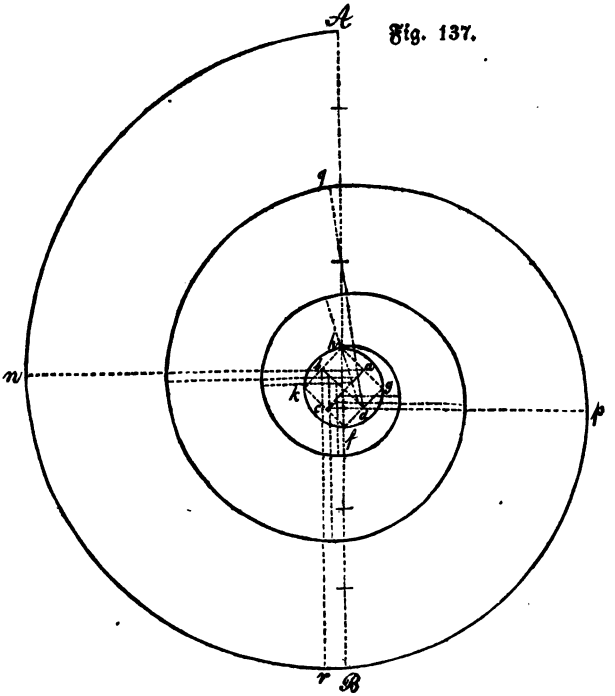
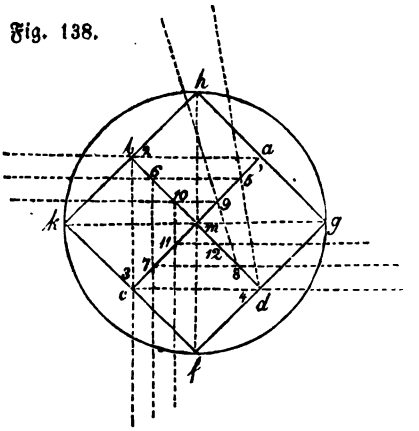


Fig. 137.

Auflös. AB (Fig. 137) sei die Höhe der Schnecke. Theile diese in 8 gleiche Theile und beschreibe über den vierten Theil als Durch-

Digitized by Google

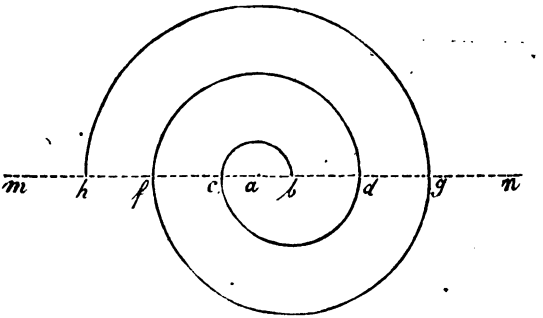
Fig. 138.



messer einen Kreis. Fig. 138 zeigt diesen Kreis in größerem Maaßstabe. Zeichne in den Kreis das Quadrat *f g h k* und verbinde die Halbirungspunkte *a*, *c* und *b*, *d* je zweier gegenüberliegenden Seiten. Theile jede dieser Verbindungslinien in 6 gleiche Theile, so sind die Theilpunkte die Mittelpunkte für die Kreisbogen, welche zusammen die Schnecke bilden. Die Bogen selbst erhält man auf folgende Weise: Setze in *a* ein, öffne den Zirkel bis *A* und beschreibe den Bogen *An* bis er die Horizontale *an* trifft, dann setze man im zweiten Punkt *b* ein, öffne den Zirkel bis *n* und zeichne den Bogen *nr* bis zur Senkrechten durch *c*, nun nehme man *cr* in Zirkel und beschreibe den Bogen *qr* bis zur Horizontalen *dp*; mit der Entfernung des Punktes *p* vom fünften Theilpunkte zeichne man den Bogen *pq* bis er die Linie, welche durch 4 und 5 gezogen wird in *q* trifft. Fährt man fort von den Theilpunkten aus nach der angegegebenen Reihenfolge Kreisbogen bis zu den betreffenden Geraden zu ziehen, so erhält man die verlangte Schneckenlinie.

88) Eine Spirallinie mit gleichen Windungsabständen zu construiren.

Fig. 139.



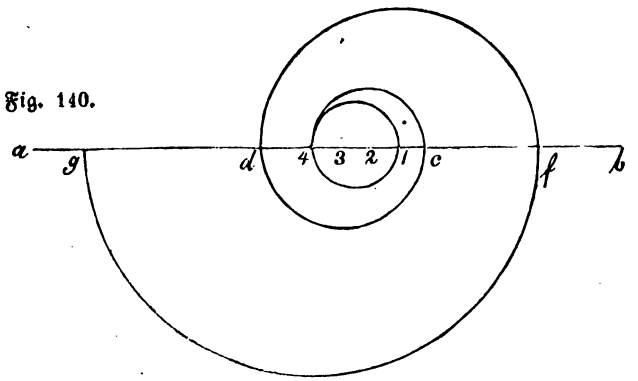
Auflös. Man nehme in einer geraden Linie *m n* (Fig. 139) 2 Punkte *a* und *b* an und beschreibe von *a* aus mit *a b* den Bogen *b c*, von *b* aus mit *b c* den Bogen *c d*, wieder von *a* aus den Bogen *d f* u. s. w. abwechselnd von *a* und *b* aus Bogen über und unterhalb der Linie *m n*.

Digitized by Google

Anmerkung. Ist der Windungsabstand gegeben, so sind *a* und *b* so anzunehmen, daß ihre Entfernung gleich der Hälfte des Windungsabstandes wird.

89) Man soll eine Spirallinie construiren, deren Windungsabstände um so größer werden, je weiter dieselben von dem Anfangspunkte entfernt sind.

Fig. 140.

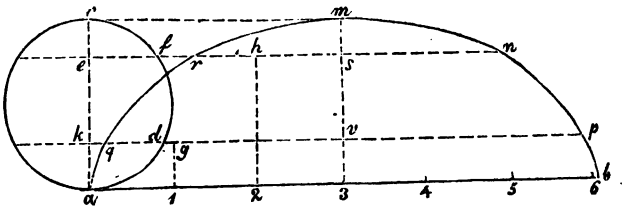


Aufl. Man trage auf einer geraden Linie *ab* (Fig. 140) drei gleiche Theile von 4 nach 1 und beschreibe über dieselben einen Kreis. Nun setze man in 2 ein und zeichne mit 24 den Halbkreis über *c* 4, dann von 3 aus mit *c* 3 den Bogen über *cd*, von 1 aus mit *d* 1 den Bogen über *df*; ferner von 4 aus mit *f* 4 den Bogen über *gf* u. s. w

90) Wenn ein Kreis auf einer geraden oder krummen Linie hinrollt, so beschreibt jeder Punkt in der Peripherie desselben eine krumme Linie, welche Radlinie oder Cycloide heißt.

Man soll nun diese krumme Linie für den Fall construiren, daß der Kreis auf einer geraden Linie sich bewegt.

Fig. 141.



Erste Auflös. Es sei *a* (Fig. 141) der Punkt in der Peripherie und *ab* die gerade Linie. Man theile die Peripherie des Kreises

Digitized by Google

in eine beliebige Anzahl gleicher Theile z. B. in 6, trage einen solchen Theil sechsmal von a aus auf ab ab, errichte in den Theilpunkten der Geraden Senkrechte und ziehe durch die der Kreisperipherie Parallelen zu ab, bis sie die zugehörigen Senkrechten in g, h, m treffen. Macht man nun $gq = dk$, $hr = fl$, so sind q, r und m Punkte der Cycloide. Wird sr nach sn, vq nach vp geschlagen, so erhält man n und p als Punkte der andern Hälfte.

Anmerkung. Die Construktion wird um so genauer, in je mehr Theile man die Peripherie des erzeugenden Kreises theilt.

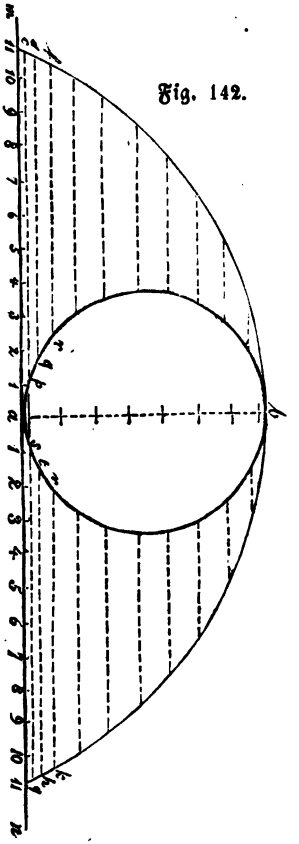


Fig. 142.

Zweite Auflös. ab sei der erzeugende Kreis. Man ziehe den Durchmesser ba, errichte hierauf in a die Linie mn senkrecht, theile ba in 7 gleiche Theile und trage von a aus gegen links und rechts 11 solcher Theile auf. Alsdann theile man die halbe Peripherie in 11 gleiche Theile und ziehe durch die Theilpunkte p, q, r u. s. w. die zu mn parallele Linien cg, dh u. s. f. Trägt man nun a 10 nach pc und sg, ag nach qd und fk, a 8 nach rf und vk, so sind 11, c, g, d, h, f, k, u. s. w. Punkte der Radlinie.

Digitized by Google

II. Geometrische Berechnungsaufgaben.

1) Drei Punkte liegen in gerader Linie. Der erste ist vom zweiten um $5^\circ\ 9'\ 8''$, der zweite vom dritten um $14^\circ\ 7''$ entfernt; wie groß ist die Entfernung des ersten und dritten Punktes?

Auflös. Addire beide Entfernungen, so folgt $20^\circ\ 5''$.

2) Um wie viel ist in vorhergehender Aufgabe der zweite Punkt vom dritten mehr entfernt als der erste vom zweiten.

Auflös. Durch Subtraktion erhält man $8^\circ\ 9''$.

3) Die Entfernung zweier Punkte beträgt $8^{\text{met.}}\ 5^{\text{d.m.}}\ 7^{\text{m.m.}}$, die zweier andern aber 5 mal so viel; wie groß ist letztere in französischem und neubadischem Maaße?

Auflös. Durch Multiplikation mit 5 erhält man $42^{\text{met.}}\ 5^{\text{d.m.}}\ 3^{\text{c.m.}}\ 5^{\text{m.m.}}$ oder nach §. 12 $141'\ 7''\ 8\frac{1}{2}'''$.

4) Zwei Linien sind $3^\circ\ 4'\ 8''$ und $217'\ 5''$ lang; wie viel mal ist die zweite größer als die erste?

Auflös. $2175'' : 348'' = 6\frac{1}{4}$ mal.

5) Zwei Winkel messen $48^\circ\ 35'\ 47''$ und $118^\circ\ 48'\ 54''$; wie groß ist die Summe beider?

Auflös. $167^\circ\ 24'\ 41''$.

6) Die drei Winkel eines jeden Dreiecks betragen zusammen 180°. Wenn man nun zwei Winkel eines solchen zu $45^\circ\ 58''$ und $37^\circ\ 36'\ 14''$ gemessen hat, wie groß ist dann der dritte?

Auflös. Addire die beiden gegebenen Winkel und ziehe die Summe von 180° ab. Man findet $97^\circ\ 22'\ 48''$.

7) Wenn ein Winkel von $42^\circ\ 27'\ 36''$ verdreifacht wird, wie viel mißt er alsdann?

Auflös. $127^\circ\ 22'\ 48''$.

8) Wie oft ist ein Winkel von $15^\circ\ 14'\ 36''$ in einem andern von $83^\circ\ 50'\ 18''$ enthalten?

Auflös. Drücke beide Winkel in Sekunden aus und dividire alsdann. Man erhält $301818'' : 54876'' = 5\frac{1}{2}$ mal.

9) Es besitzt Jemand ein Feld von 3 Mrg. 2 Vtl. $85\square^\circ\ 38\square'$ Inhalt und kauft dazu noch ein angrenzendes Stück von

Digitized by Google

1 Mrg. 65 □° 86 □′; wie groß sind beide zusammen in neubadischem und französischem Maaße ausgedrückt?

Auflös. Durch Addition findet man 4 Mrg. 3 Vtl. 51 □° 24 □′ oder (nach §. 30) 175 Are 61 □ met. 16 □ d m.

10) Um wie viel ist in vorhergehender Aufgabe das erste Feld größer als das zweite?

Auflös. Subtrahire, so folgt um 2 Mrg. 2 Vtl. 19 □° 52 □′.

11) Für eine gewisse Summe kaufte Jemand einen Acker von 3 Vtl. 47 □° 8 □′ Inhalt. Wenn er nun die vierfache Summe zum Ankaufe verwenden würde, wie viel Land von gleichem Werthe bekäme er in diesem Falle?

Auflös. 34708 □′ × 4 = 3 Mrg. 1 Vtl. 88 □° 32 □′.

12) Wie viel mal ist ein Feld von 2 Mrg. 3 Vtl. 89 □° 65 □′ Inhalt größer, als ein anderes, dessen Inhalt = 3 Vtl. 24 □° 45 □′ beträgt.

Auflös. Verwandle beide Werthe in □′ und dividire. Man bekommt 118965 □′ : 32445 □′ = $3\frac{2}{3}$ mal.

13) Ein Garten ist 16° 8″ lang und 12° 4′ breit, wie groß ist sein Flächeninhalt?

Auflös. Nach §. 34. a. = 160,8′ × 124′ = 199 □° 39 □′ 20 □″.

14) Wie viel Quadratfuß Bretter sind nothwendig, um ein Zimmer zu dielen, welches 24′ lang und 18′ breit ist?

Auflös. Inhalt = 24 × 18 = 432 □′.

15) Der Fußboden eines rechteckigen Zimmers von 18′ Länge und 24′ Breite soll mit Brettern belegt werden, von welchen jedes 12′ lang und 1,5′ breit ist; wie viel solcher sind zur Belegung erforderlich?

Auflös. Dividire mit dem Inhalte eines Brettes in den Inhalt des Bodens.

Inhalt des Bodens = 18 × 24 = 432 □′
Inhalt eines Brettes = 12 × 1,5 = 18 □′
folglich braucht man 432 : 18 = 24 Bretter.

16) Ein Acker, welcher 28° 6′ lang und halb so breit ist, soll mit Bäumen besetzt werden, wovon jedes Stück 24 kr. kostet. Wenn nun auf je 12 □′ ein Baum zu stehen kommt; wie viel

Digitized by Google

Bäume sind zur Besetzung erforderlich und was kosten dieselben?

Auflös. Inhalt = 286′ × 143′ = 40898 □′ (§. 34. a.)
folglich sind erforderlich 40898 : 12 = 3408 Bäume.
und diese kosten 3408 × ½ fl. = 1363 fl. 12 kr.

17) Ein Feld, welches die Form eines Rechtecks hat, nimmt einen Flächenraum von 8 Mrg. 48 □° 25 □′ ein und ist 35° 5′ lang, wie breit ist dasselbe?

Auflös. Nach §. 34. b. folgt die Breite = 324825 : 355 = 91° 5′.

18) Ein Stück Tuch von 48¼ Ellen Länge und 1¾ Ellen Breite hat wie viel Quadratfuß Flächeninhalt?

Auflös. 1 Elle = 2′, folglich 48¼ Elle = 97′ und 1¾ Elle = 3,5′,
folglich Inhalt = 339,5 □′.

19) Ein hölzerner Kasten soll innen mit Kupferblech beschlagen werden, wovon jeder Quadratfuß 1 fl. 12 kr. kostet. Wenn nun der Behälter 4½′ lang 3¼′ breit und 2¾′ hoch ist, wie theuer kommt das zur Beschlagung nöthige Kupferblech?

Auflös. Inhalt des Bodens = 4,5′ × 3,25′ = 14,625 □′
Inhalt der 4 Seitenwände = 2 . 4,5 × 2,75 + 2 . 3,25 . 2,75 =
42,625 □′,
folglich sind erforderlich 14,625 + 42,625 = 57,25 □′ Kupferblech
und diese kosten 57,25 × 1½ fl. = 68 fl. 42 kr.

20) Es besitzt Jemand einen Garten von 18° 5′ Länge und 12° 8′ Breite. Darin ist ein 6° 4′ langes und 4° 8′ breites Rechteck mit Kartoffeln angepflanzt und in der Mitte des Gartens durchkreuzen sich zwei mit den Seiten desselben gleichlaufende Wege von 4′ Breite; wie viel Land bleibt also noch zur Anpflanzung anderer Gewächse übrig?

Auflös. Rechne den Inhalt des Gartens und ziehe davon die Summe der Wege und des mit Kartoffeln bepflanzten Stückes ab.

Inhalt des Gartens = 128′ × 185′ = 23680 □′
Inhalt des bebauten Stückes = 64′ × 48′ = 3072 □′
= der Wege = 128′ × 4′ + 181′ × 4′ = 1236 □′
4308 □′
folglich bleiben noch zur Bebauung übrig 23680 □′ − 4308 □′
= 1 Vtl. 93 □° 72 □′.

21) Die Reparatur eines Zimmers von 34′ 6″ Länge, 21′ 4″ Breite und 12′ 5″ Höhe wird vorgenommen. Man zahlt

Digitized by Google

den Quadratschuh der zur Belegung des Bodens erforderlichen Dielen mit 8 kr. und den Quadratschuh des Anstrichs der Decke mit $\frac{1}{2}$ kr. Jedes Stück der zur Tapezierung der 4 Wände erforderlichen Tapeten ist 40′ lang und 2′ breit und kostet 24 kr. In dem Zimmer befinden sich 2 Thüren, jede 7′ hoch, 3,5′ breit, 3 Fenster von je 6′ Höhe und 3′ 6″ Breite und eine Lambris von 1′ 5″ Höhe. Um die Thüren auf beiden Seiten und die Lambris anzustreichen, zahlt man den Quadratschuh mit $2\frac{1}{2}$ kr. und für den Anstrich sämmtlicher Fenstern u. s. w., 2 fl. 24 kr. Wie hoch kommt die Herstellung dieses Zimmers?

Auflös. Inhalt des Bodens wie der Decke =
$34,6 \times 21,4' = 740,44 \square'$
Preis der Belegung des Bodens mit Dielen =
$740,44 \times 8$ kr. . . . . = 98 fl. 43 kr.
Preis des Anstrichs der Decke = $\frac{740,44}{2}$ kr. . = 6 fl. 10 ″
Inhalt der 4 Wände = $2 \times 34,6 \times 12,5 +$
$2 \times 21,4 \times 12,5 = 1400 \square'$
Inhalt der 2 Thüren = $2 \times 7 \times 3,5' = 49 \square'$
″ ″ 3 Fenster = $3 \times 6 \times 3,6' = 64,8 \square'$
″ ″ Lambris = $2 \times 34,6' \times 1,5' +$
$2 \times 21,4' \times 1,5' - 7 \times 1,5$ . . = 157,5 □′
zusammen 271,3 □′
folglich Inhalt der mit Tapeten zu bekleidenden
Wand = $1400 \square' - 271,3 \square' = 1128,7 \square'$
Inhalt eines Stückes Tapete = $40' \times 2' = 80 \square'$
also sind erforderlich $1128,7 : 80 = 14\frac{1}{10}$ Stück
diese kosten $14\frac{1}{10} \times \frac{1}{2}$ fl. oder . . . . 5 fl. 38 kr.
Preis des Anstrichs der Thüren $2 \times 49 \times 8$ kr. = 13 ″ 4 ″
″ ″ ″ ″ Lambris = $157,5 \times 8$ kr. = 21 ″ — ″
″ ″ ″ ″ Fenstern u. dgl. . . = 2 ″ 24 ″
Kosten der Reparatur also 146 fl. 59 kr.

22) Ein quadratförmiges Stück Feld hat eine Seite von 12° 5′; wie groß ist der Umfang und der Inhalt desselben?

Auflös. Umfang = $125 \times 4 = 50^0$
Inhalt nach §. 35a. = $125 \times 125 = 156 \square^0 25 \square'$.

23) Zur Besetzung des Umfangs eines quadratförmigen Ackers waren 168 Bäume nöthig, welche um 18′ von einander entfernt stehen. Wie groß ist der Umfang, eine Seite und der Inhalt dieses Ackers?

Digitized by Google

Auflös. In jeder Seite stehen 168 : 4 = 42 Bäume, folglich beträgt die Länge derselben 42 × 18 = 756′ und der ganze Umfang = 756 × 4 = 3024′ und der Inhalt = 756 × 756 = 571536 □′ oder 14 Mrg. 1 Vtl. 15 □° 36 □′.

24) Ein freier Platz, welcher ein Quadrat bildet, ist 32° 5′ lang. Wie hoch kommt die Ueberführung desselben mit Sand, wenn für eine Fuhre, mit welcher man 2½ Quadratruthen überführen kann, 24 kr. bezahlt wird?

Auflös. Inhalt des Platzes nach §. 36. a. = 325′ × 325′ = 105625 □′ folglich braucht man 105625 : 250 = 422,5 Fuhren und diese kosten 422½ × ¾ fl. = 169 fl.

25) Es kauft Jemand einen Acker, welcher 28° 5′ lang und ebenso breit ist, und bezahlt für die Quadratruthe 1 fl. 48 kr. Einige Zeit nachher verkauft er ihn wieder und erhält für je 2½ Quadratruthen 5 fl. 48 kr. Wie viel wurde bei diesem Verkaufe gewonnen oder verloren?

Auflös. Der Acker bildet ein Quadrat, folglich ist der Inhalt = 285′ × 285′ = 81225 □′ und diese kaufte er zu 812,25 × 1⅘ fl. = 1462 fl. 3 kr.

Verkauft er aber 2½ oder ½ □° zu 5½ fl., so erhält er für

$$812{,}25\ \square^\circ = \frac{29 \cdot 2 \cdot 812{,}25}{5 \cdot 5} = 1884 \text{ fl. } 25 \text{ kr.}$$

Er hat also 422 fl. 22 kr. gewonnen.

26) A besitzt ein Feld, das 36° 4′ lang und breit ist, verkauft aber seinem Nachbar B hiervon ein rechteckiges Stück von 5° 6′ Breite, wie viel Feld bleibt ihm noch übrig?

Auflös. Inhalt des ganzen Feldes = 364 × 364′ = 132496 □′
hiervon wurden verkauft 364′ × 56′ = 20384 □′
folglich behält A noch = 112112 □′
= 2 Mrg. 3 Vtl. 21 □° 12 □′.

27) Es besitzt Jemand einen Garten von 18° Länge und 12° 4′ Breite. Um wie viel muß die Breite größer und die Länge kleiner gemacht werden, wenn der Garten die Form eines Quadrats erhalten, der Inhalt aber derselbe bleiben soll?

Auflös. Suche die Seite eines Quadrats, welches mit dem Rechteck gleichen Inhalt hat und ziehe hiervon die Breite und dann die gefundene Quadratseite von der Länge ab.

Inhalt des Gartens = 180′ × 124′ = 22320 □′
Seite eines gleichgroßen Quadrats √22320 = 149,39 (§. 36. b.)

Digitized by Google

folglich muß man die Breite um $149{,}39' - 124' = 25{,}39'$ größer und die Länge um $180 - 149{,}39' = 30{,}61'$ kleiner machen.

28) Wie groß ist der Inhalt eines Dreiecks, von welchem eine Seite 5′ 4‴ und die zugehörige Höhe 8′ 6″ gemessen wurde?

Auflös. Inhalt nach §. 46. a. $= \frac{5{,}04 \times 8{,}6}{2} = 21{,}672\,\square'$.

29) Ein Stück Feld von der Form eines Dreiecks wurde verkauft und zwar jede Quadratruthe um 1 fl. 36 kr. Wenn nun eine Seite desselben 65° 8′ und die senkrechte Entfernung des dritten Eckpunktes von dieser Seite 72° 4′ beträgt, was mußte für das Feld bezahlt werden?

Auflös. Inhalt des Feldes (§. 46. a.) $= \frac{658 \times 724}{2} = 2381\,\square^\circ\,96\,\square'$,

daher wurden bezahlt $2381{,}96\,\square' \times 1\frac{2}{3}$ fl. $= 3811$ fl. 8 kr.

30) Die drei Seiten eines dreieckigen Stück Feldes sind 18° 4′, 25° 6′ und 30° lang; wie groß ist der Flächeninhalt desselben?

Auflös. In der in §. 52 angegebenen Formel hat man für $\frac{S}{2} = \frac{184' + 256' + 300'}{2} = 370'$ zu setzen und man erhält

$$\text{Inhalt} = \sqrt{370 \times (370-184) \times (370-256) \times (370-300)}$$
$$= \sqrt{370 \times 186 \times 114 \times 70} = \sqrt{549183600} = 23432{,}5\,\square'$$
oder 2 Rtl. 34 □° 34½ □′.

31) Die 2 den rechten Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks einschließenden Seiten (Catheten) sind 8′ 5″ und 6′ 7″ lang; wie groß ist die dritte Seite (Hypotenuse) und der Inhalt dieses Dreiecks?

Auflös. Nach §. 48 ist die

Hypotenuse $= \sqrt{(8{,}5 \times 8{,}5 + 6{,}7 \times 6{,}7)} = \sqrt{117{,}14} =$ 10′ 8″ 2‴ und der Inhalt nach §. 46 $= \frac{8{,}5 \times 6{,}7}{2} =$ $28\,\square'\ 47\frac{1}{2}\,\square''$.

32) Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist 5° 4′ und eine Cathete 3° 2′ lang; wie groß ist der Flächeninhalt desselben?

Auflös. Bestimme zuerst nach §. 49 die andere Cathete und dann wie in Aufgabe 31 den Inhalt.

Cathete $= \sqrt{(54 \times 54 - 32 \times 32)} = \sqrt{1892} = 43{,}49'$; demnach

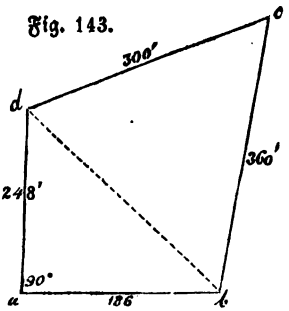
Inhalt $= \frac{32 \times 43{,}49}{2} = 695\,\square'\ 84\,\square''$.

Digitized by Google

33) Man soll den Inhalt eines Feldes bestimmen, welches die Form des Vierecks *abcd* (Fig. 143) hat.

Gemessen wurde: $ad = 248'$, $ab = 186'$, $bc = 360$, und $cd = 300$. Ferner ist bekannt, daß da senkrecht auf ab steht, also der Winkel bei a ein rechter ist.

Fig. 143.



Auflös. Denkt man sich bd gezogen, so ist der Inhalt des Vierecks $abcd$ = Inhalt des Dreiecks abd + Inhalt des Dreiecks dbc.

Inhalt des Dreiecks $abd = \frac{248 \times 186}{2} = 23064\,\square'$.

Um den Inhalt des Dreiecks dbc finden zu können, bestimme man zuerst db, welche als Hypotenuse des Dreiecks adb erscheint.

Nach §. 48 ist sie $= \sqrt{(248 \times 248 + 186 \times 186)} = \sqrt{96100} = 310'$.

Also nach §. 52

Inhalt des Dreiecks $bdc = \sqrt{485.175.185.125} = \sqrt{1962734375} = 44302{,}7\,\square'$;

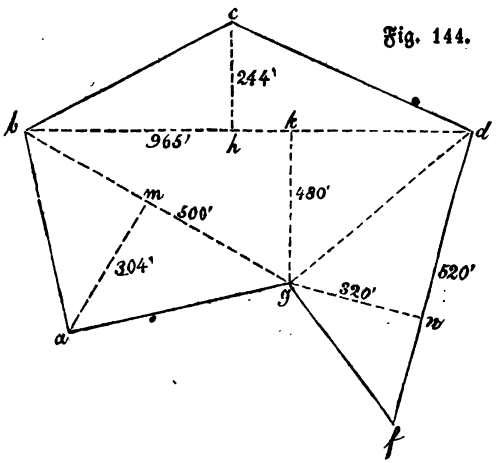
folglich Inhalt des Vierecks $abcd = 23064\,\square' + 44302{,}7\,\square'$

$= 1$ Mrg. 2 Vtl. 73 $\square^0$ $66\frac{7}{10}\,\square'$.

34) Eine Fläche *abcdfg* (Fig. 144) ist nach verjüngtem Maaßstabe aufgetragen, man soll den Flächeninhalt derselben bestimmen.

Auflös. Man theile die Fläche durch die Diagonalen bd, dg und bg in Dreiecke und messe nach dem, auf dem Plane verzeichneten Maaßstabe, die zur Berechnung dieser Dreiecke erforderlichen Linien.

Fig. 144.



Digitized by Google

Es sei z. B. $bd = 96° 5'$; $hc = 24° 4'$; $gk = 48°$; $bg = 50°$; $am = 30° 4'$; $df = 52°$ und $gn = 32°$; so erhält man:

Inhalt des Dreiecks $bdc = \frac{965 \times 244}{2} = 117730 \square'$

" " " $bdg = \frac{965 \times 480}{2} = 231600 \square'$

" " " $abg = \frac{500 \times 304}{2} = 76000 \square'$

" " " $dfg = \frac{520 \times 320}{2} = 83200 \square'$

folglich Inhalt von $abcdfg = 508530 \square'$
oder 12 Mrg. 2 Vtl. 85 □° 30 □'.

35) Die zwei parallelen Seiten eines Paralleltrapezes sind 5′ 8″ und 8′ 6″ lang, ihr senkrechter Abstand beträgt 6′ 4″; wie groß ist der Inhalt desselben?

Auflös. Nach 54a folgt: Inhalt $= \frac{8,6' + 5,8'}{2} \times 6,4' =$ 46□′ 8□″.

36) Eine Wand $abcd$ (Fig. 145) zur Seite einer Stiege bildet ein Paralleltrapez, in welchem da und cb senkrecht auf ab stehen. Es ist $dc = 18'$, $bc = 10'$ und $ad = 16'$ lang. Wie hoch kommt der Anstrich derselben, wenn für den Quadratschuh $1\frac{1}{2}$ Kreuzer gerechnet werden?

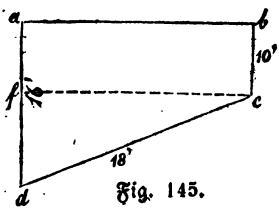


Fig. 145.

Auflös. Hier bilden ad und bc die zwei parallelen Seiten und $ef = ab$ die Höhe. Die Höhe fc erhält man aus dem rechtwinkligen Dreieck dcf. Denn es ist nach §. 49 $fc = \sqrt{(18 \times 18 - 6 \times 6)}$ (da $df = ad - af$ oder $ad - bc = 18 - 10 = 6$). Also $fc = \sqrt{288} = 16,97$. Demnach Inhalt der Wand nach §. 54. $a. = \frac{16 + 10}{2} \times 16,97 = 220,61 \square'$ und Preis des Anstrichs $=$ $220,61 \times 1\frac{1}{2}$ kr. $= 5$ fl. 30 kr.

37) Den Inhalt eines regelmäßigen Sechsecks zu finden, dessen Seite 8″ lang ist?

Auflös. Nach der Tafel in §. 61. d. ist der
Inhalt $= 2,598 \times S \times S = 2,598 \times 0,8' \times 0,8' =$
1□′ 66□″ 27□‴.

Digitized by Google

38) Mit welchem Halbmesser muß man einen Kreis zeichnen, damit ein regelmäßiges Fünfeck in denselben gezeichnet werden kann, welches denselben Inhalt hat, wie ein Quadrat von 6″ Seite und wie groß wird diese Fünfeckseite?

Auflös. Inhalt des Quadrats $= 0{,}6' \times 0{,}6' = 0{,}36\,\square'$, also auch Inhalt des Fünfecks $= 0{,}36\,\square'$. Nach §. 61. e. ist daher der Radius $R = \sqrt{\frac{0{,}36}{2{,}37}} = \sqrt{0{,}1519} = 3'' \; 8\frac{5}{10}'''$ und die Fünfeckseite $= \sqrt{\frac{0{,}36}{1{,}72}} = \sqrt{0{,}2093} = 4'' \; 5\frac{7}{10}'''$.

39) Ein regelmäßiges Achteck und ein Quadrat haben die gleichen Seiten von 1′ 2″ Länge; welche von beiden Flächen nimmt einen größeren Raum ein, und um wie viel ist die eine größer als die andere?

Auflös. Inhalt des Achtecks nach §. 61. d. $=$
$4{,}828 \times 1{,}2 \times 1{,}2 = 6{,}95232\,\square'$
„ „ Quadrats nach §. 36. a. $=$
$1{,}2 \times 1{,}2 = 1{,}44\,\square'$
folglich ist das Achteck größer um $5{,}51232\,\square'$.

40) Wie groß ist der Umfang und der Inhalt eines Kreises von 5″ 2‴ Halbmesser?

Auflös. Umfang $= 2 \times 0{,}52 \times 3{,}14 = 3{,}2656'$ (nach §. 63. a.).
Inhalt $= 0{,}52 \times 0{,}52 \times 3{,}14 = 0{,}849056\,\square'$ (§. 63. c. 2.).

41) Um wie viel ist der Inhalt eines Kreises, dessen Halbmesser 2′ lang ist, größer, als der Inhalt des in denselben gezeichneten regelmäßigen Zehnecks.

Aufl. Inhalt des Kreises $= 2 \times 2 \times 3{,}14 = 12{,}56\,\square'$ (§. 63. c. 2)
„ „ Zehnecks $= 2{,}92 \times 2 \times 2 = 11{,}68\,\square'$ (§. 61. d.)
folglich ist der Kreis größer um $88\,\square''$.

42) Der Inhalt eines Kreises beträgt $34\,\square'$ $36\,\square''$; wie groß ist sein Halbmesser und Umfang?

Auflös. Nach §. 63. d. ist der Halbmesser $= \sqrt{\frac{34{,}36}{3{,}14}} =$
$\sqrt{10{,}9427} = 3'$ 3″, folglich der Durchmesser $= 6'$ 6″ und nach §. 63. a. der Umfang $= 6{,}6' \times 3{,}14 = 20'$ 7″ $2\frac{1}{2}'''$.

43) Mit welchem Halbmesser muß man einen Kreis zeichnen,

Digitized by Google

wenn er denselben Inhalt haben soll, wie ein regelmäßiges Dreieck, dessen Seite 2′ 4″ lang ist?

Auflös. Inhalt des Dreiecks, also auch des Kreises, nach §. 61. d. $= 0,433 \times 2,4 \times 2,4 = 2,49408\,\square'$, folglich nach §. 63. d.

$$\text{Halbmesser} = \sqrt{\frac{2,49408}{3,14}} = \sqrt{0,7943} = 8'' 9'''.$$

44) Der Umfang eines Kreises beträgt 4′ 7″ 1‴, wie groß ist der Inhalt desselben?

Auflös. Rechne zuerst den Halbmesser und dann den Inhalt. Nach §. 63. b. ist der Durchmesser $= 4,71 : 3,14 = 1,5'$, also der Halbmesser $= 0,75'$ und der Inhalt nach §. 63. c. 1. $=$

$$\frac{4,71 \times 0,75}{2} = 1\,\square' 76\,\square'' 62\tfrac{1}{2}\,\square'''.$$

45) Der Halbmesser des Aequators unserer Erde beträgt 859,3 geographische Meilen, wie groß ist der Umfang desselben?

Auflös. Umfang (§. 63. a.) $= 2 \times 859,3 \times 3,14 =$ 5396,404 Meilen.

46) In einem Kreise, dessen Durchmesser 3′ 6″ lang ist, werden 2 Halbmesser so gezogen, daß sie einen Mittelpunktswinkel von 124° bilden; welche Bogenlänge liegt zwischen beiden?

Auflös. Nach §. 63. f. ist die

$$\text{Länge des Bogens} = \frac{3,6 \times 3,14 \times 124}{360} = 3' 8'' 9\tfrac{3}{10}'''.$$

47) Wie groß ist der Inhalt des Ausschnitts, welcher in Aufgabe 46 durch die 2 Halbmesser und den gesuchten Bogen gebildet wird?

Auflös. Aus §. 63. g. folgt:

$$\text{Inhalt des Sektors} = \frac{3,893 \times 1,8}{2} = 3\,\square' 50\,\square'' 37\,\square'''.$$

48) In einen Kreis von 2′ 5″ Halbmesser zeichnet man ein Quadrat; wie groß wird die Seite und der Inhalt desselben? (Ohne Anwendung der Tafeln in §. 61).

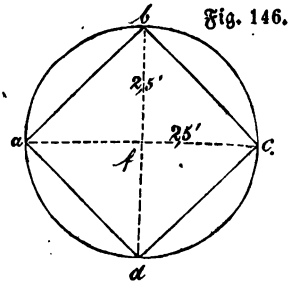


Fig. 146.

Auflös. $abcd$ (Fig. 146) sei das Quadrat, so folgt aus der Auflösung zur Aufgabe 3 im §. 60, daß bd senkrecht auf ac steht, also bfc ein rechtwinkliches Dreieck ist. Demnach ist das Quadrat über der Seite bc nach §. 48 $= 2,5 \times 2,5 + 2,5 \times 2,5 = 12,50\,\square'$, was auch zugleich der verlangte Inhalt ist (§. 36 a).

Digitized by Google

49) Aus einer rechteckigen Fläche von 6′ Länge und 4′ Breite wurde eine Kreisfläche von 1½′ Halbmesser herausgeschnitten; wie groß ist der Inhalt des übrig gebliebenen Stückes?

Auflös. Inhalt der ganzen Fläche $= 6 \times 4 = 24$ □′
Inhalt der Kreisfläche $= 1{,}5 \times 1{,}5 \times 3{,}14 = 7$ □′ 6½ □″ (§. 63. c.)
folglich Inhalt des übrig gebliebenen Stückes $= 16$ □′ 93½ □″.

50) Ein kreisförmiger Grasplatz von 1962½ □′ Inhalt ist mit einer Hecke umgeben, wie groß ist der Durchmesser des Platzes und die Länge der Hecke?

Auflös. Halbmesser (§. 63. d.) $= \sqrt{\frac{1962{,}5}{3{,}14}} = 25'$,
also Durchmesser $= 50'$ und die Länge der Hecke (§. 63. a.) $= 50 \times 3{,}14 = 157'$.

51) Ein Seil, welches mit dem einen Ende den Boden eines Brunnens berührte, schlang sich beim Heraufwinden 20 mal um eine Welle von 12″ Durchmesser; wie tief ist der Brunnen?

Auflös. Umfang der Welle $= 1{,}2 \times 3{,}14 = 3{,}768'$
folglich Länge des Seiles oder auch Tiefe des Brunnens $= 3{,}768 \times 20 = 75'\ 3''\ 6'''$.

Anmerkung. Es ist klar, daß dies Resultat nicht ganz genau ist, da das Seil eigentlich eine Schraubenlinie bildet und die Tiefe also gleich der Summe aller Windungslängen ist.

52) Wie viele Umdrehungen macht ein Rad von 5′ Durchmesser auf einer Strecke von 2 Wegstunden?

Auflös. Länge des Weges $2 \times 14815' = 29630'$ (§. 10. Anm. 1.)
Umfang des Rades $5 \times 3{,}14 = 15{,}7'$ (§. 63. a)
folglich Anzahl der Umdrehungen $= 296300 : 157 = 1887\frac{41}{157}$.

53) Aus einer Vorrichtung, welche an einem Rade von 5′ Durchmesser angebracht ist, ersah man, daß dasselbe bei seiner Bewegung 943 Umläufe machte; wie groß ist die Strecke Wegs, welche zurückgelegt wurde?

Auflös. Umfang des Rades $= 3{,}14 \times 5 = 15{,}7'$ (§. 63. a.)
folglich Wegstrecke $= 15{,}7' \times 943 = 14805{,}1'$ oder beinahe 1 Wegstunde.

54) Der Halbmesser eines Kreises beträgt 8′; wie groß ist der Halbmesser eines Kreises von vierfachem Inhalt?

Digitized by Google

Auflöſ. Inhalt des Kreiſes $= 8 \times 8 \times 3{,}14 = 200{,}96\,\square'$, alſo der vierfache Inhalt $= 803{,}84\,\square'$, und der

Halbmeſſer hiefür (nach §. 63. d) $= \sqrt{\frac{803{,}84}{3{,}14}} = \sqrt{256} = 16'$.

Anmerkung. Der Halbmeſſer wird demnach gerade doppelt ſo groß, wenn der Inhalt viermal größer wird. Halbmeſſer und Inhalt nehmen alſo nicht in gleichem Verhältniſſe zu. Man findet auf gleiche Weiſe wie oben, daß wenn der Inhalt 9-, 16-, u. ſ. w. mal größer wird, der Halbmeſſer nur um das drei- vier- u. ſ. w. fache zunimmt.

Die Inhalte zweier Kreiſe verhalten ſich alſo wie die Quadratzahlen der Radien.

55) Die Halbmeſſer zweier concentriſchen Kreiſe ſind 24′ und 15′; wie groß iſt der Inhalt des zwiſchen beiden liegenden Ringes?

Auflöſ. Inhalt des größeren Kreiſes $= 24 \times 24 \times 3{,}14 = 1808{,}64\,\square'$ (§. 63. c. 2)

Inhalt des kleineren Kreiſes $= 15 \times 15 \times 3{,}14 = 706{,}50\,\square'$

folglich Inhalt des Ringes $= 1102{,}14\,\square'$.

56) Wie groß iſt der Halbmeſſer und Umfang eines Kreiſes, welcher denſelben Inhalt hat, wie der in Aufgabe 55 angeführte Ring?

Auflöſ. Der Halbmeſſer wird (nach §. 63. d.) $= \sqrt{\frac{1102{,}14}{3{,}14}}$

$= \sqrt{351} = 18{,}73'$

folglich Umfang $= 2 \times 18{,}73 \times 3{,}14 = 117'\,6''\,2\frac{1}{2}'''$. (§. 63. a.)

57) Die Halbmeſſer *af* und *df* (Fig 147) eines concentriſchen Ringſtückes *abcd*, haben eine Länge von 8″ und 6″; wie groß iſt der Inhalt deſſelben, wenn der Mittelpunktswinkel $f = 42^0$ mißt?

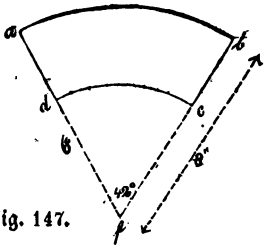


Fig. 147.

Auflöſ. Suche zuerſt die Länge der Bogen *ab* und *dc* nach §. 63. *f*. dann den Inhalt des größern Sektors *abf* und den des kleineren *dcf* nach §. 63. g. und ziehe letzteren von erſterem ab.

Bogen $ab = \frac{1{,}6 \times 3{,}14 \times 42}{360} = 0{,}586'$

„ $dc = \frac{1{,}2 \times 3{,}14 \times 42}{360} = 0{,}439'$

Digitized by Google

Inhalt des Sektors $abf = \frac{0,586 \times 0,8}{2} = 23\,\square'' 44\,\square'''$.

" " " $fdc = \frac{0,439 \times 0,6}{2} = 13\,\square'' 17\,\square'''$.

folglich Inhalt des Ringstückes $abcd = 10\,\square'' 27\,\square'''$.

58) Die beiden Achsen einer Ellipse sind 36′ und 24′ lang; wie groß ist der Flächeninhalt derselben und welchen Durchmesser hat ein Kreis von gleichem Inhalt?

Auflös. Inhalt der Ellipse $= 18 \times 12 \times 3,14 =$ $678\,\square' 24\,\square''$ (nach Anmerkung zur vierten Auflösung der Construktionsaufgabe 83), folglich nach §. 63. d.

Halbmesser des Kreises $= \sqrt{\frac{678,24}{3,14}} = \sqrt{215,98} = 14' 6'' 9'''$

und Durchmesser $= 2 \times 14' 6'' 9''' = 29' 3'' 8'''$.

59) Auf ein Gefäß von elliptischer Form soll ein kupferner Deckel verfertigt werden. Wie viel Kupferblech ist erforderlich, wenn die beiden Achsen 2′ 4″ und 1′ 8″ lang sind?

Auflös. Wie in vorhergehender Aufgabe folgt $1,2 \times 0,9 \times 3,14$ $= 3\,\square' 39\,\square'' 12\,\square'''$ Kupferblech.

60) Um einen Teich, welcher eine elliptische Gestalt hat, führt ein Weg. Die größte Entfernung des äußeren Wegrandes von dem Mittelpunkt des Teiches mißt 3° 8′ und die kleinste Entfernung 2° 8′; wie groß ist der Flächeninhalt des Weges, wenn seine Breite überall 6′ beträgt?

Auflös. Rechnet den Inhalt der Ellipse, welche von dem äußeren Wegrande gebildet wird und ziehe hiervon den Inhalt des Teiches ab.

Inhalt dieser ersteren elliptischen Fläche
$= 38 \times 28 \times 3,14 = 3340,96\,\square'$

Inhalt des Teiches $= 32 \times 22 \times 3,14 = 2210,56\,\square'$

(die beiden Halbachsen sind nämlich um die Wegbreite von 6′ kleiner als bei der ersteren Fläche.)

folglich Inhalt des Weges $= 3340,96\,\square' - 2210,56\,\square'$
$= 11\,\square° 30\,\square' 40\,\square''$.

Digitized by Google

III. Uebersicht der Längen- und Flächenmaaße verschiedener Staaten.

1) Baden.

1 Fuß = 10 Zolle = 100 Linien = 0,3 Met. = 132,988 pariſ. Linien.
1 Elle = 2 Fuß; 1 Klafter = 6 Fuß; 1 Ruthe = 10 Fuß.
1 Quadratfuß = 100 Quadratzoll = 10000 Quadratlinien = 0,9 Quadratmeter.
1 Morgen = 4 Viertel = 400 Quadratruthen = 40000 Quadratfuß.

2) Baiern.

1 Fuß = 12 Zolle = 144 Linien = 0,29186 Met. = 129,38 par. Lin.
1 Elle = 2,8541 Fuß = 369,27 par. Linien.
1 Klafter = 6 Fuß; 1 Ruthe = 10 Fuß.
1 Quadratfuß = 144 Quadratzoll = 0,085182 Quadratmeter.
1 Morgen = 400 Quadratruthen = 40000 Quadratfuß = 34,073 franz. Aren.

3) Belgien. Wie Frankreich.

4) Braunſchweig.

1 Fuß = 12 Zolle = 144 Linien = 0,285362 Met. = 126,5 par. Lin.
1 Elle = 2 Fuß; 1 Lachter = 80 Zoll 8,5 Linien; 1 Ruthe = 16 Fuß.
1 Quadratfuß = 144 Quadratzoll = 0,08143 Quadratmeter.
1 Mrg. = 120 Quadratruthen = 30720 Quadratfuß = 25,0165 franz. Aren.

5) Dänemark.

1 Fuß = 12 Zoll = 144 Linien = 139,09 par. Linien; 1 Elle = 2 Fuß; 1 Faden = 3 Ellen; 1 Ruthe = 5 Ellen = 10 Fuß.

6) England.

1 foot (Fuß) = 12 Zolle (inches) = 0,3048 Meter = 135,114 par. Lin. (1 engl. Fuß = 0,9383 par. Fuß.)
1 Yard (Elle) = 3 Fuß; 1 fathom (Faden) = 6 Fuß.
1 rod oder pole (Ruthe) = 5½ Yards.
1 furlong (⅛ engliſche Meile) = 40 rods.
1 Mile (Meile) = 8 furlongs.
1 league (Seemeile) = 3 Miles; 1 degree (Grad) = 20 leagues.

Digitized by Google

1 Morgen oder Acker (Acre) = 4840 Quadrat-Yards = 160 Quadrat-Rods oder Quadrat-Poles = 40,467 Aren.
1 Rood of Land (Viertels-Acker) = 1210 Quadrat-Yards = 40 Quadrat-Rods.
1 engl. Hufe (yard of Land) = 30 Acres.

7) Frankfurt a. M.

1 Fuß (Werkschuh) = 12 Zoll = 144 Linien = 0,28461 Met. = 126,166 par. Linien.
1 Elle = $1\frac{1}{2}\frac{1}{3}$ Fuß = 242,62 par. Lin. 52 Ellen = 100 Fuß.
1 Feldruthe = 12,5 Werkschuh à 10 Zoll à 10 Linien.
1 Waldruthe = 1,2679 Feldruthen = 15,849 Fuß.
1 Morgen (Feldmorgen) = 160 Quadratruthen = 16000 □ Feldschuh = 15000 □ Werkschuh.
1 Hufe oder Hube Land = 30 Morgen.

8) Frankreich.

1 Met. = 3,078444 pariſ. Fuß = 443,296 pariſ. Linien = 0,513074 Toiſen.

Myriam.	Kilom.	Hektom.	Dekam.	Meter.	Decim.	Centim.	Millim.
1 =	10 =	100 =	1000 =	10000 =	100000 =	1000000 =	10000000
	1 =	10 =	100 =	1000 =	10000 =	100000 =	1000000
		1 =	10 =	100 =	1000 =	10000 =	100000
			1 =	10 =	100 =	1000 =	10000
				1 =	10 =	100 =	1000
					1 =	10 =	100
						1 =	10

Myriare	Kilare	Hektare	Dekare	Are	Quadratmet.
1 =	10 =	100 =	1000 =	10000 =	1000000
	1 =	10 =	100 =	1000 =	100000
		1 =	10 =	100 =	10000
			1 =	10 =	1000
				1 =	100

9) Hamburg.

1 Fuß = 12 Zolle = 0,286415 Met. = 127 pariſ. Linien.
1 Elle = 2 Fuß; 1 Klafter = 6 Fuß; 1 Marſchruthe = 14 Fuß; 1 Geeſtruthe = 16 Fuß.
1 Morgen Land = 600 Quadratmarſchruthen.
1 Scheffel Ausſaat = 200 Quadratgeeſtruthen.

10) Hannover.

1 Fuß = 12 Zolle = 144 Linien = 0,292095 Met. = 129,48 pariſ. Linien.

Digitized by Google

1 Elle = 2 Fuß; 1 Klafter = 6 Fuß; 1 Ruthe = 16 Fuß.
1 Morgen = 120 Quadratruthen; 1 Vorling = 60 und 1 Drohn = 90 Quadratruthen.

11) Heſſen-Darmſtadt.

1 Fuß = 10 Zolle = 100 Linien = 0,25 Meter = 110,824 par. Lin.
1 Elle = 24 Zolle = 265,98 par. Linien; 1 Klafter = 10 Fuß;
1 Morgen = 4 Viertel = 400 Quadratklaftern = 0,25 Hektaren.

12) Heſſen-Kaſſel.

1 Fuß = 12 Zolle = 144 Linien = 0,287699 Meter = 127,536 pariſ. Linien
1 Ruthe = 3,9887 Meter = 14 alte Kaſſeler Fuß à 126,3 par. Lin.
1 Elle = 0,5704 Meter.
1 Acker = 150 Quadratruthen = 23,865 franz. Aren.

13) Holſtein. Wie Hamburg (ſ. Nr. 9).

14) Naſſau.

1 Fuß = 10 Zolle = 100 Linien = ¼ Met. = 221,648 par. Lin.
1 Ruthe = 10 Fuß = 5 Met.
1 Quadratruthe = 100 Quadratfuß = 25 Quadratmeter.
1 Morgen = 100 Quadratruthen = 25 Aren.

15) Niederlande. Wie in Frankreich, nur mit folgenden veränderten Benennungen.

Kilometer = Mijl	Decimeter = Palm
Dekameter = Roede	Centimeter = Duim
Meter = Elle	Millimeter = Streep.

Are = Quadrat-Roede
Hektare = Bunder.

16) Norwegen. Im Allgemeinen wie in Dänemark.

17) Oeſtreich.

1 Fuß = 12 Zolle = 144 Linien = 0,316102 Met. = 140,127 par. Linien.
1 Elle = 2,465 Fuß = 0,77992 Met. = 345,4128 par. Linien.
1 Klafter = 6 Fuß = 1,896614 Met. = 5,8386 par. Fuß.
1 Quadratklafter = 3,59714 Quadratmeter.
1 Joch = 1600 Quadratklafter = 5755,43 Quadratmeter = 57,5543 Aren.

Digitized by Google

18) Preußen.

1 Fuß = 12 Zolle = 144 Linien = 0,313853 Meter = 139,13 pariſ. Linien.
1 Elle = 25½ Zoll = 295,65 pariſ. Linien.
1 Lachter = 80 Zoll (beim Bergbau).
1 Ruthe = 12 Fuß = 3,7662 Meter.
1 Faden = 6 Fuß (beim Seeweſen).
1 Lachter = 80 Zoll (beim Bergbau).
1 Morgen = 180 Quadratruthen = 25,53226 franz. Aren.

19) Rußland.

1 Fuß = 1 engliſchen Fuß = 12 Zoll à 10 Linien à 10 Scrupel.
1 ruſſiſcher Fuß = 0,30479 Meter = 135 par. Linien.
1 Elle oder Arſchine = 28 Zoll = 0,71117 Meter = 315,4 par. Linien.
1 Klafter (Sashén) = 7 engliſche Fuß.
1 Deſſätina = 3200 Quadrat-Sashèn = 156800 engl. Quadratfuß (bei Landgütern).
1 Deſſätina = 2400 Quadrat-Sashèn = 10925,48 Quadratmet. = 117600 engl. Quadratfuß (zum Ausmeſſen der Felder).

20) Sachſen.

1) alte Maße:
1 Fuß = 12 Zolle = 144 Linien = 125,23 par. Linien.
1 Elle = 282,5 par. Linien; 1 Ruthe = 16 Fuß.
1 Acker = 300 Quadratruthen.

2) neue Maße:
1 Fuß = 12 Zoll = 144 Linien = 1,28319 Meter = 132,9888 pariſ. Linien.
1 Elle = 2 Fuß = 6 Decimeter = 1,059 alte Ellen = 25,4167 alte Zolle.
1 neue Berglachter = 3 Ellen 12½ Zoll altes Maß.
1 neue Klafter = 3 neue Ellen = 3 Ellen 4½ Zoll altes Maß.

21) Schleswig. Wie Hamburg.

22) Schweden.

1 Fuß = 12 Zolle (Verthum) = 144 Linien = 0,2969 Meter = 131,6 par. Linien.

Digitized by Google

1 Elle (Aln) = 2 Fuß (Fot); 1 Faden (Famn) = 6 Fuß.
1 Toise = 1,0941 Faden; 1 Ruthe = 16 Fuß.

23) Schweiz.

1 Fuß = 10 Zoll = 100 Linien = 132,98 par. Linien u. s. w., wie Baden.

24) Würtemberg.

1 Fuß = 10 Zoll = 100 Linien = 0,28649 Meter = 127 par. Lin.
1 Elle = 2,144 Fuß = 272,288 par. Linien; 1 Ruthe = 10 Fuß.
1 Morgen = 384 Quadratruthen = 31,5174 franz. Aren.

Digitized by Google

IV. Tabelle zur Vergleichung von Fußmaaßen und dem Meter.

Meter	Pariser Fuß	England. Rußland. Fuß	Preußen. Dänemark. Rheinl. Fuß	Bayern. Fuß	Hannover. Fuß	Sachsen. Fuß	Braunschweig. Fuß	Hessen-Kassel. Fuß	Würtemberg. Fuß	Baden. Nassau. Schweiz. Fuß	Oestreich. Fuß	Hessen-Darmstadt. Fuß	Frankfurt. Fuß
1	3,078444	3,280899	3,186199	3,426310	3,423547	3,531197	3,504316	3,475854	3,490519	3,333333	3,163446	4,000000	3,514938
0,324839	1	1,065765	1,035003	1,113000	1,112103	1,147072	1,138340	1,129094	1,133858	1,082798	1,027612	1,299358	1,141390
0,304794	0,938293	1	0,971136	1,044320	1,043478	1,076290	1,068096	1,059421	1,063891	1,015982	0,964201	1,219178	1,070957
0,313853	0,966181	1,029722	1	1,075359	1,074492	1,108279	1,099842	1,090909	1,095512	1,046178	0,992859	1,255414	1,102788
0,291859	0,898472	0,957561	0,929922	1	0,999194	1,030612	1,022767	1,014460	1,018740	0,972864	0,923281	1,167434	1,025506
0,292095	0,899197	0,958333	0,930672	1,000807	1	1,031444	1,023592	1,015279	1,019562	0,973649	0,924026	1,168379	1,026334
0,283190	0,871785	0,929118	0,902300	0,970297	0,969514	1	0,992387	0,984327	0,988480	0,943967	0,895856	1,132760	0,995046
0,285362	0,878472	0,936245	0,909222	0,977740	0,976952	1,007671	1	0,991878	0,996063	0,951208	0,902729	1,141590	1,002679
0,287699	0,885665	0,943912	0,916667	0,985746	0,984951	1,015922	1,008188	1	1,004219	0,958997	0,910121	1,150796	1,010890
0,286490	0,881944	0,939946	0,912815	0,981605	0,980813	1,011654	1,003953	0,995798	1	0,954968	0,906297	1,145961	1,006642
0,300000	0,923533	0,984270	0,955860	1,027893	1,027064	1,059359	1,051295	1,042756	1,047156	1	0,949034	1,200000	1,054107
0,316111	0,973130	1,037128	1,007193	1,083094	1,082221	1,116250	1,107753	1,098756	1,103391	1,053703	1	1,264400	1,110720
0,250000	0,769611	0,820225	0,796549	0,856577	0,855886	0,882799	0,876079	0,868963	0,872629	0,833333	0,790861	1	0,878734
0,284600	0,876125	0,933744	0,906792	0,975127	0,974344	1,004979	0,997328	0,989228	0,993402	0,948666	0,900317	1,138400	1

Digitized by Google

V. Tabelle zur Vergleichung von Quadratfußen und dem Quadratmeter.

Quadrat-Meter	Pariser Quadrat-Fuß	England. Rußland. Q.-Fuß	Preußen. Dänemark. Rheinl. Q.-Fuß	Bayern. Q.-Fuß	Hannover. Q.-Fuß	Sachsen. Q.-Fuß	Braunschweig. Q.-Fuß	Hessen-Kassel. Q.-Fuß	Würtemberg. Q.-Fuß	Baden. Nassau. Schweiz. Q.-Fuß	Oestreich. Q.-Fuß	Hessen-Darmstadt. Q.-Fuß	Frankfurt. Q.-Fuß
1	9,476817	10,76430	10,15187	11,73960	11,72067	12,46936	12,28023	12,08156	12,18372	11,111111	10,00739	16,000000	12,35479
0,105521	1	1,135856	1,071232	1,238770	1,236773	1,315775	1,295818	1,274854	1,285635	1,172452	1,055987	1,688330	1,302770
0,092899	0,880393	1	0,943105	1,090605	1,088847	1,158399	1,140829	1,122373	1,131864	1,032219	0,929684	1,486394	1,146950
0,098504	0,933505	1,060327	1	1,156398	1,154534	1,228282	1,209652	1,190083	1,200146	1,094489	0,985768	1,576064	1,216142
0,085182	0,807252	0,916922	0,864754	1	0,998388	1,062162	1,046052	1,029129	1,037832	0,946464	0,852447	1,362906	1,051661
0,085319	0,808556	0,918403	0,866150	1,001615	1	1,063877	1,047741	1,030791	1,039507	0,947993	0,853824	1,365108	1,053361
0,080196	0,760008	0,863260	0,814145	0,941476	0,939958	1	0,984833	0,968900	0,977093	0,891073	0,802559	1,283145	0,995046
0,081432	0,771713	0,876555	0,826684	0,955975	0,954434	1,015401	1	0,983822	0,992141	0,904797	0,814919	1,302907	1,005364
0,082771	0,784403	0,890969	0,840278	9,971695	0,970129	1,032098	1,016444	1	1,008456	0,919675	0,828319	1,321331	1,021898
0,082077	0,777826	0,883498	0,833232	0,963547	0,961994	1,023441	1,007921	0,991615	1	0,911963	0,821374	1,313228	1,013328
0,090000	0,852914	0,968787	0,913668	1,056564	1,054861	1,122242	1,105221	1,087340	1,096535	1	0,900665	1,440000	1,111142
0,099926	0,946982	1,075635	1,014437	1,173093	1,171202	1,246014	1,227116	1,207264	1,217472	1,110290	1	1,598818	1,233659
0,062500	0,592301	0,672769	0,634492	0,733725	0,732542	0,779335	0,767514	0,755098	0,761482	0,694444	0,625462	1	0,772174
0,080997	0,767595	0,871878	0,822272	0,950874	0,949341	1,009982	0,994663	0,978572	0,986847	0,899968	0,810571	1,295043	1

Digitized by Google

VI. Von den Decimalbrüchen.

Erklärung.

1) Brüche, welche zum Nenner die Zahlen 10 oder 100, 1000 u. s. w. haben, heißen zehntheilige oder Decimalbrüche. So sind z. B. $38\frac{7}{10}$, $5\frac{23}{100}$, $34\frac{367}{1000}$ gemischte Zahlen, bei welchen den Ganzen Decimalbrüche angehängt sind.

2) Jeden Decimalbruch kann man sich aus einer Summe eben so vieler anderer Decimalbrüche bestehend denken, als sein Nenner nach der Einheit Nullen enthält, wobei die Nenner der einzelnen Brüche nach der Reihe 10, 100, 1000, u. s. w. heißen.

So ist z. B. $38\frac{7}{10} = 38 + \frac{7}{10}$.

$5\frac{23}{100} = 5 + \frac{2}{10} + \frac{3}{100}$ (denn $\frac{2}{10} + \frac{3}{100} = \frac{20}{100} + \frac{3}{100} = \frac{23}{100}$).

$34\frac{367}{1000} = 34 + \frac{3}{10} + \frac{6}{100} + \frac{7}{1000}$ (denn $\frac{3}{10} + \frac{6}{100} + \frac{7}{1000}$
$= \frac{300}{1000} + \frac{60}{1000} + \frac{7}{1000} = \frac{367}{1000}$).

3) Hieraus ergibt sich folgende einfache Art Decimalbrüche anzuschreiben:

Man mache nach den Einern der ganzen Zahl ein Komma (,) und setze nach diesem die Zehntel, nach den Zehntel die Hundertel, nach diesen die Tausendtel u. s. w.

Die in 1) angeführten Brüche würden also nach dieser Schreibart ausgedrückt durch 38,7; 5,23; 34,367.

Die Ziffern nach dem Komma werden Dezimalstellen genannt.

4) Enthält ein Decimalbruch keine Zehntel oder keine Hundertel u. s. w., so setze man an die Stelle der fehlenden Gattung eine Null.

So ist z. B. $16\frac{7}{100} = 16 + \frac{0}{10} + \frac{7}{100} = 16{,}07$ und
$9\frac{307}{10000} = 9 + \frac{0}{10} + \frac{3}{100} + \frac{0}{1000} + \frac{7}{10000} = 9{,}0037$ (vgl. 2).

5) Sind keine Ganzen vorhanden, so setze man an deren Stelle eine Null.

So ist z. B. $\frac{7}{10} = 0{,}7$ und $\frac{43}{100} = 0{,}43$.

Digitized by Google

6) Um bei dem Lesen der Decimalbrüche nicht die Zehntel, Hundertel, Tausendtel u. s. w. nach der Reihe aussprechen zu müssen, liest man nach den Ganzen den Bruch, welcher entsteht, wenn man sich unter die Decimalstellen als Zähler, einen Nenner geschrieben denkt, welcher aus einem 1 mit so vielen angehängten Nullen besteht, als Decimalstellen vorhanden sind.

Man wird also z. B. 95,763 lesen 95 Ganze 763 Tausendtel und 0,0743 wird heißen 743 Zehntausendtel.

7) Bei einem Decimalbruche darf man nach der letzten Decimalstelle so viele Nullen anhängen, als man nur will, ohne dadurch den Werth desselben zu ändern.

So ist z. B. 58,56 = 58,5600; denn es ist 58,5600 (nach 6) = $58\frac{5600}{10000} = 58\frac{56}{100} = 58{,}56$.

Verwandlung der gemeinen Brüche in Decimalbrüche.

8) Um einen ächten Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln, hänge man dem Zähler eine Null an und dividire ihn alsdann durch den Nenner, geht die Division nicht auf, so hänge man dem Reste abermals eine Null an und theile wieder mit dem Nenner u. s. f. bis die Division aufgeht, oder wenn dieser Fall nie eintreten sollte, bis man so viele Decimalstellen gefunden hat, als die Genauigkeit der Rechnung es verlangt. Vor diese erhaltenen Decimalstellen setze man alsdann 0 Ganze, da in einem ächten Bruche keine Ganzen enthalten sind.

Z. B. a) $\frac{3}{4} = 30 : 4 = 0{,}75$

28
20
20
--

b) $\frac{11}{16} = 110 : 16 = 0{,}6875$

96
140
128
120
112
80
80
--

Digitized by Google

c) $\frac{7}{128} = 70 : 128 = 0{,}0546875$

700
640
600
512
880
768
1120
1024
960
896
640
640
***

9) Geht die Division zuletzt auf, wie in den drei vorhergehenden Beispielen, so heißt der erhaltene Decimalbruch ein endlicher, wenn dies nicht der Fall ist, ein unendlicher Decimalbruch.

10) Wiederholen sich bei einem unendlichen Decimalbruche eine oder mehrere Ziffern in derselben Reihenfolge, so wird derselbe ein periodischer Decimalbruch genannt, und die sich wiederholenden Ziffern heißen die Periode.

So ist z. B. $\frac{5}{9} = 50 : 9 = 0{,}55\ldots$ ein periodischer Decimalbruch, dessen Periode 1 Stelle (5),

45
50
45
5

dagegen $\frac{4}{7} = 40 : 7 = 0{,}5714285714\ldots$ ein solcher, dessen Periode 6 Stellen (571428) hat.

35
50
49
10
7
30
28
20
14
60

60
56
40
35
5

Digitized by Google

11) Ist ein unächter Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln, so verwandle man diesen zunächst in eine gemischte Zahl und dann den angehängten Bruch (nach 10) in einen Decimalbruch und schreibe diesem die gefundenen Ganzen voraus.

z. B. $\frac{37}{8} = 4\frac{5}{8} = 50 : 8 = 4{,}625$

48
20
16
40
40
..

Verwandlung der Decimalbrüche in gemeine Brüche.

12) Um einen endlichen Decimalbruch (9) in einen gewöhnlichen Bruch zu verwandeln, schreibe man den Decimalstellen als Zähler einen Nenner unter, wie er in 6 angegeben wurde, und kürze hierauf den erhaltenen Bruch möglichst ab.

So ist z. B. $3{,}75 = 3\frac{75}{100} = 3\frac{3}{4}$ (mit 25 verkleinert)
oder $0{,}735 = \frac{735}{1000} = \frac{147}{200}$ (mit 5 abgekürzt)
und $0{,}0075 = \frac{75}{10000} = \frac{3}{400}$ mit 25 verkleinert).

13) Ist ein periodischer Decimalbruch (10), dessen Periode mit den Zehntel beginnt, in einen gemeinen Bruch zu verwandeln, so schreibe man unter die Periode so viele Neunen als Nenner, als die Periode Ziffern enthält und kürze alsdann den Bruch ab.

So ist z. B. $9{,}454545\ldots. = 9\frac{45}{99} = 9\frac{5}{11}$ und
$0{,}036036 = \frac{36}{999} = \frac{4}{111}$ (da die Periode 0,36 heißt, also dreiziffrig ist.)

Addition der Decimalbrüche.

14) Man schreibe die zu summirenden Werthe (Summanden) so unter einander, daß die Ganzen unter die Ganzen, die Zehntel unter die Zehntel, die Hundertel unter die Hundertel u. s. w.

Digitized by Google

zu stehen kommen und addire dann wie bei den gewöhnlichen Zahlen. In dem Resultate (der Summe) setze man das Komma an dieselbe Stelle, welche es in den Summanden einnimmt.

Z. B. $36,58 + 425,309 + 0,0047 + 8,5264 =$

36,58	
425,309	(Summanden)
0,0047	
8,5264	
470,4201	(Summe)

Subtraktion der Decimalbrüche.

15) Man setze die Decimalbrüche in derselben Ordnung wie bei der Addition (14) untereinander und subtrahire alsdann wie bei gewöhnlichen Zahlen, mit Rücksicht auf das Komma.

Enthält der abzuziehende Decimalbruch (Subtrahend) mehr Decimalstellen als der andere (Minuend), so hänge man letzterem so viele Nullen an, als ihm zur gleichen Anzahl noch Decimalstellen fehlen (vergl. 7).

Beispiele. a) $386,5423 - 76,2958$

386,5423	(Minuend)
76,2958	(Subtrahend)
310,2465	(Rest).

b) $825,46954 - 2,729$

825,46954
2,729
822,74054

c) $0,56 - 0,29843$

0,56000
0,29843
0,26157

Multiplication der Decimalbrüche.

16) Man schreibe die zu multiplicirenden Werthe (Faktoren) unter einander und multiplicire wie bei ganzen Zahlen. In dem Resultat (Produkt) schneide man alsdann von der Rechten gegen die Linke so viele Ziffern durch ein Komma ab, als die Summe der Decimalstellen in beiden Faktoren beträgt.

Digitized by Google

Z. B. $726{,}54 \times 3{,}9752$

$$\begin{array}{r} 726{,}54 \\ 3{,}9752 \end{array} \Big\} \text{(Faktoren)}$$

$$\begin{array}{r} 145308 \\ 363270 \\ 508578 \\ 653886 \\ 217962 \\ \hline 2888{,}141808 \end{array} \text{(Produkt)}$$

Hier sind in beiden Faktoren zusammen 6 Decimalstellen enthalten, weshalb im Produkte nach der sechsten Ziffer das Komma zu stehen kommt.

17) Enthält das Produkt nur so viele Ziffern, als Decimalstellen in beiden Faktoren enthalten sind, so setze man an die Stelle der Ganzen eine Null.

Z. B.

$$\begin{array}{r} 2{,}126 \\ 0{,}42 \\ \hline 4252 \\ 8504 \\ \hline 0{,}89292 \end{array}$$

18) Kommen in dem Produkte nicht so viele Ziffern vor, als die Summe der Decimalstellen in den beiden Faktoren ausmacht, so schreibe man voran so viele Nullen, als Ziffern fehlen und setze den erhaltenen Decimalstellen noch 0 Ganze vor.

Z. B. $0{,}062 \times 0{,}032 = ?$

$$\begin{array}{r} 0{,}062 \\ 0{,}032 \\ \hline 124 \\ 186 \\ \hline 0{,}001984 \end{array}$$

19) Ist ein Decimalbruch mit einer ganzen Zahl zu multipliciren, so verfahre man nach denselben Regeln, wie sie bisher angegeben wurden.

Digitized by Google

Beispiele. a) 8,423 · 26 = 50538 + 16846 = 218,998

b) 0,0034 · 35 = 170 + 102 = 0,1190

Division der Decimalbrüche.

20) Soll ein Decimalbruch durch eine ganze Zahl oder durch einen Decimalbruch, oder eine ganze Zahl durch einen Decimalbruch dividirt werden, so kann man in allen Fällen auf folgende Weise verfahren.

Man schreibe die zu theilende Zahl, (den Dividenden) als Zähler, und den Theiler (Divisor) als Nenner eines Bruches und bringe beide mittelst Anhängen von Nullen (7) auf die gleiche Anzahl von Decimalstellen, wenn diese nicht schon gleich ist, streiche dann das Komma im Zähler wie im Nenner und verwandle hierauf den erhaltenen Bruch in einen Decimalbruch (vergl. 8 bis 12). Dieser Decimalbruch ist das gewünschte Resultat (der Quotient).

Beispiele.

a) $\overset{\text{(Dividend)}}{7165,28} : \overset{\text{(Divisor)}}{23,57} = \frac{716528}{2357} = 716528 : 2357 = \overset{\text{(Quotient)}}{304}$

7071
9428
9428
****

b) $0,723 : 0,415 = \frac{723}{415} = 723 : 415 = 1,742$

4 15
3080
2905
1750
1660
900
830
70

**

c) $35,261 : 2,518 = \frac{35261}{2518} = 35261 : 2518 = 14,0035 \ldots$

2518
10081
10072
9000
7554
14460
12590
1870

d) $54,72 : 17 = \frac{5472}{1700} = 5472 : 1700 = 3,218 \ldots$

5100
3720
3400
3200
1700
15000
13600
1400

e) $62,21622 : 23,54 = \frac{6221622}{2354000} = 6221622 : 2354000 = 2,643$

4708000
15136220
14124000
10122200
9416000
7062000
7062000

f) $35,724 : 6,54 = \frac{35724}{6540} = 35724 : 6540 = 5,462 \ldots$

32700
30240
26160
40800
39240
15600
13080
2520

Digitized by Google

g) $134{,}5 : 26{,}23 = \frac{13450}{2623} = 13450 : 2623 = 5{,}127\ldots$

13450
13115
3350
2623
7270
5246
20240
18361
1879

h) $5 : 48{,}43 = \frac{500}{4843} = 500 : 4843 = 0{,}1032\ldots$

5000
4843
15700
14529
11710
9686
2024

i) $3{,}4 : 284{,}561 = \frac{3400}{284561} = 3400 : 284561 = 0{,}0119\ldots$

34000
340000
284561
554390
284561
2698290
2561049
137241

k) $32 : 0{,}0052 = \frac{320000}{52} = 320000 : 52 = 6153{,}84$

320
312
80
52
280
260
200
156
440
416
240
208
32

Digitized by Google

Ist der Divisor eine ganze Zahl, oder enthält er weniger Decimalstellen, als der Dividend, so ist es nicht gerade nothwendig, die Auflösung nach der oben angegebenen allgemeinen Regel vorzunehmen, sondern man kann in diesem Falle ein kürzeres Verfahren anwenden, wie dieses aus der folgenden Auflösung der oben angeführten Beispiele d, e und f leicht zu ersehen ist.

d) 54,72 : 17 = 3,218 ...

51
37
34
32
17
150
136
14

e) 62,21622 : 23,54 =
6221,622 : 2354 = 2,643

4708
15136
14124
10122
9416
7062
7062
****

f) 35,724 : 6,54 = 3572,4 : 654 = 5,462 ...

3270
3024
2616
4080
3924
1560
1308
252

Druck von H. L. Brönner in Frankfurt a. M.

Digitized by Google

Elemente

der

Geometrie

in

Lehrsätzen und Aufgaben

zum Gebrauche

an

Gewerbschulen, sowie zur Selbstbelehrung für Gewerbtreibende.

Von

Carl Spitz,

Lehrer an der polytechnischen Schule in Carlsruhe.

Zweiter Theil.

Die Stereometrie enthaltend.

Mit 43 in den Text gedruckten Holzschnitten.

Heidelberg.

C. F. Winter, akademische Verlagshandlung.

1853.

Digitized by Google

Druck von Heinrich Ludwig Brönner in Frankfurt a. M.

Digitized by Google

Vorwort.

In vorliegendem zweiten Theile habe ich diejenigen Sätze der Stereometrie behandelt, deren Kenntniß, ihrer praktischen Anwendung wegen, jedem Gewerbsmanne unentbehrlich geworden ist. Insbesondere ist die Construktion der Körpernetze und die Berechnung der Oberfläche, des Cubikinhalts und des Gewichtes der Körper hervorgehoben.

Sämmtliche Sätze sind durch die Auflösung einer beträchtlichen Anzahl von praktischen Aufgaben näher erläutert worden; da ich von der Ansicht ausging, daß ein Buch über Geometrie nur dann für den Handwerker von wahrem Nutzen sein wird, wenn er darin nicht bloß der Reihe nach die Lehrsätze aufgestellt findet, sondern diese alsobald auch auf Aufgaben angewendet sieht, wie sie ihm in seinem Gewerbe vorkommen.

Wie schon der Titel sagt, soll gegenwärtiges Werkchen nicht von Mathematikern benutzt werden, sondern besonders dem Gewerbtreibenden zur Selbstbelehrung dienlich sein. Dieß stets berücksichtigend habe ich mich auch durchgängig aller mathematischen Beweise enthalten und nur die ersten Elemente der Arithmetik als bekannt vorausgesetzt. Wo sich jedoch ein ausgesprochener Satz auf einfache und

Digitized by Google

leichtfaßliche Weise anschaulich machen ließ, habe ich dies immer gethan.

Aus dem angedeuteten Grunde konnte ich mich auch nicht entschließen, dem von mehreren Seiten ausgesprochenen Wunsche, die Auflösungen am Ende des Werkchens zusammenzustellen, Folge zu leisten. Für den Gebrauch an Schulen wäre diese Anordnung allerdings zweckmäßiger; ob aber diese Einrichtung auch dem Handwerker, der sich in dem Buche ohne fremde Hilfe zurechtfinden soll, willkommen wäre?

Bei vielen Aufgaben habe ich die Auflösung auch nach dem zwölftheiligen Maaßsysteme beigesetzt, wodurch sich das Buch auch zum Gebrauche in andern Staaten eignet.

Als Anhang sind diesem Theile noch beigegeben:

1) Eine Sammlung praktischer Aufgaben über Körperberechnungen (mit Auflösung);
2) die Berechnung eines Fasses;
3) die Berechnung eines Körpers von beliebiger Gestalt;
4) eine Tabelle der specifischen Gewichte und
5) drei Tabellen zur Vergleichung der Cubikmaaße, Gewichte und der Hohlmaaße verschiedener Staaten.

Möge diesem zweiten Theile eine ebenso günstige Beurtheilung und Aufnahme zu Theil werden, wie dem ersten.

Carlsruhe, im April 1853.

C. Spitz.

Digitized by Google

Inhalt.

Abschnitt I.

Seite

Erklärungen §. 1 — 2 1

Abschnitt II.

Von den geometrischen Körpern im Allgemeinen §. 2 — 4. 2

Von den regelmäßigen Körpern §. 2. — Von den unregelmäßigen Körpern §. 3. — Von den runden Körpern §. 4. —

Abschnitt III.

Zeichnung der Körpernetze §. 5 — 17 8

Erklärung §. 5. — Netz des regelmäßigen Vierflachs §. 6. — Netz des Würfels §. 7. — Netz des regelmäßigen Achtflachs §. 8. — Netz des regelmäßigen Zwölfflachs §. 9. — Netz des regelmäßigen Zwanzigflachs §. 10. — Netze für Prismen §. 11. — Netze für vollständige Pyramiden §. 12. — Netz für die abgekürzte Pyramide §. 13. — Netz des Cylinders §. 14. — Netz eines vollständigen Kegels §. 15. — Netz des abgekürzten Kegels §. 16. — Netz einer Kugel §. 17. —

Abschnitt IV.

Von dem Körpermaaße und dem specifischen Gewichte der Körper §. 18 — 25. 19

Von den körperlichen Maaßen oder Cubikmaaßen §. 18. — Anschreiben derselben in Form von Decimalbrüchen §. 19. — Aufgaben §. 20. — Von dem specifischen Gewichte der Körper §. 21 — 22. — Anwendung des specifischen Gewichtes zur Bestimmung des Gewichts und des Cubikinhalts eines Körpers §. 23 — 24. — Beispiele §. 25.

Digitized by Google

Seite

Abschnitt V.

Berechnung der Körper §. 26 — 48 26

Berechnung des Prismas §. 26. — Beispiele §. 27. — Berechnung des Würfels §. 28. — Vom Ausziehen der Cubikwurzel §. 29 — 34. — Aufgaben §. 35. — Beispiele über die Berechnung des Würfels §. 36. — Berechnung der vollständigen Pyramide §. 37. — Beispiele §. 38. — Berechnung der abgekürzten Pyramide §. 39. — Beispiele §. 40. — Berechnung des Cylinders §. 41. — Beispiele §. 42. — Berechnung des vollständigen Kegels §. 43. — Beispiele §. 44. — Berechnung des abgekürzten Kegels §. 45. — Beispiele §. 46. — Berechnung der Kugel §. 47. — Beispiele §. 48. —

Anhang.

I. Aufgaben über die Berechnung der Körper 64
II. Berechnung eines Fasses 85
III. Berechnung des Cubikinhalts eines Körpers von beliebiger Gestalt 86
IV. Tabelle der specifischen Gewichte 88
V. Tabelle zur Vergleichung von Cubikfußen und dem Cubikmeter 90
VI. Tabelle zur Vergleichung verschiedener Gewichte . . 91
VII. Tabelle zur Vergleichung verschiedener Hohlmaaße .. 92

Digitized by Google

Druckfehler.

Seite 25, Zeile 3 v. o. statt 2'8 lies 2,8.

Verbesserungen zum ersten Theile.

Seite 6 Zeile 11 v. o. statt b) 2988‴; d) 17808‴ lies c) 2388‴; d) 17813‴.
" " " 14 v. u. " 5′ 3″ $6\frac{1}{2}$‴ lies 5′ 4″ $7\frac{2}{3}$‴.
" 33 " 13 v. o. " $\frac{3}{10}$ lies $1\frac{3}{10}$.
" 40 Beispiel 1) " 11° 4′ u. 5° 4″ lies 11° 4″ u. 5° 4′.
" 43 Zeile 3 v. o. lies 288 u. Zeile 6 lies 755 statt 289 u. 756.
" 47 " 24 " " statt 1,940 lies 1,931.
" 48 " 8 v. u. " 2,920 " 2,938.
" 98 " 11 u. 12 v. u. wurden 8 kr. statt $2\frac{1}{2}$ in Rechnung gebracht und dadurch 146 fl. 59 kr. statt 123 fl. 13 kr. als Resultat erhalten.

Digitized by Google

Digitized by Google

Abschnitt I.

§. 1. Erklärungen.

1) Die Stereometrie umfaßt den Theil der Geometrie, welcher von der Ausmessung der Körper handelt.

2) Die Flächen, welche einen Körper begrenzen, heißen Seitenflächen. Alle Seitenflächen zusammen bilden die Oberfläche eines Körpers.

3) Die Durchschnittslinien zweier Seitenflächen werden Kanten genannt.

4) Man unterscheidet eckige und runde Körper (Theil I. §. 7). Erstere heißen auch Polyeder oder Vielflache.

5) Die eckigen Körper werden eingetheilt in regelmäßige und unregelmäßige. Regelmäßig heißt ein Körper, wenn dessen Seitenflächen regelmäßig und untereinander vollkommen gleich sind. Alle übrigen gehören zu den unregelmäßigen Körpern.

6) Diejenige Fläche eines Körpers, auf welcher derselbe stehend gedacht wird, heißt seine Grundfläche oder Basis.

7) Zur Begrenzung eines eckigen Körpers sind wenigstens vier Flächen nöthig. Runde Körper können von jeder beliebigen Anzahl Flächen eingeschlossen sein.

Digitized by Google

Abschnitt II.

Von den geometrischen Körpern im Allgemeinen.

§. 2. Von den regelmäßigen Körpern.

Zu den regelmäßigen Körpern gehören:

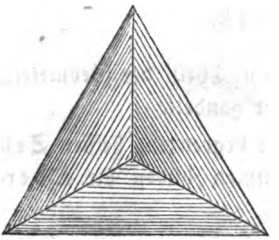


Fig. 1.

1) das regelmäßige Vierflach oder Tetraëder (Fig. 1), welches von vier gleichen gleichseitigen Dreiecken begrenzt ist.

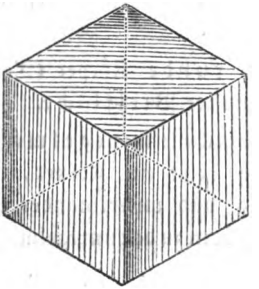


Fig. 2.

2) Das regelmäßige Sechsflach, Würfel, Cubus oder Hexaëder (Fig. 2*), von sechs gleichen Quadraten eingeschlossen.

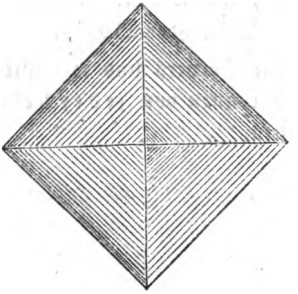


Fig. 3

3) Das regelmäßige Achtflach oder Octaëder (Fig. 3), begrenzt von acht gleichen gleichseitigen Dreiecken.

*) Die punktirten Linien einer Figur bezeichnen immer die hintern unsichtbaren Kanten; gestrichelte Linien dagegen deuten Hilfslinien an.

Digitized by Google

4) Das regelmäßige Zwölfflach oder Dodekaëder (Fig. 4), dessen Begrenzung durch zwölf vollkommen gleiche regelmäßige Fünfecke gebildet wird.

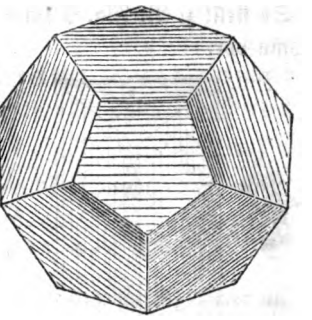


Fig. 4.

5) Das regelmäßige Zwanzigflach oder Ikosaëder (Fig. 5), eingeschlossen von zwanzig gleichen gleichseitigen Dreiecken.

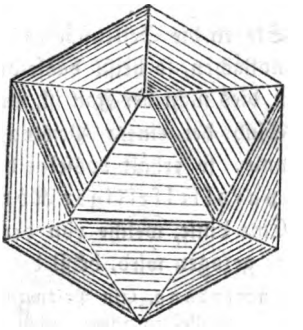


Fig. 5.

Anmerkung. Von diesen regelmäßigen Körpern werden wir in der Folge nur den Würfel näher untersuchen, da von den übrigen nur selten im praktischen Leben Gebrauch gemacht wird.

§. 3. Von den unregelmäßigen Körpern.

Von diesen betrachten wir in der Geometrie nur zwei, nämlich das Prisma und die Pyramide.

1) Das Prisma oder die Eckſäule ist ein Körper, welcher von zwei parallelen und vollkommen gleichen Vielecken als Grundflächen und eben so vielen Parallelogrammen begrenzt ist, als die Grundflächen Seiten haben.

Man benennt die Prismen nach der Anzahl ihrer Seitenflächen.

Digitized by Google

So stellt z. B. Fig. 6 ein dreiseitiges und Fig. 7 ein fünfseitiges Prisma vor.

Fig. 6.

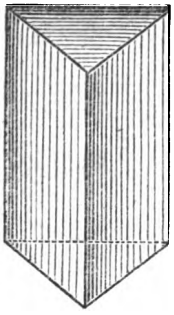
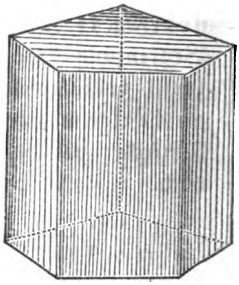


Fig. 7.



Stehen die Seitenflächen eines Prismas senkrecht auf beiden Grundflächen, so heißt dasselbe ein gerades oder senkrechtes, wenn dies nicht der Fall ist, ein schiefes Prisma.

Sind bei einem Prisma die Grundflächen selbst Parallelogramme, so erhält dasselbe den Namen Parallelepipedum oder parallelseitiger Körper.

Eine Linie, welche von der einen Grundfläche senkrecht auf die andere gezogen wird, heißt die Höhe des Prismas*).

Anmerkung. Ein Prisma wird erzeugt, wenn sich eine gerade Linie, parallel zu ihrer anfänglichen Lage bleibend, auf dem Umfange eines Vielecks herumbewegt.

2) Die Pyramide oder Spitzsäule ist ein Körper, welcher von einem Polygone als Grundfläche und eben so vielen Dreiecken begrenzt ist, als das Polygon Seiten hat.

Man benennt die Pyramiden nach der Anzahl der Seiten ihrer Grundfläche. So ist z. B. Fig. 8 eine sechsseitige Pyramide.

Alle Seitendreiecke zusammen bilden den Mantel der Pyramide.

Der Punkt *a*, welcher allen Seitendreiecken zukommt, heißt die Spitze und die Senkrechte *ab* von diesem Punkte aus auf die Grundfläche wird die Höhe der Pyramide genannt.

Wird die Grundfläche einer Pyramide durch ein regelmäßiges Vieleck gebildet und trifft die von der Spitze aus gezogene Höhe in

*) Eine Linie steht auf einer ebenen Fläche senkrecht, wenn sie auf zwei durch den Fußpunkt in der Fläche gezogenen geraden Linien senkrecht steht.

Digitized by Google

den Mittelpunkt dieses Vielecks, so heißt die Pyramide eine regelmäßige. Jede Pyramide wird durch eine zur Grundfläche parallele Ebene*) in zwei Körper zerlegt, wovon der an der Grundfläche liegende Theil abgekürzte Pyramide und der andere Theil

Fig. 8.

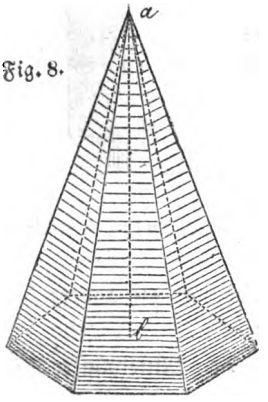
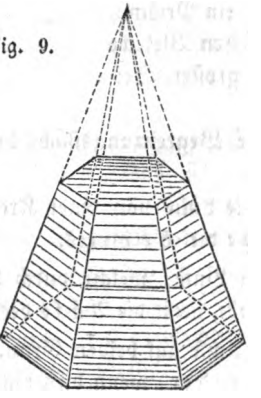


Fig. 9.



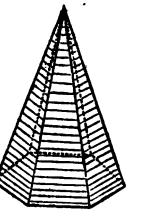


Fig. 10.

Ergänzungspyramide genannt wird. So theilt z. B. eine solche Ebene die Pyramide Fig. 8 in die abgekürzte Pyramide Fig. 9 und in die Ergänzungspyramide Fig. 10.

Anmerkung. Eine Pyramide wird erzeugt, wenn man ein Vieleck und außerhalb der Ebene desselben einen Punkt annimmt und eine durch diesen Punkt gehende gerade Linie an dem Umfange des Vielecks herumbewegt.

§. 4. Von den runden Körpern.

Von den runden Körpern verdienen nur drei einer nähern Betrachtung; nämlich: der Cylinder, der Kegel und die Kugel.

---

*) Zwei Ebenen sind parallel oder gleichlaufend, wenn sie, so weit man sich dieselben auch verlängert denken mag, einander nie treffen.

Zwei Ebenen, welche auf einer geraden Linie senkrecht stehen, sind parallel.

Digitized by Google

1) Der Cylinder oder die Walze (Fig. 11) ist ein Körper, welcher von zwei gleichen parallelen Kreisen als Grundflächen und einer krummen Seitenfläche begrenzt ist.

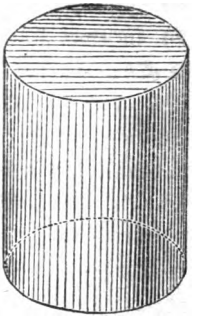


Fig. 11.

Man kann einen Cylinder ansehen als ein Prisma, dessen Grundflächen Vielecke von unendlich großer Seitenzahl sind.

Die krumme Begrenzungsfläche heißt der Mantel des Cylinders.

Die senkrechte Linie von einer Kreisfläche auf die andere bestimmt die Höhe dieses Körpers.

Eine gerade Linie, welche durch die beiden Mittelpunkte der Grundflächen geht, heißt die Achse des Cylinders.

Steht diese Achse auf beiden Grundflächen senkrecht, so ist der Cylinder ein gerader, wenn dies nicht der Fall ist, so wird er ein schiefer genannt.

Anmerkung. Wählt man statt des in der Anmerkung zu §. 3. 1. erwähnten Vielecks einen Kreis, so wird ein Cylinder erzeugt.

2) Der Kegel oder Conus (Fig. 12) ist ein Körper, welcher von einem Kreis als Grundfläche und einer krummen Seitenfläche (Mantel genannt) begrenzt ist, welche in einen Punkt ausläuft, der die Spitze des Kegels heißt.

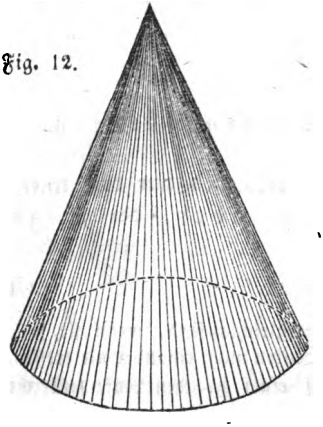


Fig. 12.

Der Kegel kann als eine Pyramide angesehen werden, welche ein Vieleck von unendlich vielen Seiten zur Grundfläche hat.

Digitized by Google

Die senkrechte Linie von der Spitze auf die Grundfläche heißt die Höhe und die Verbindungslinie der Spitze mit dem Mittelpunkt der Grundfläche, die Achse des Kegels.

Steht diese Achse senkrecht auf der Grundfläche, so wird der Kegel ein gerader oder senkrechter, im andern Falle ein schiefer genannt.

Eine Linie von der Spitze nach dem Umfange der Grundfläche heißt Seite des Kegels. Bei einem senkrechten Kegel sind alle Seiten einander gleich.

Wie die Pyramide, so läßt sich auch der Kegel, durch eine zur Grundfläche parallele Ebene, in einen abgekürzten Kegel und einen Ergänzungskegel zerlegen.

Anmerkung. Wird statt des in der Anmerkung zu §. 3. 2. angeführten Vielecks ein Kreis angenommen, so erzeugt die Linie eine Kegelfläche.

3) Die Kugel oder Sphäre ist ein Körper, welcher nur von einer krummen Fläche eingeschlossen ist, die von einem festen Punkte überall gleiche Entfernung hat.

Man kann sich dieselbe durch die Umdrehung eines Halbkreises um seinen Durchmesser entstanden denken.

Der feste Punkt heißt Mittelpunkt; eine Linie vom Mittelpunkt nach der Oberfläche wird Radius oder Halbmesser und eine Linie von einem Punkt der Oberfläche durch den Mittelpunkt bis zur entgegengesetzten Seite derselben, Durchmesser oder Diameter genannt.

Wird eine Kugel von einer Ebene durchschnitten, so ist der Durchschnitt ein Kreis.

Geht die Ebene durch den Mittelpunkt der Kugel, so heißt der Durchschnittskreis ein größter Kreis.

Legt man mehrere parallele Ebenen durch eine Kugel, so entstehen Kreise, welche mit einander parallel laufen und deren Mittelpunkte in dem nämlichen Durchmesser der Kugel liegen. Diese Kreise heißen Parallelkreise.

Der durch eine Ebene von einer Kugel abgeschnittene Theil *pqmn* (Fig 13) heißt Kugelabschnitt oder Kugelsegment und die krumme Oberfläche desselben wird Kugelhaube genannt.

Ein Theil der Kugel wie *amnpq*, welcher durch die Umdre-

Digitized by Google

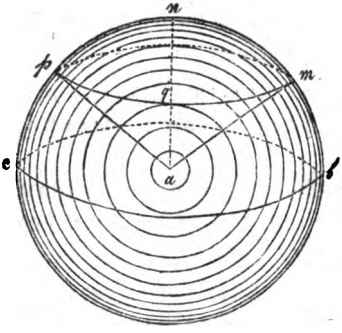


Fig. 13.

hung eines Kreissektors *amnp* um die Mittellinie *an* entstanden gedacht werden kann, heißt Kugelausschnitt oder Kugelsektor.

Jeder zwischen zwei parallelen Ebenen sich befindende Theil einer Kugel, wie *cbmp* wird körperliche Kugelzone und die krumme Oberfläche derselben Kugelzone oder Kugelgürtel genannt.

Abschnitt III.

Zeichnung der Körpernetze.

§. 5. Erklärung.

Werden die Begrenzungsflächen eines Körpers auf einer Ebene so neben einanderliegend dargestellt, daß sie bei richtiger Zusammenlegung wieder den Körperraum einschließen, so heißt diese Zeichnung das Netz des Körpers.

Anmerkung. Bei nachfolgenden Zeichnungen der Körpernetze sind durch stärkere Striche diejenigen Linien bezeichnet, welche beim Ausschneiden aus Pappdeckel ganz durchgeschnitten, und durch feinere Striche solche Linien angedeutet, welche nur zur Hälfte eingeschnitten werden. Gestrichelte Linien geben die zur Construktion nöthigen Hilfslinien an und werden beim Ausschneiden nicht berücksichtigt.

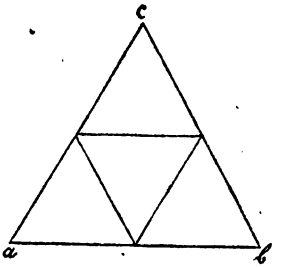
§. 6. Aufgabe.

Das Netz des regelmäßigen Vierflachs (Tetraëders) zu zeichnen. (Fig. 14.)

Digitized by Google

Auflösung. Zeichne ein gleichseitiges Dreieck *abc* (Thl. I. § 32. 3), halbire jede der drei Seiten und verbinde die Halbirungspunkte durch gerade Linien.

Fig. 14.



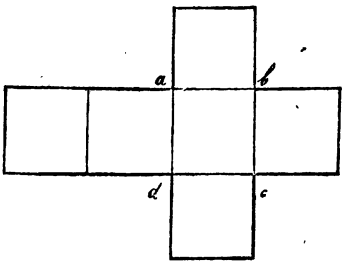
Anmerkung. Ist die Kante des Vierflachs gegeben, so muß *ab* gleich der doppelten Länge derselben angenommen werden.

§. 7. Aufgabe.

Das Netz des regelmäßigen Sechsflachs oder Würfels (Hexaëders) zu construiren. (Fig. 15.)

Fig. 15.

Aufl. Man zeichne ein Quadrat *abcd* und hänge an die Seiten desselben fünf andere von gleicher Größe, wie es die Figur angibt.



§. 8. Aufgabe.

Das Netz des regelmäßigen Achtflachs (Octaëders) zu zeichnen. (Fig. 16.)

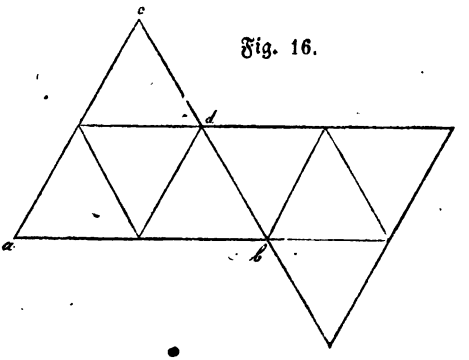


Fig. 16.

Digitized by Google

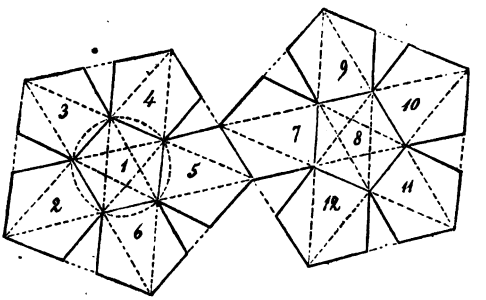
Auflöſ. Man zeichne zuerſt das Netz des regelmäßigen Vierflachs *abc* (§. 6) und hänge an die Seite *bd* ein anderes gleich großes in umgekehrter Lage, wie aus der Figur zu erſehen iſt.

§. 9. Aufgabe.

Conſtruktion des Netzes eines regelmäßigen Zwölfflachs (Dodekaëders). (Fig. 17.)

Auflöſ. Man zeichne in einen Kreis das regelmäßige Fünfeck 1. (Thl. I. §. 60. 5.) und hänge an die Seiten deſſelben

Fig. 17.



andere regelmäßige Fünfecke 2, 3, 4, 5 und 6 von gleicher Größe. Aehnlich, wie dieſe ſechs Fünfecke, conſtruire man die ſechs andern von 7 bis 12 und hänge beide Gruppen mit einer Seite ſo zuſammen, wie vorſtehende Figur anzeigt.

Das nöthige Verfahren um die Fünfecke zu erhalten, iſt aus den geſtrichelten Linien der Figur leicht zu erſehen und bedarf alſo keiner nähern Erörterung.

Anmerkung. Soll die Kante des Zwölfflachs von gegebener Länge ſein, ſo muß das Fünfeck 1 nach Theil I. Anhang I. D. 22 über dieſe Länge conſtruirt werden.

§. 10. Aufgabe.

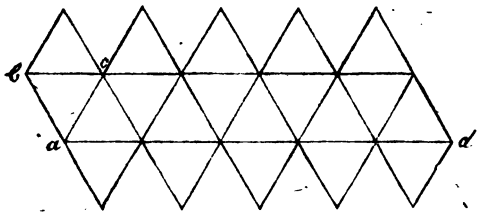
Das Netz des regelmäßigen Zwanzigflachs (Ikoſaëders) zu conſtruiren. (Fig. 18.)

Auflöſ. Zeichne über *bc* (gleich der Kantenlänge) ein gleichſeitiges Dreieck *abc*, verlängere die Seite *bc* und trage

Digitized by Google

sie von *c* aus viermal auf die Verlängerung ab. Ziehe durch *a* die zu *b c* parallele Linie *a d* und trage die Seite des Dreiecks von *a* aus fünfmal auf ihr ab. Verbindet man nun die Theilpunkte, wie die Figur angibt und verlängert

Fig. 18.



die Verbindungslinien bis sie sich schneiden, so erhält man das verlangte Netz.

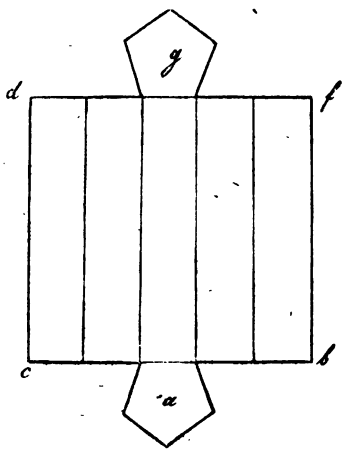
§. 11. Aufgabe.

Das Netz eines senkrechten Prismas zu zeichnen.

1) Für ein fünfseitiges Prisma mit regulärer Grundfläche. (Fig. 19.)

Aufl. Das Fünfeck *a* bilde die Grundfläche. Trage auf der Verlängerung einer Seite desselben, diese Seite noch viermal auf, errichte in den Theilpunkten Senkrechte von gleicher Länge wie *c d*, *b f* u. s. w. (welche gleich der Höhe gemacht werden müssen, wenn diese gegeben ist), ziehe *d f* und construire über einen Theil dieser Linie das obere Fünfeck *g*.

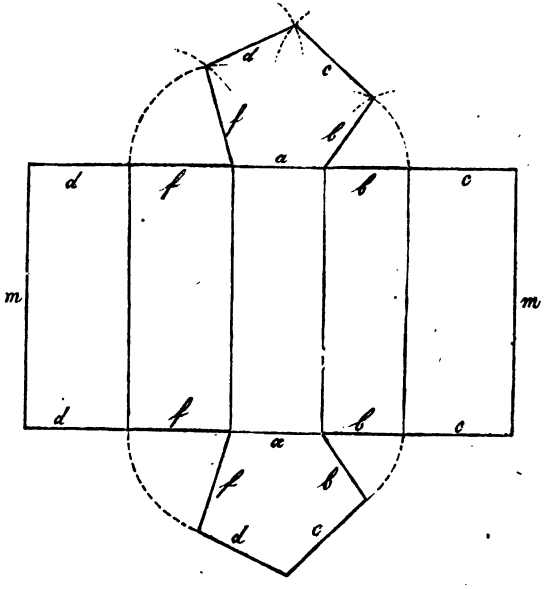
Fig. 19.



Digitized by Google

2) Für ein fünfseitiges Prisma mit unregelmäßiger Basis. (Fig. 20.)

Fig. 20.



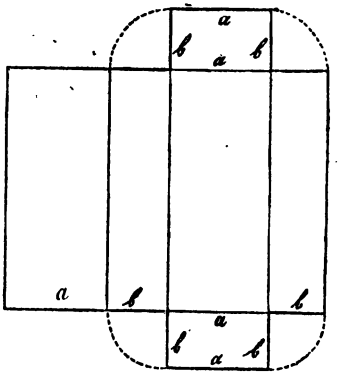
Auflös. *a*, *b*, *c*, *d* und *f* seien die Seiten der Basis. Verlängere eine derselben, z. B. *a* und trage auf ihrer Verlängerung die andern Seiten nach der Reihe neben einander, wie dieses durch die betreffenden Buchstaben an der Figur ausgedrückt ist; errichte alsdann in den Theilpunkten Senkrechte u. s. f. wie in dem vorhergehenden Falle.

Das obere Fünfeck erhält man durch Antragen der Winkel und Seiten des untern Fünfecks. (Vergl. Theil I. Anhang I. 19 und 20.)

3) Für das Parallelepipedum. (Fig. 21.)

Digitized by Google

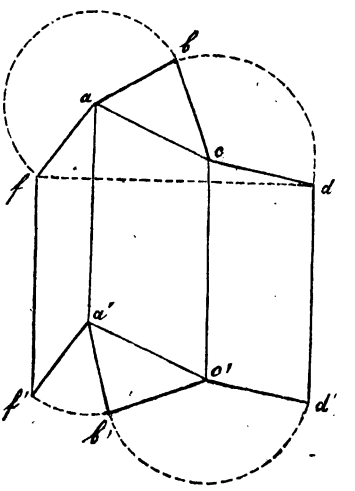
Fig. 21.



Auflöſ. Die Grundfläche wird hier ein Parallelogramm; im Uebrigen ſtimmt die Conſtruktion mit den beiden zuletzt mitgetheilten Auflöſungen überein.

4) Für ein ſchiefes dreiſeitiges Prisma. (Fig. 22).

Fig. 22.



Auflöſ. *abc* ſei eine Grundfläche. Ziehe $af = ab$ unter irgend einem Winkel zu *ac*, nehme die Richtung der Seitenkanten *ff'*, *aa'*, *cc'*, *dd'*, beliebig (wenn nichts näher beſtimmt iſt), aber unter einander parallel an; errichte *fd* ſenkrecht auf *ff'* und ſchlage *cb* nach *cd* auf *fd* ab, ſo fallen beim Zuſammenlegen *f* und *d* mit *b* zuſammen. Der untere Theil des Netzes kann nun leicht beſtimmt werden; indem *f' a'* parallel mit *fa*, *a' c'* und *c' d'* parallel mit *ac* und *cd* gezogen

Digitized by Google

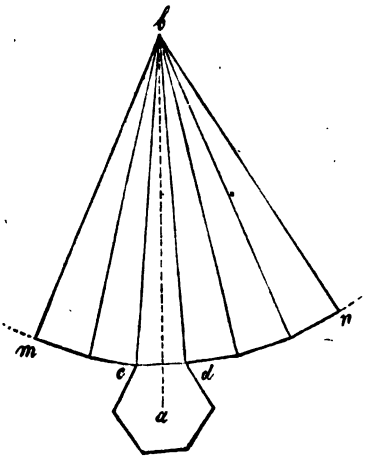
werden. Das △ abc wird zuletzt in die Lage $a'b'c'$ gezeichnet.

§. 12. Aufgabe.

Das Netz einer vollständigen Pyramide zu zeichnen.

1) **Für die sechsseitige Pyramide mit regelmäßiger Basis.** (Fig. 23.)

Fig. 23.



Auflösung. Es sei a die sechsseitige Grundfläche. Halbire eine Seite derselben z. B. cd durch die Senkrechte ab; von einem Punkte b dieser Linie aus beschreibe mit $bc = bd$ den Bogen mn und trage auf diesen die Seite des Sechsecks noch fünfmal auf. Verbindet man nun die Theilpunkte unter sich und mit b, so erhält man das Netz.

Anmerkung. Soll die Kante eine gegebene Länge haben, so nehme man diese in Zirkel und schlage sie von d aus nach b auf ab, um den Mittelpunkt (b) für den Bogen mn zu erhalten.

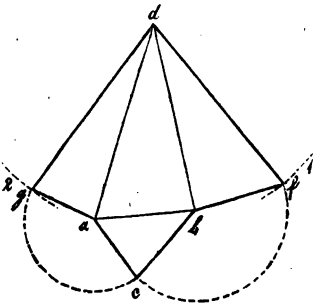
2) **Für eine schiefe dreiseitige Pyramide.** (Fig. 24.)

Auflös. abc sei die Grundfläche, die Seitenkanten sollen die gegebenen Längen ad, bd und gd haben. Man beschreibe über ab mit zwei der gegebenen Seitenkanten ein Dreieck adb, zeichne von d aus mit der dritten Seitenkante die Bogen 1 und 2, durchschneide Bogen 1 von b

Digitized by Google

aus mit bc und Bogen 2 von a aus mit ac und ziehe nach den Durchschnittspunkten die Linien dg, df, ag, bf, so erhält man das Netz.

Fig. 24.



§. 13. Aufgabe.

Das Netz einer fünfseitigen abgekürzten Pyramide mit regelmäßiger Basis zu construiren. — (Fig. 25.)

Auflös. Nachdem man das Netz der vollständigen Pyramide auf die in § 12. 1. angegebene Weise gezeichnet hat, beschreibt man von b aus mit der Seitenkante der Ergänzungspyramide den Bogen pn und verbindet die Durchschnittspunkte desselben mit den Radien durch die Linien d. Beschreibt man nun noch über einen solchen Theil d ein re-

Fig. 25.

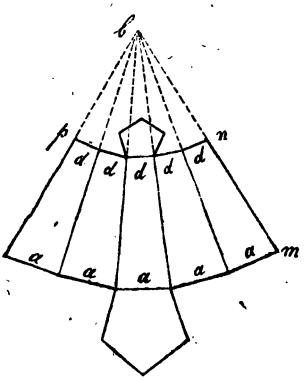
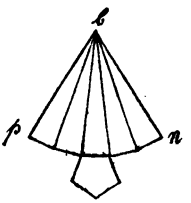


Fig. 26.



Digitized by Google

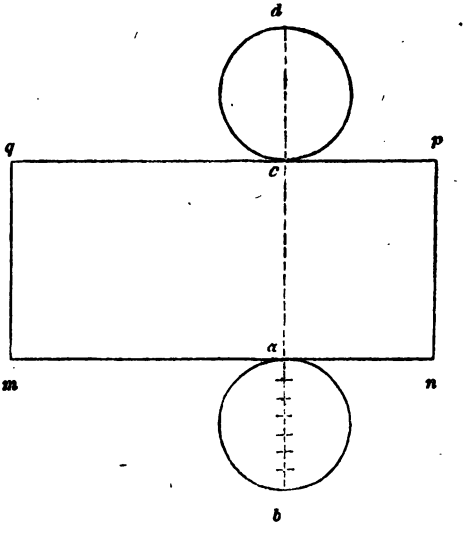
gelmäßiges Fünfeck (Thl. I. Anhang I. 22), so bildet dieses die obere Grundfläche.

Soll auch das Netz der Ergänzungspyramide gezeichnet werden, so construire man den Theil *bpn* nochmals besonders, hänge aber das Fünfeck über *d* in der Art an, wie es Fig. 26 zeigt.

§. 14. Aufgabe.

Das Netz eines senkrechten kreisförmigen Cylinders zu construiren. (Fig. 27.)

Fig. 27.



Auflös. *ab* sei die Grundfläche; ziehe an diese die Tangente *mn*, theile den Durchmesser *ab* in 7 gleiche Theile und trage deren 22, oder was dasselbe ist, dreimal den ganzen Durchmesser und einen solchen Theil auf *mn* ab. (Vgl. Thl. I. §. 63. b. Anmerkung.) Errichte alsdann *np* (gleich der Höhe des Cylinders) senkrecht auf *mn* und construire das Rechteck *mnpq*. Den obern Kreis *cd* beschreibe man mit dem gleichen Halbmesser, wie den untern *ab*, jedoch so, daß er die Linie *qp* berührt.

Digitized by Google

§. 15. Aufgabe.

Das Netz eines vollständigen senkrechten kreisförmigen Kegels zu zeichnen. (Fig. 28.)

Aufl. Verlängere den Durchmesser *ba* des Grundkreises. Beschreibe mit *fa* (gleich der Seite des Kegels) den Kreisbogen *cad* und mache diesen gleich dem Umfange der Grundfläche d. i. = $^{22}/_{7}$ des Durchmessers *ab*.

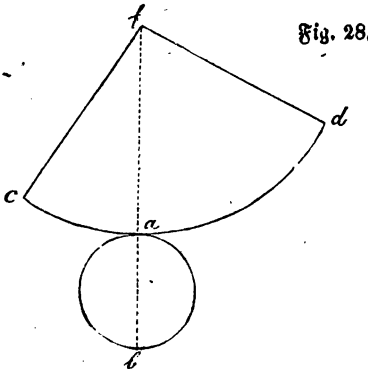
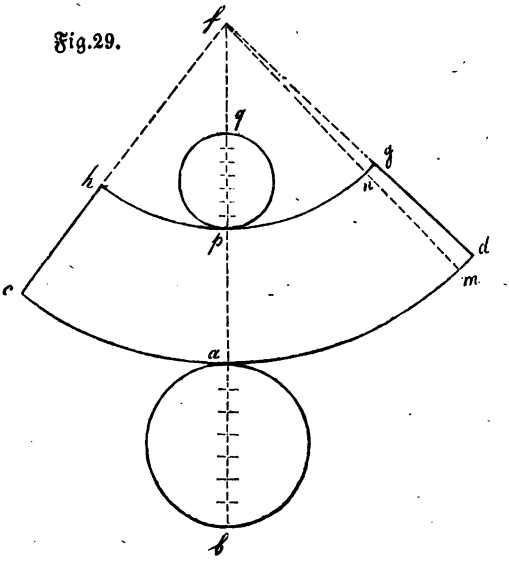


Fig. 28.

§. 16. Aufgabe.

Das Netz für den abgekürzten Kegel zu zeichnen. (Fig. 29.)

Fig. 29.

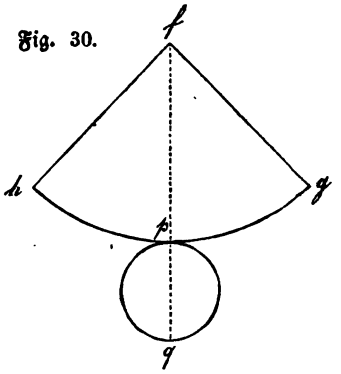


Digitized by Google

Auflöſ. Man zeichne zuerſt das Netz des vollſtändigen Kegels wie in §. 15, und trage alsdann von *d* aus die Seite des abgekürzten Kegels nach *dg*. Iſt dieſe nicht beſtimmt, ſo nehme man Punkt *g* beliebig an. Beſchreibe hierauf von *f* aus mit *fg* den Bogen *gh*, mache *md* gleich $\frac{1}{7}$ des Durchmeſſers *ab*, ziehe *fm* und trage das Stück *gn* von *p* aus 7mal gegen *q*, ſo bildet der Kreis *pq* über dieſen 7 Theilen die obere Grundfläche.

Das Netz des Ergänzungskegels (Fig. 30) erhält man, wenn der Kreis *pq* ſtatt nach der obern Seite von *hpg*, nach abwärts angehängt wird.

Fig. 30.



§. 17. Aufgabe.

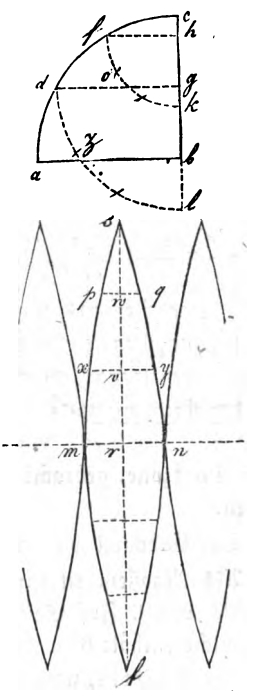
Das Netz einer Kugel zu conſtruiren. (Fig. 31.)

Auflöſung. Iſt der Halbmeſſer der Kugel gegeben, z. B. = *bc*, ſo beſchreibe man damit den Viertelskreis *adcb*, theile den Bogen *adc* in 3 gleiche Theile *ad*, *df*, *fc* und trage einen ſolchen Theil *ad* nach *mn*. Errichte in der Mitte von *mn* die Senkrechte *st*, trage *mn* oder *ad* nach *rv*, *vw* und *ws*, und mache *rt* = *rs*; ſo wird alſo *ts* = 2 *rs* = 2 Bog. *adc* oder gleich dem halben Umfang der Kugel. Zieht man nun *dg* ſenkrecht auf *bc*, ſo gibt dieſe Linie den Halbmeſſer des Kreiſes, nach welchem die Kugel durch eine durch *d* gehende und auf *bc* ſenkrecht ſtehende Ebene geſchnitten wird. Beſchreibt man daher von *g* aus mit *gd* einen Viertelskreis *dl*, theilt dieſen in 3 gleiche Theile und trägt von *v* aus die Hälfte eines ſolchen Theils wie *dz* nach *x* und *y*, ſo bildet *xy* den zwölften Theil des ganzen Umfangs

Digitized by Google

des erwähnten Kreises. Eben so ziehe man fh senkrecht auf bc, zeichne von h aus mit hf den Bogen fk, theile auch diesen in 3 gleiche Theile und trage die Hälfte eines solchen Theils fo von w nach p und q. Führt man nun unterhalb mn dieselbe Construktion aus und zeichnet durch die Punkte s, p, x, m u. s. w. aus freier Hand oder mit dem Schwungholze eine krumme Linie, so stellt diese Figur $smtns$ den zwölften Theil der Kugeloberfläche vor.

Fig. 31.



Construirt man daher 12 solcher Streifen nebeneinander, so bilden diese das Netz der ganzen Kugel.

Abschnitt IV.

Von dem Körpermaaße und dem specifischen Gewichte der Körper.

§. 18. Von den körperlichen Maaßen oder Cubikmaaßen.

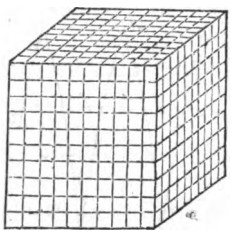
Unter Cubikinhalt eines Körpers versteht man den körperlichen Raum, welchen derselbe einnimmt.

Digitized by Google

Der Cubikinhalt wird erhalten, wenn man untersucht, wie oft ein anderer als Cubik- oder Körpereinheit angenommener Körper in dem zu untersuchenden Körper enthalten ist.

Als Cubikeinheit nehmen wir einen Würfel an, dessen Seite ein Fuß lang ist. Diesen Würfel nennt man Cubikfuß oder Cubikschuh und bezeichnet dies Wort durch c'.

Fig. 32.



Der Cubikfuß enthält 1000 Cubikzolle (bezeichnet durch c''); denn auf der Grundfläche dieses Würfels, welche 1□' oder 100□'' Inhalt hat, können 100 Cubikzolle d. h. 100 Würfel deren Seiten ein Zoll lang sind, gestellt und in den ganzen Würfel oder den Cubikfuß, 10 solcher Schichten von 100 Cubikzollen über einander, also 1000 Cubikzolle, gebracht werden. Fig. 32. wird dieses anschaulich machen.

Der Cubikzoll wird in 1000 Cubiklinien (c''') getheilt.

Als Maaßeinheit für Bruchsteine bedient man sich eines Würfels von 6 Fuß Seite und nennt diesen eine Cubikklafter. Eine solche enthält $6 \times 6 \times 6 = 216$ c' (§. 28. c.).

Die Klafter, nach welcher bei Brennholz gerechnet wird, bildet ein Prisma von 6 Fuß Breite, 6 Fuß Höhe und 4 Fuß Dicke und enthält (§. 26. b. Anmerkung.) $6 \times 6 \times 4 = 144$ c'.

Anmerkungen. 1) Theilt man den Cubikfuß in 18 gleiche Theile, so bildet ein solcher Theil die bad. Maas oder auch das Meßlein. 18 Maas oder auch 18 Meßlein geben also einen Cubikfuß und eine Maas faßt eben so viel, wie ein Meßlein.

2) Bei dem zwölftheiligen Maaßsystem enthält der Cubikfuß 1728 Cubikzolle und der Cubikzoll 1728 Cubiklinien.

§. 19.

Bei der Berechnung bedient man sich auch hier mit Vortheil der Decimalbrüche*).

Wie das Anschreiben der Cubikmaaße in Form von Decimal-

*) Eine kurze Abhandlung der Lehre von den Decimalbrüchen findet man Thl. I. Anhang VI.

Digitized by Google

brüchen geschieht, ist aus folgenden Beispielen, in welchen die Fuße als Ganze gesetzt wurden, leicht zu ersehen.

1) $8\,c'\ 346\,c'' = 8\frac{346}{1000}\,c'$ oder $8{,}346\,c'$ (da $1\,c'' = \frac{1}{1000}\,c'$ also $346\,c'' = \frac{346}{1000}\,c'$).
2) $457\,c'' = \frac{457}{1000}\,c' = 0{,}457\,c'$.
3) $36\,c'\ 27'' = 36\frac{27}{1000}\,c' = 36{,}027\,c'$.
4) $9\,c'' = \frac{9}{1000}\,c' = 0{,}009\,c'$.
5) $7\,c'\ 30\,c'' = 7\frac{30}{100}\,c' = 7\frac{3}{10}\,c' = 7{,}03\,c'$.
6) $47\,c'\ 354\,c''\ 864\,c''' = 47{,}354864\,c'$. ($1\,c' = 1000\,c'' = 1000000\,c'''$, also $1\,c''' = \frac{1}{1000000}\,c'$ und $354\,c''\ 864\,c'''$ oder $354864\,c''' = \frac{354864}{1000000}\,c'$.)
7) $5\,c'\ 24\,c''\ 39\,c''' = 5{,}024039\,c'$.
8) $16\,c'\ 51\,c''' = 16{,}000051\,c'$.

Man bemerkt hieraus zugleich, daß bei den Decimalstellen immer 3 Ziffer zu einer Gattung gehören und daß also umgekehrt gelesen werden muß:

9) $364{,}762504\,c' = 364\,c'\ 762\,c''\ 504\,c'''$.
10) $7{,}425\,c' = 7\,c'\ 425\,c''$.
11) $0{,}7\,c' = 700\,c''$. ($700\,c'' = \frac{700}{1000}\,c' = \frac{7}{10}\,c'$.)
12) $0{,}8426\,c' = 842\,c''\ 600\,c'''$.
13) $34{,}007\,c' = 34\,c'\ 7\,c''$.
14) $728{,}030042\,c' = 728\,c'\ 30\,c''\ 42\,c'''$.
15) $0{,}003005\,c' = 3\,c''\ 5\,c'''$.
16) $72{,}00005\,c' = 72\,c'\ 50\,c'''$.

§. 20. Aufgaben.

1) Wie viel Cubikzoll sind nach dem zehntheiligen Maaßsysteme:

   a) $3\,c'$; b) $25\,c'\ 346\,c''$; c) $764\,c'\ 8\,c''$; d) $5\,c'\ 28\,c''$.

   Resultate: a) $3000\,c''$; b) $25346\,c''$; c) $764008\,c''$; d) $5028\,c''$.

2) Wie viel Cubikzoll geben diese Werthe nach dem zwölftheiligen Systeme?

   Result.: a) $5184\,c''$; b) $43546\,c''$; c) $1320200\,c''$: d) $8668\,c''$.

Digitized by Google

3) Schreibet folgende zehntheilige Maaße in Form von Decimalbrüchen an, in welchen die Fuße die Stelle der Ganzen einnehmen:

a) 84 c′ 546 c″; b) 7 c′ 84 c″; c) 3 c′ 7 c″; d) 54 c″; e) 54 c′ 67 c″ 825 c‴; f) 58 c″ 36 c‴; g) 51 c‴; h) 7 c′ 8 c″ 9 c‴.

Result.: a) 84,546 c′; b) 7,084 c′; c) 3,007 c′; d) 0,054 c′; e) 54,067825 c′; f) 0,058036 c′; g) 0,000051 c′; h) 7,008009 c′.

4) Wie werden folgende Decimalbrüche gelesen?

a) 324,578 c′; b) 19,56 c′; c) 0,784 c′; d) 0,003 c′; e) 8,504623 c′; f) 768,000625 c′; g) 0,034572 c′; h) 7,004038 c′; i) 0,00062 c′; k) 40,050009 c′.

Result.: a) 324 c′ 578 c″; b) 19 c′ 560 c″; c) 784 c″; d) 3 c″; e) 8 c′ 504 c″ 623 c‴; f) 768 c′ 625 c‴; g) 34 c″ 572 c‴; h) 7 c′ 4 c″ 38 c‴; i) 620 c‴; k) 40 c′ 50 c″ 9 c‴.

§. 21.

Von dem specifischen Gewichte der Körper.

Jeder Körper übt, vermöge der Anziehung der Erde, einen Druck auf seine Unterlage aus. Diesen Druck, welchen wir mittelst der gewöhnlichen Waage nach Centner, Pfunden u. s. w. bestimmen können, nennt man das absolute Gewicht oder kurz das Gewicht des Körpers. Die Zahl dagegen, welche angibt, wie viel mal ein Körper schwerer ist als eine gleich große Masse (Volumen) Wasser, heißt sein specifisches Gewicht.

Findet man z. B. das Gewicht eines Cubikfußes Eisen gleich 388,8 ℔ und das Gewicht von einem Cubikfuße Wasser gleich 54 badische ℔*), so gibt 388,8 : 54 = 7,2 und das Eisen ist also

*) Das Gewicht von einem c′ reinem Wasser ist in verschiedenen Staaten auch durch verschiedene Zahlen ausgedrückt. So wiegt 1 bayerisch. c′ = 44,3 bayr. ℔, 1 engl. c′ = 62,5 engl. ℔; 1 gr. hess. c′ = 31,2 hess. ℔; 1 preuß. c′ = 66 preuß. ℔; 1 würtemberger c′ = 50,2 ℔; 1 wiener c′ = 56 ℔ 12 Loth wien. Gewicht. Das specifische Gewicht ist überall dasselbe.

Digitized by Google

7,2 mal schwerer, wie das Wasser, oder das specifische Gewicht des Eisens ist 7,2.

Diese Art, das specifische Gewicht eines Körpers durch Abwägen und Vergleichen mit Wasser zu bestimmen, scheint zwar sehr einfach, allein man wird sich leicht überzeugen, daß sich das Verfahren nicht allgemein in Anwendung bringen läßt. Eine andere kürzere und sicherere Methode werden wir in nachstehendem Paragraphe kennen lernen.

§. 22.

Zur raschen und genauen Bestimmung des specifischen Gewichtes sämmtlicher Körper gibt uns die Naturlehre ein einfaches Mittel an die Hand. Dort wird nämlich nachgewiesen, daß jeder Körper, sobald er in Wasser getaucht wird, so viel an seinem wirklichen (absoluten) Gewichte verliert, als das Volumen Wasser wiegt, welches er bei seinem Eintauchen verdrängt, d. h. als eine Wassermasse wiegt, welche einen ebenso großen Cubikinhalt hat, wie der unter Wasser sich befindende Theil des Körpers, oder, wenn derselbe ganz eingetaucht ist, wie der Körper selbst.

Um daher das specifische Gewicht eines Körpers zu finden, bestimme man zuerst dessen absolutes Gewicht, ziehe hiervon das Gewicht, welches er unter Wasser besitzt, ab und dividire mit dem erhaltenen Gewichtsverlust in das absolute Gewicht.

Wiegt z. B. ein Stück Blei 305 ℔, unter Wasser aber nur 278 ℔, so beträgt sein Gewichtsverlust oder das Gewicht einer gleich großen Wassermasse 305 — 278 = 27 ℔; folglich ist das specifische Gewicht des Bleis

$$= 305 : 27 = 11{,}29 \ldots\ldots$$

Die weitere Behandlung dieses Gegenstandes gehört in das Gebiet der Naturlehre.

Man hat die spec. Gewichte sämmtlicher Körper auf die so eben angeführte Weise genau bestimmt und solche in Tabellen zusammengestellt. Für die in der Praxis wichtigeren Stoffe sind im Anhange IV. die spec. Gewichte angegeben.

§. 23.

Nach Vorhergehendem ist es nun leicht das absolute Gewicht

Digitized by Google

eines Körpers zu berechnen, wenn der Cubikinhalt und das specifische Gewicht desselben bekannt sind.

Beträgt z. B. der Kubikinhalt eines eisernen Würfels 3 Cubikfuß und ist das specifische Gewicht des Eisens = 7,2, so wiegt eine gleich große Wassermasse = 3 × 54 ℔ = 162 ℔ (da 1 c′ Wasser 54 bad. ℔ wiegt), folglich der eiserne Würfel (vergl. §. 21.) = 162 × 7,2 = 1166,4 ℔ oder 11 Centner 66¾ ℔.

Man erhält demnach das Gewicht eines Körpers in Pfunden, wenn man den Cubikinhalt desselben, in Cubikfußen ausgedrückt, mit 54 (dem Gewicht eines c′ Wasser) und das Produkt nochmals mit dem specifischen Gewichte multiplizirt.

Diese Art der Gewichtsbestimmung wird immer dann mit großem Vortheil angewendet, wenn es die Umstände nicht erlauben, Körper mittelst einer Wage abzuwägen, und ist daher für die Praxis von großer Wichtigkeit.

§. 24.

Aus dem in §. 23. ausgesprochenen Satze ergibt sich zugleich folgende, ihrer häufigen Anwendung wegen, ebenfalls sehr wichtige Regel:

Kennt man das absolute und das spezifische Gewicht eines Körpers, so wird der Cubikinhalt desselben in Cubikfußen gefunden, wenn man das specifische Gewicht mit dem Gewichte eines Cubikfußes Wasser multiplizirt und mit dem Produkte in das in Pfunden ausgedrückte absolute Gewicht dividirt.

Beträgt z. B. das Gewicht eines Stück Kupfers 18 ℔ und das specifische Gewicht 8,8; so hat man 54 × 8,8 = 475,2; also ist der Cubikinhalt = 18 : 475,2 = 180 : 4752 = 0,037876 c′ oder 37 c″ 876 c‴.

§. 25. Beispiele.

1) Wie schwer ist ein Postament von Marmor, dessen Cubikinhalt 48 c′ 475 c″ beträgt?

Auflös. Das specifische Gewicht des Marmors ist 2,8 (siehe Anhang IV.), also nach §. 23. das Gewicht des Postaments

Digitized by Google

$= 48{,}475 \times 54 \times 2{,}8 = 7329{,}42$ ℔ oder 73 Centner 29 ℔ 13 Loth.

Anmerkung. Nach preuß. Systeme erhält man $48\frac{475}{1728} \times 66 \times 2'8 = 8921{,}2$ ℔.

2) Eine Pyramide von Sandstein, dessen specifisches Gewicht = 2,5 ist, hat einen Cubikinhalt von 825 c′; wie groß ist das Gewicht derselben?

Auflös. Nach §. 23. findet man das Gewicht $= 825 \times 54 \times 2{,}5 = 111375$ ℔ oder 1113 Ctr. 75 ℔.

3) Der Cubikinhalt eines tannenen Stammes wurde zu 132 c′ berechnet; wie schwer ist dieser, wenn das specifische Gewicht des Tannenholzes 0,55 beträgt?

Auflös. Das Gewicht ist $= 132 \times 54 \times 0{,}55 = 3920{,}4$ ℔ oder 39 Ctr. $20\frac{1}{2}$ ℔.

Anmerkung. Nach bayerisch. Syst. würde man finden: $132 \times 44{,}3 \times 0{,}55 = 3216\frac{9}{10}$ ℔.

4) Eine gußeiserne Walze wiegt $1555\frac{1}{5}$ ℔; wie groß ist der Cubikinhalt derselben?

Auflös. Da nach Anhang IV. das specifische Gewicht des Gußeisens = 7,2 und $54 \times 7{,}2 = 388{,}8$ ist, so folgt nach §. 24. der Cubikinhalt $= 1555{,}2 : 388{,}8 = 4$ Cubikfuß.

Anmerkung. Bezeichnete die Angabe würtemberger Gewicht, so erhielte man für den Cub.-Inh. $= 1555{,}2 : 50{,}2 \times 7{,}2 = 1555{,}2 : 361{,}44 = 4\frac{3}{10}$ c′.

5) Ein Kupferdraht wiegt 8 Loth, welchen Cubikinhalt besitzt dieser, das specifische Gewicht zu 8,8 gerechnet?

Auflös. Nach §. 24. wird der Cubikinhalt $= \frac{\frac{1}{4}}{54 \times 8{,}8}$ (da 8 Loth $= \frac{1}{4}$ ℔) oder $= 0{,}25 : 475{,}2 = 0{,}000526$ c′ oder 526 c‴.

6) Ein Gefäß von Zinn wiegt 2 ℔ 12 Loth, wie groß ist das Volumen des Zinns, wenn das specifische Gewicht desselben = 7 angenommen wird?

Auflös. $54 \times 7 = 378$, folglich das Volumen (§. 24.) $= 2\frac{3}{8} : 378 = 2{,}375 : 378 = 0{,}006283$ c′ oder 6 c″ 283 c‴.

Digitized by Google

Abschnitt V.

Berechnung der Körper.

§. 26. Berechnung des Prismas.

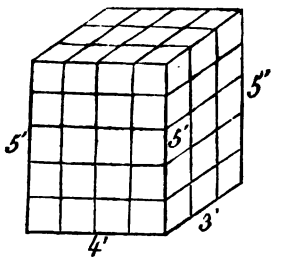
a) Um die ganze Oberfläche eines senkrechten Prismas zu finden, multiplicire man den Umfang der Grundfläche mit der Höhe des Körpers und addire zum Produkte noch den doppelten Inhalt der Grundfläche.

Der Grund dieses Verfahrens ergibt sich aus der Betrachtung der Netze Fig. 19, 20 und 21.

b) Der Cubikinhalt eines Prismas wird gefunden, wenn man den Inhalt der Grundfläche mit der Höhe (Länge) des Körpers multiplicirt.

Der Grund dieses Verfahrens ist aus folgendem Beispiele zu ersehen.

Fig. 33.



Die Grundfläche des Prismas sei ein Rechteck (Fig. 33.) mit 3′ und 4′ langen Seiten, die Höhe betrage 5′, so ist der Inhalt der Grundfläche $= 3 \times 4 = 12 \square'$ und es können somit auf dieser 12 Cubikeinheiten d. h. 12 Würfel je von der Größe eines Cubikfußes neben einander gestellt werden. Da das Prisma 5′ hoch ist, so läßt sich dasselbe als aus 5 Schichten solcher 12 Cubikfuße bestehend denken und sein Cubikinhalt wird also $5 \times 12 = 60$ Cubikfuß betragen.

Wie hier für das vierseitige, so läßt sich nun leicht aus diesem die Richtigkeit des oben ausgesprochenen Satzes für das dreiseitige und hieraus für jedes andere vielseitige Prisma nachweisen.

Anmerkung. Aus dem angeführten Beispiele geht hervor, daß der

Digitized by Google

Cubikinhalt eines vierseitigen Prismas mit rechteckiger Grundfläche auch gefunden werden kann, indem man drei aneinander stoßende Seitenkanten mit einander multiplicirt.

So ist in vorliegendem Falle der Cub. Inhalt $= 4 \times 3 \times 5$ wieder $= 60$ c'.

c) Aus b folgt, daß man bei gegebenem Cubikinhalte und bekannter Höhe den Inhalt der Grundfläche erhält, wenn man mit der Höhe in den Cubikinhalt dividirt, und

d) daß, wenn der Cubikinhalt und die Grundfläche gegeben sind, die Höhe durch Division der Grundfläche in den Cubikinhalt bestimmt wird.

Anmerkung. Für den in der Anmerkung zu b gegebenen Fall findet man immer die eine Ausdehnung (Dimension), wenn man mit dem Produkte der beiden andern in den Cubikinhalt dividirt.

§. 27. Beispiele.

Anmerkung. Bei vielen der nachfolgenden Beispielen ist die Auflösung auch nach zwölftheil. Maaßsysteme angegeben, was dann immer durch Vorsetzen von A. n. z. M. angedeutet ist. Wenn nichts bemerkt wurde, so liegt der Auflösung immer das bad. Maaßsystem zu Grunde.

1) Wie groß ist der Cubikinhalt eines Prismas von 7′ 4″ Höhe, dessen Grundfläche ein Fünfeck von 8 □′ 64 □″ Inhalt bildet?

Auflös. Nach §. 26. b. ist der Cubikinhalt $= 8{,}64 \times 7{,}4 = 63{,}936$ c′ oder 63 c′ 936 c″.

A. n. z. M. 8 □′ 64 □″ $= 1216$ □″; 7′ 4′ $= 88$″; folglich Cub.-Inh $= 1216 \times 88 = 107008$ c″ $= 61\frac{21}{27}$ c′.

2) Der Cubikinhalt eines Prismas von quadratischer Basis beträgt 48 c′ 654 c″, seine Höhe mißt 8′ 5″; wie groß ist der Inhalt der Grundfläche, und wie lang ist eine Seite derselben?

Auflös. Nach §. 26. c. ist der Inhalt der Grundfläche $= 48{,}654 : 8{,}5 = 486{,}54 : 85 = 5{,}724$ □′ folglich (nach Thl. I. §. 36. b.) eine Seite dieser $= \sqrt{5{,}724} = 2{,}39$′ oder 2′ 3″ 9‴.

A. n. z. M. 48 c′ 654 c″ $= 83598$ c″; 8′ 5″ $= 101$″; folglich die Grundfläche $= 83598 : 101 = 827{,}7$ □″ und eine Seite $= \sqrt{827{,}7} = 28{,}7$″ $= 28$″ $8\frac{1}{2}$‴.

Digitized by Google

3) Ein sechsseitiges Prisma hat einen Cubikinhalt von 364 c′ 72 c″, der Inhalt der Grundfläche beträgt 20 □′ 45 □″; wie hoch ist das Prisma?

Auflös. Nach §. 26. d. wird die Höhe = 364,072 : 20,45 = 36407,2 : 2045 = 17,803′ oder 17′ 8″ $\frac{3}{10}$‴.

A. n. z. M. $364\frac{72}{125}$ c′ = 364,0416; $20\frac{45}{144}$ □′ = 20,3125 □′; also Höhe = 364,0416 : 29,3125 = 17,92′ = 17′ 11″.

4) Eine eiserne Stange hat eine Länge von 16′ und einen quadratischen Querschnitt von 8‴ Seite, wie viel wiegt dieselbe, das specifische Gewicht zu 7,2 gerechnet?

Auflös. Inhalt der Grundfläche = 0,08′ × 0,08′ = 0,0064 □′, folglich Cub.-Inh. des Eisenstabs (§. 26. b.) = 0,0064 × 16 = 0,1024 c′ also sein Gewicht nach §. 23. = 0,1024 × 54 × 7,2 = 39,81312 ℔ oder 39 ℔ 26 Loth.

A. n. z. M. 16′ = 2304‴; Grundfläche = 64 □‴; Cub.-Inh. = 147456 c‴ = $85\frac{1}{2}$ c″ u. s. w.

5) Wie groß ist der Cubikinhalt eines Prismas von Blei, dessen absolutes Gewicht 8 ℔ 24 Loth beträgt?

Auflös. Das specifische Gewicht des Bleis ist 11,36; folglich nach §. 24 (da 54 × 11,36 = 613,44), der Cubikinhalt des Prismas = $8\frac{3}{4}$: 613,44 = 8,75 : 613,44 = 875 : 61344 = 0,014263 c′ oder 14 c″ 263 c‴.

6) Ein 12 Fuß hohes Prisma von Sandstein hat ein regelmäßiges Achteck von 12 Zoll langer Seite zur Grundfläche; wie groß ist die Oberfläche, der Cubikinhalt und das Gewicht desselben?

Auflös. Inhalt eines Seitenrechtecks = 1,2 × 12 = 14,4 □′, also Inhalt aller Rechtecke = 14,4 × 8 = 115,2 □′. Inhalt der Grundfläche (nach Thl. I. §. 61. d. da S = 1,2′ ist) = 4,828 × 1,2 × 1,2 = 6,95232 □′, demnach Inhalt beider Grundflächen = 6,95232 × 2 = 13,90464 □′, folglich die Oberfläche des Prismas = 115,2 □′ + 13,90464 □′ = 129,10464 □′ oder 129 □′ 10 □″ 46$\frac{1}{2}$ □‴ und der Cubikinhalt = 6,95232 × 12 = 83,42784 c′ oder 83 c′ 427 c″ 840 c‴.

Digitized by Google

Hieraus nach §. 23. das Gewicht des Körpers, wenn das specifische Gewicht zu 2,5 gerechnet wird

$= 83{,}42784 \times 54 \times 2{,}5 = 11262{,}7584$ ℔

oder 112 Centner $62\frac{3}{4}$ ℔.

7) Eine zwischen zwei Häuser stehende Mauer ist 45′ lang, 8′ hoch und 1′ 6″ breit; wie groß ist die Oberfläche derselben, wie hoch kommt der Anstrich, wenn der Quadratschuh mit 2 Kreuzer bezahlt wird, und was kostet die Aufführung dieser Mauer, wenn man den Cubikfuß mit Arbeitslohn zu 6 Kreuzer rechnet?

Auflös. Inhalt der obern Fläche $= 45 \times 1{,}6 = 72 \square'$

Inhalt der beiden Seitenflächen

$= 45 \times 8 \times 2 = 720 \square'$

folglich die Oberfläche der Mauer

$= 720 \square' + 72 \square' = 792 \square'$;

daher kostet der Anstrich 792×2 kr. = 26 fl. 24 kr.

Cubikinhalt der Mauer $= 45 \times 1{,}6 \times 8 = 576$ c′ also

Betrag der Baukosten $= 576 \times 6$ kr. = 57 fl. 36 kr.

A. n. z. M. Oberfläche $= 787\frac{1}{2} \square'$. Anstrich = 26 fl. 15 kr. Cub.-Inh. $= 45 \times 8 \times 1\frac{1}{2} = 540$ c′. Baukosten = 54 fl.

8) Ein Wasserbehälter ist im Lichten 7′ lang, $4\frac{1}{2}$′ breit und 3′ tief; wie viel Maaß Wasser faßt derselbe?

Auflös. Inhalt des Bodens $= 7 \times 4{,}5 = 31{,}5 \square'$

folglich der Cubikinhalt $= 31{,}5 \times 3 = 94{,}5$ c′. Da nun eine Maas den achtzehnten Theil eines Cubikfußes ausmacht (Anmerkung 1. zu §. 18), also ein Cubikfuß 18 Maas faßt, so geben 94,5 Cubikfuß $94{,}5 \times 18$ oder 1701 Maas.

9) Es soll ein Keller von der Form eines Prismas gegraben werden. Wie viele Fuhren sind nöthig um die Erde wegzubringen, wenn der Wagen 20 Cubikfuß faßt und der Keller 42′ lang 19′ breit und 15′ hoch werden soll.

Auflös. Cubikinhalt des Kellers, also auch der wegzuschaffenden Erde (§. 26. b. Anmerk.).

$= 42 \times 19 \times 15 = 11970$ c′,

folglich sind zur Wegbringung nöthig

$11970 : 20 = 599$ Fuhren.

Digitized by Google

A. n. z. M. Diese wird, da in der Angabe keine Zolle vorkommen, mit obiger Auflösung übereinstimmen.

Warum werden aber in der Wirklichkeit mehr Fuhren nöthig sein, als sich bei der Rechnung ergibt?

10) Es soll ein prismatisches oben offenes Gefäß verfertigt werden, welches 4 Maas Wasser faßt. Wenn dessen Grundfläche ein Quadrat von 4 Zoll Seite bilden soll; wie hoch muß alsdann das Gefäß werden und wie viel Blech ist zur Verfertigung desselben erforderlich?

Auflös. Da eine Maas $\frac{1}{128}$ Cubikfuß ausmacht (§. 18. Anmerkung 1.), so geben 4 Maas $\frac{4}{128}$ oder $\frac{1}{32}$ c′ und da ferner der Inhalt der quadratischen Basis gleich

$$0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}16 \square'$$

beträgt, so wird nach §. 26. d., die Höhe des Gefäßes gleich

$$\frac{1}{32} : 0{,}16 = 0{,}22222 : 0{,}16 = 22{,}222 : 16 = 1{,}388'$$

oder $1' 3'' 8\frac{1}{3}'''$.

Der Inhalt der vier Seitenflächen ist gleich

$$0{,}4 \times 1{,}388 \times 4 = 2{,}2208 \square';$$

demnach sind zur Verfertigung erforderlich

$$2{,}2208 + 0{,}16 = 2{,}3808 \square'$$

oder $2 \square' 38 \square'' 8 \square'''$ Blech.

11) Eine Mauer von 65 Fuß Länge, 7 Fuß Höhe und 18 Zoll Dicke soll mit Backsteinen aufgeführt werden, von denen jeder 9 Zoll lang, $4\frac{1}{2}$ Zoll breit und 2 Zoll dick ist (die Lage des Mörtels eingerechnet); wie viel Backsteine sind zur Aufführung erforderlich und wie theuer kommen diese, wenn 100 Stück 2 fl. kosten.

Auflös. Cubikinhalt der Mauer

$$= 65 \times 1{,}8 \times 7 = 819 c'.$$

Cubikinhalt eines Backsteines =

$$0{,}9 \times 0{,}45 \times 0{,}2 = 0{,}081 c';$$

folglich sind zur Aufführung nöthig

$$819 : 0{,}081 = 819000 : 81 = 10111 \text{ Backsteine.}$$

Da 100 Stück 2 fl. kosten, so kostet 1 Stück $\frac{2}{100}$ fl. also

$$10111 \text{ Stück } \frac{2 \times 10111}{100} = \frac{20222}{100} = 202\frac{1}{10} \text{ fl.}$$

oder 202 fl. 13 kr.

A. n. z. M. Anzahl der Backsteine $= 1415232 : 81 = 17472$ Stück.
Preis $= 349\frac{1}{10}$ fl.

Digitized by Google

12) Wie viel Quadratfuß Bretter lassen sich aus einem 15 Fuß langen, 2 Fuß dicken und 2½ Fuß hohen Baumstamme schneiden, wenn jedes Brett 1¼ Zoll dick werden soll; wie groß ist ferner der Cubikinhalt dieses Stammes und wie theuer kommt derselbe zu stehen, wenn der Cubikfuß mit 26 Kreuzer bezahlt wird?

Auflös. Wird der Stamm parallel zur 2 Fuß langen Seite durchgeschnitten, so liefert derselbe so viele Bretter, als 1¼ Zoll in 2½ Fuß enthalten sind. Dieses gibt 20 Stück. Da nun jedes Brett 15 Fuß lang und 2 Fuß breit ist, also einen Flächeninhalt von $15 \times 2 = 30 \square'$ hat, so liefert der Stamm im Ganzen 30×20 oder $600 \square'$ Bretter.

Der Cubikinhalt des Baumstammes ist

$$15 \times 2 \times 2{,}5 = 75\,c'$$

demnach kostet er 75×26 kr. = 32 fl. 30 kr.

Anmerkung. Nimmt man auf den etwa 1‴ breiten wegfallenden Sägeschnitt Rücksicht, so findet man nur 18 bis 19 Bretter.

§. 28. Berechnung des Würfels.

a) Die Oberfläche eines Würfels ist gleich dem sechsfachen Inhalte eines Seitenquadrats.

Vergl. das Netz Fig 15.

b) Umgekehrt findet man die Seite eines Würfels aus der Oberfläche, wenn man diese durch 6 theilt und aus dem Resultate die Quadratwurzel zieht. (Thl. I. §. 36. b.)

c) Um den Cubikinhalt eines Würfels zu finden, multiplicire man die Seite desselben dreimal mit sich selbst.

Betrachtet man nämlich den Würfel als ein vierseitiges Prisma, bei welchem die Höhe, Breite und Länge gleich sind z. B. = 8′, so ist nach der Anmerkung zu §. 26 b. der Cubikinhalt $= 8 \times 8 \times 8 = 512\,c'$.

d) Um die Seite eines Würfels zu bestimmen, wenn der Cubikinhalt gegeben ist, hat man nach c, eine Zahl zu suchen, welche dreimal mit sich multiplizirt den Cubikinhalt zum Produkte hat.

Das Auffinden einer solchen Zahl geschieht durch das Ausziehen der Cubikwurzel. Es ist dieses ein besonderes

Digitized by Google

Rechnungsverfahren, welches zu erklären der Inhalt der nächsten Paragraphen sein soll.

§. 29. Vom Ausziehen der Cubikwurzel.

Multiplicirt man eine Zahl dreimal mit sich selbst, so wird das Produkt die Cubikzahl der ersten Zahl genannt. Der Cubikinhalt eines Würfels stellt also eine solche Cubikzahl vor. Um nun wieder rückwärts die Zahl zu bestimmen, welche nach dreimaliger Multiplikation mit sich selbst eine gegebene Cubikzahl zum Produkte hat, muß man die Cubikwurzel aus dieser Zahl ziehen. Das Geschäft selbst deutet man durch Vorsetzen des Zeichens $\sqrt[3]{}$ vor die Cubikzahl an. So ist z. B. die Cubikzahl von $6 = 6 \times 6 \times 6 = 216$, also umgekehrt $\sqrt[3]{216} = 6$.

Nachstehende Tabelle enthält die Cubikzahlen aller einziffrigen Zahlen, und jedem Lernenden ist es anzurathen, diese dem Gedächtnisse wohl einzuprägen.

Cubikzahl	von	1	=	1
"	"	2	=	8
"	"	3	=	27
"	"	4	=	64
"	"	5	=	125
"	"	6	=	216
"	"	7	=	343
"	"	8	=	512
"	"	9	=	729.

§. 30.

Um die Cubikwurzel aus einer ganzen Zahl z. B. aus 110592 zu ziehen, verfährt man auf folgende Weise:

$\sqrt[3]{110|592|} = 48$

$(4 \times 4 \times 4 =)$ 64

465(92 : 48 $(= 4 \times 4 \times 3)$

96 $(= 4 \times 8 \times 3)$

$(5824 \times 8 =)$ 465 92 64 $(= 8 \times 8)$

..... 5824

Man theile die Zahl von der Rechten gegen die Linke in dreistellige Classen und bestimme die

Digitized by Google

zunächst kleinere Cubikzahl der ersten Classe 110. Man findet dafür in vorhergehender Tabelle 64. Ziehe diese 64 von der ersten Classe 110 ab und setze nach dem Gleichheitszeichen die Cubikwurzel von 64 oder 4. An den Rest 46 hänge man alsdann die folgende Classe 592 an und dividire die erhaltene Zahl, nachdem man die zwei letzten Ziffern abgestrichen hat, (also 465) durch das Produkt, welches erhalten wird, wenn man die zuerst gefundene Zahl 4 mit sich und nochmals mit 3 multiplicirt, also durch $4 \times 4 \times 3 = 48$. Es gibt aber $465 : 48 = 8$, welche Ziffer 8 als zweite Ziffer nach dem Gleichheitszeichen zu schreiben ist. Nun multiplicire man die gefundene Ziffer 8 mit der vorhergehenden Ziffer 4, gibt 32 und dies nochmals mit 3, gibt 96 und schreibe dieses Resultat 96 so unter 48, daß die letzte Ziffer 6 um eine Stelle gegen die Rechte vorsteht; dann multiplicire man 8 noch mit sich, gibt 64 und schreibe diese 64 abermals so unter 96, daß wieder die letzte Ziffer um eine Stelle gegen rechts vorsteht, addire hierauf die drei unter einander stehenden Zahlen, multiplicire die Summe mit der gefundenen zweiten Ziffer 8 und ziehe das Produkt von 46592 ab. Da die Subtraktion aufgeht, so folgt also, daß die Cubikwurzel aus 110592 $= 48$ sei.

Anmerkung. Um die Richtigkeit des Resultats zu prüfen (die Probe zu machen), multiplicire man die gefundene Cubikwurzel 48 dreimal mit sich, so muß wieder die gegebene Cubikzahl 110592 zum Vorschein kommen. Es ist in der That wieder $48 \times 48 \times 48 = 110592$, also der gefundene Werth richtig.

§. 31.

Ist die Zahl, aus welcher die Cubikwurzel gezogen werden soll, mehr als sechsziffrig, so theile man diese ebenfalls von rechts gegen links in dreistellige Classen und hänge im Reste, nachdem man zwei Ziffer der zu suchenden Zahl gefunden hat, die dritte Classe an. Man verfahre alsdann beim Bestimmen der dritten Ziffer ähnlich wie oben beim Aufsuchen der zweiten, nur nehme man jetzt, statt der ersten Ziffer 4 nach dem Gleichheitszeichen in vorigem Beispiele, die schon gefundene zweiziffrige Zahl in Rechnung.

Folgendes Beispiel wird das Verfahren klar machen.

Digitized by Google

$$\sqrt[3]{335|702|375|} = 695$$

$(6 \times 6 \times 6 =)$ 216

1197(02 : 108 $(= 6 \times 6 \times 3)$

162 $(= 6 \times 9 \times 3)$

$(12501 \times 9 =)$ 1125 09 81 $(= 9 \times 9)$

12501

71933(75 : 14283 $(= 69 \times 69 \times 3)$

1035 $(= 69 \times 5 \times 3)$

$(1438675 \times 5 =)$ 71933 75 25 $(= 5 \times 5)$

1438675

Probe: $695 \times 695 \times 695 = 335702375$.

§. 32.

Geht die Subtraktion zuletzt nicht auf, so hänge man als folgende Classe drei Nullen im Reste an, und trenne die weiter gefundenen Ziffern von den schon bestimmten durch ein Comma. Z. B.

$$\sqrt[3]{507|246|} = 79{,}75$$

$(7 \times 7 \times 7 =)$ 343

1642(46 : 147 $(= 7 \times 7 \times 3)$

189 $(= 9 \times 7 \times 3)$

$(16671 \times 9 =)$ 1500 39 81 $(= 9 \times 9)$

16671

142 070(00 : 18723 $(= 79 \times 79 \times 3)$

1659 $(= 79 \times 7 \times 3)$

$(1888939 \times 7 =)$ 132 225 73 49 $(= 7 \times 7)$

1888939

9844 270(00 : 1905627 $(= 797 \times 797 \times 3)$

11955 $(= 797 \times 5 \times 3)$

$(190682275 \times 5 =)$ 9534 113 75 25 $(= 5 \times 5)$

310 156 25 190682275

Anmerkung. Um in diesem Falle die Probe zu machen, multiplicire man das Resultat 79,75 dreimal mit sich, und addire zum Produkt noch den Rest 31015625, indem man diesen ohne Rücksicht auf die Decimalstellen von rechts gegen links darunter setzt.

Es ist $79{,}75 \times 79{,}75 \times 79{,}75 = 507214{,}984375$

Hierzu addirt 31015625

gibt wieder 507246,000000

Digitized by Google

§. 33.

Ist die Cubikwurzel aus einem Decimalbruche zu ziehen, so theile man diesen von dem Comma aus gegen rechts und links in dreistellige Classen und verfahre wie oben gelehrt wurde. In dem Resultate mache man aber, sobald die erste Classe der Decimalstellen heruntergenommen wird, ein Comma.

Bleibt bei dem Eintheilen in dreistellige Classen in den Decimalstellen zuletzt nur eine ein- oder zweiziffrige Classe übrig, so ergänze man diese durch Anhängen von Nullen zur vollständigen Classe.

Zur Erläuterung mögen folgende Beispiele dienen.

1) $\sqrt[3]{6|543|,728|625|} = 18{,}704$

1
55(43 : 3 (= 1 × 1 × 3)
24 (= 1 × 8 × 3)
(604 × 8 =) 48 32 64 (= 8 × 8)
604

7 11 7(28 : 972 (= 18 × 18 × 3)
378 (= 18 × 7 × 3)
(101029 × 7 =) 7 07 2 03 49 (= 7 × 7)
101029

4 5256(25 : 104907 (= 187 × 187 × 3)
45256250(00 : 10490700 (= 1870 × 1870 × 3)
22440 (= 1870 × 4 × 3)
(1049294416 × 4 =) 41971776 64 16 (= 4 × 4)
3284473 36 1049294416

2) $\sqrt[3]{0{,}0000314} = \sqrt[3]{0|,000|031|400|} = 0{,}0315$

(3 × 3 × 3 =) 27
44(00 : 27 (= 3 × 3 × 3)
9 (= 3 × 1 × 3)
(2791 × 1 =) 27 91 1 (= 1 × 1)
2791

16 090(00 : 2883 (= 31 × 31 × 3)
465 (= 31 × 5 × 3)
(292975 × 5 =) 14 648 75 25 (= 5 × 5)
1 441 25 292975

Digitized by Google

§. 34.

Wenn die Cubikwurzel aus einem gewöhnlichen Bruche zu ziehen ist, so verwandelt man am einfachsten diesen in einen Decimalbruch und zieht hieraus nach §. 33. die Cubikwurzel. Z. B.

$$\sqrt[3]{38\tfrac{11}{16}} = \sqrt[3]{38{,}6875} = \sqrt[3]{38|,687|500|} = 3{,}38$$

27

11 6(87 : 27

27

8 9 37 9

2979

2 7 505(00 : 3267

792

2 6 774 72 64

730 28 334684

u. s. w.

§. 35. Aufgaben.

Löset folgende Beispiele:

a) $\sqrt[3]{3375}$; b) $\sqrt[3]{24389}$; c) $\sqrt[3]{592704}$; d) $\sqrt[3]{15438249}$; e) $\sqrt[3]{248{,}858189}$; f) $\sqrt[3]{0{,}000672221376}$; g) $\sqrt[3]{4{,}72}$; h) $\sqrt[3]{716}$; i) $\sqrt[3]{4257{,}38546}$; k) $\sqrt[3]{\tfrac{11}{12}}$; l) $\sqrt[3]{364\tfrac{1}{4}}$; m) $\sqrt[3]{17\tfrac{1}{64}}$.

Resultate. a) 15; b) 29; c) 84; d) 249; e) 6,29; f) 0,0876; g) 1,6774; h) 8,9461; i) 16,2074; k) 0,70051; l) 7,1454; m) 2,57207..

§. 36.

Beispiele über die Berechnung des Würfels.

1) Wie groß ist die Oberfläche und der Cubikinhalt eines Würfels, dessen Seite 3′ 8″ lang ist?

Digitized by Google

Auflösung. Inhalt eines Seitenquadrats $= 3{,}8 \times 3{,}8 = 14{,}44\,\square'$; folglich nach §. 28. a. die Oberfläche $= 14{,}44\,\square' \times 6 = 86\,\square'\,64\,\square''$ und nach §. 28. c. der Cubikinhalt $= 3{,}8 \times 3{,}8 \times 3{,}8 = 54{,}872\,c'$ oder $54\,c'\,872\,c''$.

A. n. z. M. Oberfläche $= 80\,\square'\,96\,\square''$; Cubikinhalt $= 49\,c'\,512\,c''$.

2) Man kennt den Flächeninhalt des Seitenquadrats eines Würfels gleich $13\,\square'\,24\,\square''\,96\,\square'''$; wie groß ist der Cubikinhalt dieses Würfels?

Auflösung. Die Seite des Quadrats ist (Thl. I. §. 36. b.) $= \sqrt{13{,}2496} = 3{,}64'$; also der Cubikinhalt nach §. 28. c. $= 3{,}64 \times 3{,}64 \times 3{,}64 = 48{,}228544\,c'$ oder $48\,c'\,228\,c''\,544\,c'''$.

A. n. z. M. Seite $= \sqrt{273120} = 522\,c'''$. Cubikinhalt $= 47\,c'\,1289\,c''$.

3) Der Cubikinhalt eines Würfels beträgt $418\,c'\,508\,c''\,992\,c'''$; wie groß ist eine Seite und die Oberfläche desselben?

Auflösung. Nach §. 28. d. ist die Seite $= \sqrt[3]{418{,}508992} = 7{,}48'$ oder $7'\,4''\,8'''$; folglich nach §. 28. a. die Oberfläche $= 7{,}48 \times 7{,}48 \times 6 = 335{,}7024\,\square'$ oder $335\,\square'\,70\,\square''\,24\,\square'''$.

A. n. z. M. Seite $= \sqrt[3]{1249020128}\,c''' = 1076{,}9''' = 7'\,5''\,8\frac{9}{10}'''$.

4) Die Seite eines Würfels von Marmor mißt $2'\,5''$; wie groß ist das Gewicht desselben?

Auflös. Cubikinhalt $= 2{,}5 \times 2{,}5 \times 2{,}5 = 15{,}625\,c'$ folglich das Gewicht, wenn das spec. Gewicht des Marmors $= 2{,}7$ gesetzt wird $= 15{,}625 \times 54 \times 2{,}7 = 2278{,}125\,\text{℔}$ oder 22 Ctr. $78\frac{1}{2}\,\text{℔}$.

A. n. z. M. Legt man hierbei das preuß. Maaß- und Gewichtssystem zu Grunde, wie dies für solche Fälle immer geschehen soll, so folgt: Cubikinhalt $= 24389\,c''$; also das Gewicht $= \frac{66 \times 24389 \times 2{,}7}{1728}$ $= 2515\,\text{℔}$.

5) Es soll ein 2 Centner schwerer Würfel von Eisen gegossen werden; wie groß muß eine Seite desselben werden?

Digitized by Google

Auflösung. Nach §. 24. ist der Cubikinhalt $= \frac{200}{54 \times 7{,}2}$

$= \frac{200}{388{,}8} = 0{,}5144032$ also nach §. 28. d. eine Seite

$= \sqrt[3]{0{,}5144032} = 0{,}801'$ oder $8'' \frac{1}{16}'''$.

A. n. z. M. 2 Ctr. (preuß.) $= 220$ W. Cb.-Inh. $= \frac{220}{66 \times 7{,}2} = 0{,}4629$ c'.

Seite $= \sqrt[3]{0{,}4629} = 0{,}77' = 9\frac{1}{4}''$.

6) Der hohle Raum eines Behälters soll die Form eines Würfels haben und genau 100 Maas fassen; wie groß muß eine Seite dieses Raumes werden?

Auflösung. 18 Maas geben einen Cubikfuß (§. 18.) folglich 100 Maas $\frac{100}{18}$ oder $5\frac{5}{9}$ Cubikfuß, also wird die Seite nach §. 28. d. $= \sqrt[3]{5\frac{5}{9}}$ oder $\sqrt[3]{5{,}5555555} = 1{,}77'$ oder $1'\ 7''\ 7'''$.

7) Aus drei Würfeln, deren Seiten 6'', 8'' und 9'' lang sind, wird ein Würfel gefertigt; wie groß wird die Seite dieses Würfels?

Aufl. Cub.-Inh. des ersten Würfels $= 6 \times 6 \times 6 = 216$ c''
" " " zweiten " $= 8 \times 8 \times 8 = 512$ c''
" " " dritten " $= 9 \times 9 \times 9 = 729$ c''
$= 1457$ c''

folglich der Cubikinhalt des in Frage stehenden Würfels $= 1457$ c'' oder $1{,}457$ c'; also die Seite $= \sqrt[3]{1{,}457} = 1{,}133'$ oder $1'\ 1''\ 3\frac{3}{10}'''$.

A. n. z. M. Seite $= \sqrt[3]{1457} = 11{,}33'' = 11''\ 3\frac{1}{3}'''$.

8) Man soll aus 3 □' 84 □'' Blech einen Würfel verfertigen; wie groß wird eine Seite und der Cubikinhalt desselben?

Auflösung. Wenn die Oberfläche $= 3{,}84$ □' beträgt, so enthält eine Seitenfläche $= 3{,}84 : 6 = 0{,}64$ □'; folglich wird eine Seite $= \sqrt{0{,}64} = 0{,}8' = 8''$ und der Cubikinhalt $= 0{,}8 \times 0{,}8 \times 0{,}8 = 0{,}512$ c' oder 512 c''.

A. n. z. M. Seite $= \sqrt{86} = 9{,}27''$. Cubikinhalt $= 797{,}22$ c'' $=$ 797 c''' 380 c''''.

Digitized by Google

9) Aus 2 eisernen Würfeln von 4″ und 5″ Seite, soll ein Würfel gegossen werden; welches Gewicht erhält dieser und wie groß wird eine Seite desselben? (Spec. Gew. = 7,2)

Auflösung.

Cub.-Inh. des ersten Würfels $= 0{,}4 \times 0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}064\,c'$

„ „ „ zweiten „ $= 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}125\,c'$

„ „ „ zu verfertigenden Würfels $= 0{,}189\,c'$

also eine Seite desselben $= \sqrt[3]{0{,}189} = 0{,}57'$ und sein Gewicht $= 0{,}189 \times 54 \times 7{,}2 = 73{,}4832\,\mathfrak{B}$.

10) Die Seite eines Würfels betrage 4′; wie groß wird der Cub.-Inhalt eines Würfels von doppelter, drei- und vierfacher Seite?

Auflösung.

C.-Inh. d. Würfels von 4′ Seite $= 4 \times 4 \times 4 = 64c'$

„ „ „ „ $2 \times 4 = 8'$ „ $= 8 \times 8 \times 8 = 512c'$

„ „ „ „ $3 \times 4 = 12'$ „ $= 12 \times 12 \times 12 = 1728c'$

„ „ „ „ $4 \times 4 = 16'$ „ $= 16 \times 16 \times 16 = 4096c'$

Anmerkung. Man ersieht hieraus, daß der Cubikinhalt (somit auch das Gewicht) eines Würfels nicht in demselben Verhältnisse größer wird, wie die Seite, sondern daß bei doppelter Seite der Inhalt 8 ($= 2 \times 2 \times 2$) mal, bei dreifacher schon 27 ($= 3 \times 3 \times 3$) mal, bei vierfacher 64 ($= 4 \times 4 \times 4$) mal größer wird, als der Inhalt bei einfacher Seite. Es ist nämlich $512 = 8 \times 64$; $1728 = 27 \times 64$ und $4096 = 64 \times 64$.

Die Zahlen 8, 27, 64 sind aber keine andere, als die Cubikzahlen von 2, 3, 4 (§. 29). Man sagt daher auch: die Würfel verhalten sich dem Cub.-Inhalte und somit auch dem Gewichte nach (wenn die Materie die nämliche bleibt), wie die Cubikzahlen ihrer Kanten.

Hat z. B. der Würfel *A* eine 6mal größere Seite, wie der Würfel *B*, so ist sein Cubikinhalt nicht 6 mal, wie man leicht versucht wird zu glauben, sondern $6 \times 6 \times 6 = 216$ mal größer. Vergleiche die Anmerkung zur Aufg. 9 in §. 48.

§. 37.

Berechnung der vollständigen Pyramide.

a) Der Inhalt des Mantels einer regelmäßigen Pyramide

Digitized by Google

wird erhalten, wenn man den Inhalt eines Seitendreiecks mit der Anzahl der Seiten der Grundfläche multiplicirt.

Ist die Pyramide eine unregelmäßige, so rechne man den Inhalt eines jeden Seitendreiecks besonders und addire dann diese Inhalte.

b) Soll die ganze Oberfläche bestimmt werden, so zähle man zu dem in a) gefundenen Mantel, noch den Inhalt der Grundfläche.

c) Um den Cubikinhalt einer Pyramide zu finden, multiplicire man den Inhalt der Grundfläche mit der Höhe und dividire das Produkt durch 3.

d) Sind der Cubikinhalt und die Höhe einer Pyramide gegeben, so findet man den Inhalt der Grundfläche, wenn man den dreifachen Cubikinhalt durch die Höhe dividirt.

e) Um die Höhe zu berechnen, wenn der Cubikinhalt und die Grundfläche bekannt sind, dividire man mit dem Inhalt der Grundfläche in den dreifachen Cubikinhalt.

§. 38. Beispiele.

1) Wie groß ist die ganze Oberfläche einer regelmäßigen fünfseitigen Pyramide, wenn die Seite der Grundfläche 4 Fuß lang ist und die Höhe eines Seitendreiecks (d. i. die Senkrechte, welche man von der Spitze der Pyramide auf die Seite der Grundfläche fällt) 8 Fuß beträgt?

Auflösung. Inhalt eines Seitendreiecks $= \frac{4 \times 8}{2}$ $= 16 \square'$ (Thl. I. §. 46. a.); folglich nach §. 37. a. der Mantel $= 16 \times 5 = 80 \square'$.

Nach Thl. I. §. 61. d. wird der Inhalt der Grundfläche $= 1{,}72 \times 4 \times 4 = 27 \square' 52 \square''$; also die ganze Oberfläche nach §. 37. b. $= 80 \square' + 27 \square' 52 \square'' = 107 \square' 52 \square''$

A. n. z. M. Diese stimmt mit der gegebenen überein.

2) Eine sechsseitige Pyramide hat eine Grundfläche von $25 \square' 26 \square''$ Inhalt und eine Höhe von $8' 5''$; wie groß ist der Cubikinhalt?

Digitized by Google

Auflösung. Nach §. 37 c. wird der Cubikinhalt $= \frac{25{,}26 \times 8{,}5}{3} = 71{,}57\,c'$ oder $71\,c'\ 570\,c''$.

A. n. z. M. $25\,\square' 26\,\square'' = 3626\,\square''$; $8' 5'' = 101''$; Cubikinhalt $= \frac{3626 \times 101}{3} = 122075\frac{1}{3}\,c'' = 70\,c'\ 1115\frac{1}{3}\,c''$.

3) Der Cubikinhalt einer regelmäßigen Pyramide mit quadratischer Basis beträgt $58\,c'\ 900\,c''$ und die Höhe $9' 5''$; wie groß ist der Inhalt der Grundfläche und eine Seite derselben?

Auflösung. Nach §. 37. d. wird der Inhalt der Grundfläche $= \frac{58{,}9 \times 3}{9{,}5} = 18{,}6\,\square'$; also eine Seite derselben $= \sqrt{18{,}6} = 4{,}312' = 4'\ 3''\ 1\frac{1}{2}'''$.

4) Wie hoch ist eine Pyramide von $598\,c'$ Inhalt, wenn die Grundfläche $48\,\square'\ 25\,\square''$ beträgt?

Auflösung. Nach §. 37. e. wird die Höhe $= \frac{598 \times 3}{48{,}25}$

$= \frac{1794}{48{,}25} = 37{,}18'$ oder $37'\ 1''\ 8'''$.

A. n. z. M. Höhe $= \frac{1033344 \times 3}{6937} = 446{,}88'' = 37'\ 2\frac{4}{7}''$.

5) Der Mantel einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide soll angestrichen werden. Wie theuer kommt der Anstrich, den Quadratschuh zu 2 kr. gerechnet, wenn die Seite der Basis $3'\ 4''$ und die Höhe eines Seitendreiecks $18'\ 2''$ mißt?

Aufl. Mantel (nach §. 37. a.) $= \frac{3{,}4 \times 18{,}2}{2} \times 6$

$= 185{,}64\,\square'$; diese kosten anzustreichen $185{,}64 \times 2$ kr. oder 6 fl. 11 kr.

6) Welches Gewicht hat eine regelmäßige vierseitige Pyramide, wenn eine Seite der Basis $= 7'$ und die Höhe $= 12'$; das spec. Gewicht zu 2,5 gerechnet?

Auflös. Inhalt der quadratischen Grundfläche $= 49\,\square'$, also der Cubikinhalt (§. 37. c.) $= \frac{49 \times 12}{3} = 196\,c'$;

Digitized by Google

demnach das Gewicht (§. 23) = 196 × 54 × 2,5 = 26460 ℔ oder 264 Ctr. 60 ℔.

A. n. z M. Gewicht = 196 × 66 × 2,5 = 32340 ℔. oder 294 Ctr.

7) Eine Pyramide, deren Grundfläche ein Quadrat von 4″ Seite bildet, wiegt 48⅗ ℔; wie hoch ist dieselbe, wenn das spec. Gewicht 7,2 beträgt?

Auflösung. Der Cubikinhalt ist nach §. 24. $= \frac{48,6}{54 \times 7,2}$ = 0,125 c′, der Inhalt der Grundfläche = 0,4 × 0,4 = 0,16 □′, also nach §. 37. e. die Höhe $= \frac{3 \times 0,125}{0,16} =$ 2,34′ ≐ 2′ 3″ 4‴.

§. 39.

Berechnung der abgekürzten Pyramide.

a) Der Inhalt des Mantels ist gleich der Summe der Inhalte der Seitenflächen.

Diese Seitenflächen bilden aber Paralleltrapeze und werden also nach Thl. I. §. 54. berechnet.

Ist die Pyramide regelmäßig, so bestimme man den Inhalt eines solchen Paralleltrapezes und multiplicire diesen mit der Anzahl der Seiten der Grundfläche um den Mantel zu erhalten.

b) Der Inhalt der ganzen Oberfläche wird gefunden, wenn man zu dem nach a. bestimmten Mantel noch die Inhalte der beiden Grundflächen addirt.

c) Die genaue Bestimmung des Cubikinhaltes einer abgekürzten Pyramide geschieht nach einer mittelst Hilfe der Buchstabenrechnung abgeleiteten Formel.

Bezeichnet nämlich G den Inhalt der größeren Grundfläche, g den Inhalt der kleineren Grundfläche und h den senkrechten Abstand beider (die Höhe); so ist immer der Cubikinhalt =

$$\frac{(G + g + \sqrt{G \times g}) \times h}{3}$$

Diese Formel sagt uns also:

Der Cubikinhalt einer abgekürzten Pyramide wird erhalten,

Digitized by Google

wenn man den Inhalt der größern Grundfläche, den Inhalt der kleinern Grundfläche, und die Quadratwurzel aus dem Produkte dieser beiden Inhalte zusammenzählt, die erhaltene Summe mit der Höhe multiplicirt und das Produkt durch 3 dividirt.

Bilden die beiden Grundflächen Quadrate, welcher Fall im Praktischen wohl am häufigsten vorkommt, so verwandelt sich das eben ausgesprochene Verfahren in nachstehendes:

Man multiplicire die Seite des obern Quadrats mit sich, dann die Seite des untern mit sich, dann die Seite des obern mit der des untern, addire hierauf diese drei Produkte, multiplicire die Summe mit der Höhe und dividire das Produkt durch 3, um den Cubikinhalt zu finden.

Wie läßt sich dieses Verfahren aus dem oben angeführten allgemeinen Satze nachweisen?

Anmerkungen.

1) Wenn bei der Berechnung keine allzu genaue Lösung verlangt wird, so kann der Cubikinhalt auch auf folgende Weise bestimmt werden:

Man rechne die Inhalte der beiden Grundflächen, zähle diese zusammen, multiplicire die Summe mit der Höhe und dividire das Produkt durch 2.

Dieses Verfahren liefert besonders dann Resultate von hinreichender Genauigkeit, wenn die Inhalte der beiden Grundflächen nur wenig von einander verschieden sind, wie z. B. bei Berechnung von Baumstämmen und dergl. und kann daher im Praktischen oft mit großem Vortheile angewendet werden.

2) Die Bestimmung der übrigen Stücke einer abgekürzten Pyramide setzt einige Kenntnisse der Algebra voraus und kommt zudem im gewöhnlichen Leben fast nie oder doch nur äußerst selten vor. Es sollen hier nur einige Fälle durch Formeln ausgesprochen werden, von welchen vorkommenden Falles von Solchen, denen diese Darstellungsweise nicht ganz fremd ist, mit Vortheil Gebrauch gemacht werden kann.

Wird die oben angeführte Bedeutung der Buchstaben G, g und h beibehalten und bezeichnet C den Cubikinhalt, so ist:

$$1)\ h = \frac{3 \times C}{(G + g + \sqrt{G \times g})}$$

$$2)\ G = \frac{(g \times h - 6\,C) - \sqrt{(4\,C - g \times h) \times 3 \times g \times h}}{2\,h}$$

$$3)\ g = \frac{(6\,C - G \times h) - \sqrt{(4\,C - G \times h) \times 3 \times G \times h}}{2\,h}$$

Digitized by Google

§. 40. Beispiele.

1) Wie groß ist der Mantel und die ganze Oberfläche einer abgekürzten regelmäßigen vierseitigen Pyramide, wenn die Seiten der untern Grundfläche 3′ 8″, die der obern 2′ 4″ lang sind, und die Höhe einer Seitenfläche 8′ 5″ beträgt?

Auflösung. Der Inhalt eines Seitenparalleltrapezes ist $= \frac{3{,}8 + 2{,}4}{2} \times 8{,}5 = 26{,}35\,\square'$ (s. Thl. I. §. 54. a.)

folglich nach §. 39. a.

der Mantel . .	$= 26{,}35\,\square' \times 4 =$	$105\,\square' 40\,\square''$
der Inhalt des größern Quadrats	$= 3{,}8 \times 3{,}8 =$	$14\,\square' 44\,\square''$
der Inhalt des kleinern Quadrats .	$= 2{,}4 \times 2{,}4 =$	$5\,\square' 76\,\square''$
demnach die ganze Oberfläche (§. 39. b)	$=$	$125\,\square' 60\,\square''$

2) Man kennt von einer abgekürzten Pyramide den Inhalt der untern Grundfläche $= 16\,\square'$, den Inhalt der obern Grundfläche $= 9\,\square'$, und die Höhe der Pyramide $= 8'\,7''$; wie groß ist der Cubikinhalt?

Auflösung. Um ein genaues Resultat zu erlangen, setze man in der in §. 39. c. aufgestellten Formel, für G den Zahlenwerth 16, für $g = 9$, für $\sqrt{G \times g} = \sqrt{16 \times 9}$ $\sqrt{144} = 12$, und für $h = 8{,}7$; dann wird der Cubikinhalt $= \frac{(16 + 9 + 12) \times 8{,}7}{3} = \frac{37 \times 8{,}7}{3} =$ $107{,}3\,c'$ oder $107\,c'\,300\,c''$.

Genügt ein annäherndes Resultat, so wende man das in der Anmerkung 1. zu §. 39. c. angeführte Verfahren an. Die Summe der Inhalte beider Grundflächen wird $= 16 + 9 = 25$, mit der Höhe 8,7 multiplicirt gibt $25 \times 8{,}7 = 217{,}5$; hiervon die Hälfte gibt den Cubikinhalt $= 108{,}75\,c'$ oder $108\,c'\,750\,c''$; ein Resultat, welches nur um $1\,c'\,450\,c''$ zu groß ist.

A. n. z. M. Cubikinhalt $= \frac{(2304 + 1296 + \sqrt{2304 \times 1296}) \times 103}{3}$

$= 182928\,c'' = 105\,c'\,1488\,c''$.

3) Ein 26 Fuß langer Baumstamm ist nach einer vierseitigen

Digitized by Google

abgestumpften Pyramide behauen. Die Grundflächen bilden Rechtecke. An dem einen Ende ist er 2′ 2″ hoch und 1′ 5″ dick, an dem andern 1′ 4″ hoch und 9½″ dick; wie groß ist der Cubikinhalt und was kostet der Stamm, wenn für den Cubikfuß 54 kr. bezahlt werden?

Auflösung. Da hier die Länge beträchtlich, der Unterschied beider Grundflächen aber nur gering ist, so wird zur Berechnung mit Vortheil die in der Anmerkung zu §. 39 c. angeführte Annäherungsmethode angewendet.

Es wird der Inhalt des
größern Querschnitts $= 2{,}2 \times 1{,}5 = 3{,}3\ \square'$
der Inhalt des kleinern „ $= 1{,}4 \times 0{,}95 = 1{,}33\ \square'$
also die Summe beider $= 4{,}63\ \square'$

demnach der Cubikinhalt $= \frac{4{,}63 \times 26}{2} = 60{,}19\ c'$;

folglich der Preis des Stammes $= 60{,}19 \times 54$ kr. $=$ 54 fl. 10 kr.

Nach der in §. 39. c. angegebenen Formel wird der Cubik-Inhalt $= \frac{(3{,}3 + 1{,}33 + \sqrt{3{,}3 \times 1{,}33}) \times 26}{3} = 58{,}24\ c'$

also der Preis des Stammes $= 58{,}24 \times 54$ kr. $=$ 52 fl. 40 kr. Beide Resultate sind demnach um 1 fl. 30 kr. verschieden.

§. 41. Berechnung des Cylinders (Walze).

a) Um die krumme Oberfläche d. i. den Mantel eines Cylinders*) zu finden, multiplicire man den Umfang desselben mit seiner Höhe.

Der Grund dieses Verfahrens ergibt sich leicht aus der Anschauung des Netzes im §. 14; der Mantel erscheint nämlich dort als ein Rechteck, dessen Grundlinie durch den Umfang und dessen Höhe durch die Höhe des Cylinders bestimmt werden. Der Inhalt dieses Rechteckes wird also zugleich der Inhalt der krummen Oberfläche sein.

*) Hier sowohl als bei dem Kegel ist immer nur von senkrechten Körpern mit kreisförmiger Grundfläche die Rede.

Digitized by Google

b) Ist die ganze Oberfläche zu berechnen, so hat man noch zu dem nach a. bestimmten Mantel die Inhalte der beiden Grundflächen (Kreise) zu addiren.

c) Der Cubikinhalt eines Cylinders wird erhalten, wenn man den Inhalt der Grundfläche mit der Höhe desselben multiplicirt.

Der Grund dieses Verfahrens ergibt sich aus §. 4. und §. 26. b.

Aus c. fließen unmittelbar folgende 2 Sätze:

d) Dividirt man den Cubikinhalt durch die Höhe, so erhält man den Inhalt der Grundfläche, und

e) Wird mit dem Inhalt der Grundfläche in den Cubikinhalt des Cylinders dividirt, so findet man dessen Höhe.

f) Die Berechnung des Cubikinhaltes eines hohlen Cylinders kann auf folgende 2 Arten geschehen:

1) Man rechne zuerst den Inhalt des ganzen Cylinders und ziehe hiervon den Cubikinhalt des hohlen Raumes ab; oder

2) Man rechne den Inhalt der ringförmigen Grundfläche und multiplicire diesen mit der Höhe des Cylinders.

§. 42. Beispiele.

1) Der Umfang eines Cylinders beträgt 5′ 4″ 2‴ und die Höhe 8′ 4″; wie groß ist die krumme Oberfläche?

Auflösung. Diese wird nach §. 41. a. = 5,42 × 8,4 = 45,528 □′ oder 45 □′ 52 □″ 80 □‴.

A. n. z. M. Krumme Oberfläche = 770 × 1200 = 924000 □‴ = 44 □′ 80 □″ 96 □‴.

2) Der Halbmesser der Grundfläche eines Cylinders ist 2′ 5″ lang, dessen Höhe beträgt 12′ 8″; wie groß ist die ganze Oberfläche und der Cubikinhalt?

Auflösung. Der Umfang wird (Thl. I. §. 63. a.) = 2 × 2,5 × 3,14 = 15,7′, also nach §. 41. a. der Mantel

Digitized by Google

$= 15{,}7 \times 12{,}8 \ldots\ldots\ldots = 200{,}96\ \square'$

Die Inhalte der beiden Grundflächen machen (Thl. I. §. 63. c. 2.) $= 2{,}5 \times 2{,}5 \times 3{,}14 \times 2 \ldots\ldots\ldots = 39{,}25\ \square'$

folglich wird nach §. 41. b. die ganze Oberfläche $\ldots\ldots\ldots\ldots = 240{,}21\ \square'$

Da ferner der Inhalt der Grundfläche $= 19{,}625\ \square'$ ist, so wird nach §. 41. c. der Cubikinhalt $= 19{,}625 \times 12{,}8 = 251{,}2\ c'$ oder $251\ c'\ 200\ c''$.

A. n. z. M. Umfang $= 182{,}12''$. Mantel $= 27682{,}24''$. Beide Grundflächen $= 5281{,}48\ \square'$. Ganze Oberfläche $= 32963\ \square'' = 228\ \square'\ 131\ \square''$. Cubikinhalt $= 232\ c'\ 496\ c''$.

3) Wie groß ist der Durchmesser und der Umfang eines $14'\ 8''$ hohen Cylinders, wenn dessen Cubikinhalt $540\ c'\ 200\ c''$ beträgt?

Auflös. Der Inhalt der Grundfläche ist nach §. 41. d. $= 540{,}2 : 14{,}8 = 56{,}5\ \square'$, demnach der Halbmesser (nach Thl. I. §. 63. d.) $= \sqrt{\frac{36{,}5}{3{,}14}} = \sqrt{11{,}6242} = 3{,}409$

und der Durchmesser $= 3{,}409 \times 2 = 6{,}818'$ also (Thl. I. §. 63. a.) der Umfang des Cylinders $= 6{,}818 \times 3{,}14 = 21{,}40852'$.

4) Der Umfang eines Cylinders beträgt $26'\ 6''\ 9'''$, die Höhe desselben $15'\ 4''$; wie groß ist der Inhalt der Grundfläche und der Cubikinhalt des Körpers?

Auflös. Der Durchmesser wird (nach Thl. I. §. 63. b.) $= 26{,}69 : 3{,}14 = 8{,}5'$, daher der Halbmesser $= 4{,}25'$ und der Inhalt der Grundfläche (Thl. I. §. 63. c. 1) $= \frac{26{,}69 \times 4{,}25}{2} = 56{,}71625\ \square'$; also der Cubikinhalt $= 56{,}71625 \times 15{,}4 = 873{,}43025\ c'$ oder $873\ c'\ 430\frac{1}{4}\ c''$

5) Es sollen runde Eisenstangen geschmiedet werden, von welchen jeder laufende Fuß $\frac{1}{2}$ ℔ wiegt; wie dick müssen diese werden?

Auflös. Das spec. Gew. des Schmiedeisens beträgt 7,8; also ist der Cubikinhalt des laufenden Fußes dieser Stangen nach §. 24. $= \frac{\frac{1}{2}}{54 \times 7{,}8} = \frac{0{,}5}{421{,}2} = 0{,}001187\ c'$.

Digitized by Google

Folglich der Inhalt des Querschnitts nach §. 41. d. = 0,001187 : 1 = 0,001187 □′ und (Thl. I. §. 63. d.) der Halbmesser $= \sqrt{\frac{0{,}001187}{3{,}14}} = \sqrt{0{,}000378} = 0{,}0194'$; hieraus endlich der Durchmesser oder die Dicke = 0,0194′ × 2 = 0,0388′ oder 3‴ 8⅓‴″.

6) Ein cylinderförmiger Becher, welcher eine Maas fassen und 1′ 4″ hoch werden soll, muß welche Weite haben?

Auflös. Da ein Cubikfuß 18 Maas faßt, so muß der Cubikinhalt dieses Bechers $\frac{1}{18}$ Cubikfuß werden. Nach §. 41. d. wird also der Inhalt der Grundfläche $\frac{1}{18} : 1{,}4 = 0{,}05555 : 1{,}4 = 0{,}03928$□′, daher der Halbm. $= \sqrt{\frac{0{,}03928}{3{,}14}} = \sqrt{0{,}012509}$ = 0,111′ und der Durchmesser oder die Weite = 0,111 × 2 = 0,222′ oder 2″ 2⅔‴.

7) Ein runder überall gleich dicker Baumstamm hat einen Umfang von 8′ 4″ und eine Länge von 35 Fuß; was kostet derselbe, wenn für den Cubikfuß 12 Kreuzer verlangt werden?

Auflös. Der Durchmesser des Stammes ist (nach Thl. I. §. 63. b.) = 8,4 : 3,14 = 2,674′, also der Halbmesser = 2,674 : 2 = 1,337′ und der Inhalt des Querschnitts (Thl. I. §. 63. c. 2) = 1,337 × 1,337 × 3,14 = 5,612966 □′; folglich der Cubikinhalt nach §. 41. c. = 5,612966 × 35 = 196,453810 c′. Der Stamm kostet demnach 196,45381 × 12 kr. oder 39 fl. 17 kr.

A. n. z. M. Halbmesser = 15″ 11‴. Cubikinhalt = 193¼ c′ (nahezu). Preis des Stammes = 38 fl. 42 kr.

8) Eine Brunnenleitung, aus bleiernen Röhren bestehend, hat eine Länge von 4564 Fuß. Der äußere Durchmesser der Röhren beträgt 2½ Zoll und die Weite der Oeffnung 2″ 2‴ wie theuer kommt diese Leitung zu stehen, wenn das Pfund Blei zu 10 kr. berechnet wird?

Auflös. Der Halbmesser des ganzen Querschnitts ist = 2½ : 2 = 1¼ Zoll oder 0,125 Fuß, folglich sein Inhalt (Thl. I. §. 63. c. 2.) 0,125 × 0,125 × 3,14 = 0,0490625 □′; also der Cubikinhalt der Röhren sammt dem hohlen Raume = 0,0490625 × 4564 = 223,92125 c′.

Digitized by Google

Der Halbmesser der Oeffnung ist $0{,}22' : 2 = 0{,}11'$, also ihr Flächeninhalt $= 0{,}11 \times 0{,}11 \times 3{,}14 = 0{,}037994\,\square'$ und der Cubikinhalt des hohlen Raumes $= 0{,}037994 \times 4564 = 173{,}404616\,c'$. Nach §. 41. f. 1. erhält man hieraus für das Volumen des Bleies: $223{,}92125\,c' - 173{,}404616\,c' = 50{,}516634\,c'$. Diese wiegen aber nach §. 23, wenn das spec. Gew. zu 11,4 angenommen wird, $= 50{,}516634 \times 54 \times 11{,}4 = 31098$ Pfund.

Die Kosten der Leitung betragen somit 31098×10 kr. oder 5183 fl.

Nach der in §. 41. f. 2. angegebenen Methode hat man: Inhalt des ringförmigen Querschnitts $= 0{,}0490625 - 0{,}037994 = 0{,}0110685\,\square'$, diesen multiplicirt mit der Länge 4564 gibt für den Cubikinhalt $50{,}516634\,c'$ u. s. w. wie oben.

9) Wie viel wiegt eine eiserne 12 Fuß lange Röhre, deren äußerer Durchmesser 8 Zoll mißt, wenn die Eisendicke $1\frac{1}{4}$ Zoll beträgt und das spec. Gew. des Eisens $= 7{,}2$ ist?

Auflösung. Der Cubikinhalt des ganzen Cylinders $= 0{,}5024 \times 12 = 6{,}0288\,c'$

Der Cubikinhalt des hohlen Raumes, da der Halbmesser $= 4 - 1\frac{1}{4} = 2\frac{3}{4}$ Zoll ist $= 0{,}19625 \times 12 = 2{,}355c'$; folglich der Cubikinhalt der Eisenmasse $= 3{,}6738c'$, also das Gewicht derselben $= 3{,}6738 \times 54 \times 7{,}2 = 14$ Ctr. $28\frac{3}{10}$ ℔.

10) Wie viel Quadratfuß Blech ist zur Verfertigung einer cylindrischen Kanne erforderlich, welche 10 Maas fassen und $2\frac{1}{2}$ Fuß hoch werden soll?

Auflös. Da 18 Maas einen Cubikfuß ausmachen, so geben 10 Maas $\frac{10}{18}$ oder $\frac{5}{9} = 0{,}5555\ldots$ Cubikfuß. Der Inhalt der Grundfläche wird daher nach §. 41. d. $= 0{,}5555 : 2{,}5 = 5{,}5555 : 25 = 0{,}2222$ Quadratfuß und ihr Halbmesser (nach Thl. I. §. 63. d.) $= \sqrt{\frac{0{,}2222}{3{,}14}} = \sqrt{0{,}0707}$ $= 0{,}26$; folglich der Durchmesser $= 0{,}52'$ und (Thl. I. §. 63. a.) der Umfang $= 0{,}52 \times 3{,}14 = 1{,}6328'$. Nach

Digitized by Google

§. 41. a. wird hieraus der Inhalt des Mantels = 1,6328 × 2,5 = 4,082 □′. Hierzu die Grundfläche addirt gibt die Größe des erforderlichen Blechs = 4,3042 □′ oder 4 □′ 30 □″ 42 □‴.

§. 43. Berechnung des vollständigen Kegels.

a) Um den Mantel eines Kegels zu erhalten, multiplicire man den Umfang des Grundkreises mit der Seite des Kegels und dividire das Product durch 2.

Der Grund des Verfahrens ergibt sich aus der Anschauung des Netzes §. 15. Es erscheint dasselbe nämlich als ein Kreisausschnitt, dessen Bogen gleich dem Umfange der Grundfläche und dessen Radius gleich der Seite des Kegels ist. (Vergl. Thl. I. §. 63. g.)

b) Soll die ganze Oberfläche berechnet werden, so addire man zu dem nach a berechneten Mantel noch den Inhalt der Grundfläche.

c) Den Cubikinhalt erhält man, wie bei der Pyramide, indem man nämlich den Inhalt der Grundfläche mit der Höhe des Kegels multiplicirt und das Produkt durch 3 dividirt.

Vergl. §. 4. 2. und §. 37. c.

d) Für die Auffindung der Grundfläche aus der Höhe und dem Cubikinhalt, so wie der Höhe aus der Grundfläche und dem Cubikinhalte gelten dieselben Regeln, wie sie für diese Theile bei der Pyramide (§. 37. d u. e.) angegeben wurden.

e) Ist statt der Höhe, die Seite des Kegels bekannt, so kann jene aus dem rechtwinkligen Dreieck, welches die Kegelseite, der Halbmesser der Grundfläche und die Höhe des Kegels bilden, leicht berechnet werden (nach Thl. I. §. 49.)

f) Dasselbe Dreieck muß auch dann zu Hilfe genommen werden, wenn die Seite zu wissen nothwendig aber nur die Höhe und der Halbmesser der Basis bekannt sind.

Anmerkung. Oft genügt es auch die in e. und f. angeführten Theile mittelst Auftragen der erwähnten Dreiecke in verjüngtem oder natürlichem Maaßstabe nach Thl. I. §. 32. 5. und Anhang I. B. 14. zu bestimmen.

Digitized by Google

§. 44. Beispiele.

1) Der Halbmesser der Grundfläche eines Kegels beträgt 3″ 4‴, die Seite ist 1′ 4″ lang; wie groß ist der Inhalt des Mantels und die ganze Oberfläche?

Auflös. Der Umfang der Grundfläche ist (Thl. I. §. 63. a.) $= 2 \times 0{,}34 \times 3{,}14 = 2{,}1352'$ also nach §. 43. a. der Inhalt des Mantels $= \frac{2{,}1352 \times 1{,}4}{2} = 1{,}49464\,\square'$.

Der Inhalt der Grundfläche ist (Thl. I. §. 63. c. 2) $= 3{,}14 \times 0{,}34 \times 0{,}34 = 0{,}362984\,\square'$; also die Oberfläche nach §. 43. b. $= 1{,}49464 + 0{,}362984 = 1{,}857624\,\square'$ oder $1\,\square'\ 85\,\square''\ 76\frac{6}{25}\,\square'''$.

A. n. z. M. Durchmesser $= 80'''$. Umfang $= 251{,}2'''$. Mantel $= 1\,\square'\ 23\,\square''\ 67\,\square'''$. Grundfläche $= 34\,\square''\ 128\,\square'''$; folglich Oberfläche $= 1\,\square'\ 58\,\square''\ 51\,\square'''$.

2) Wie groß ist der Cubikinhalt eines 5 Fuß hohen Kegels, wenn der Durchmesser der Grundfläche 3 Fuß beträgt?

Auflös. Der Inhalt der Grundfläche ist, da der Halbmesser 1,5 Fuß beträgt. (Thl. I. §. 63. c. 2.) $= 1{,}5 \times 1{,}5 \times 3{,}14 = 7{,}065\,\square'$; folglich nach §. 43. c. der Cubikinhalt des Kegels $= \frac{7{,}065 \times 5}{3} = 11{,}775\,c'$ oder $11\,c'\ 775\,c''$.

A. n. z. M. Cubikinhalt $= 11\,c'\ 1339\,c''$.

3) Der Cubikinhalt eines Kegels beträgt $397\,c'\ 363\,c''\ 200\,c'''$, die Höhe 12 Fuß; wie groß ist der Halbmesser der Grundfläche?

Auflös. Der Inhalt der Grundfläche ist (§. 43. d.) $= \frac{397{,}3632 \times 3}{12} = 99{,}3408\,\square'$; der Halbmesser also (Thl. I. §. 63. d.) $= \sqrt{\frac{99{,}3408}{3{,}14}} = \sqrt{31{,}6372} = 5{,}62'$ oder $5'\ 6''\ 2'''$.

A. n. z. M. $397\,c'\ 363\,c''\ 200\,c''' = 1186063112\,c'''$. Grundfläche $= \frac{1186063112 \times 3}{1728} = 2059137\,\square'''$. Halbmesser $= \sqrt{\frac{2059137}{3{,}14}} = 809''' = 5'\ 7''\ 5'''$.

Digitized by Google

4) Der Durchmesser der Grundfläche eines Kegels beträgt 6′ 4″, sein Cubikinhalt 160 c′ 768 c″; wie hoch ist der Kegel?

Auflös. Der Halbmesser der Grundfläche ist $\frac{6,4}{2} = 3,2'$, also der Inhalt dieser $= 3,2 \times 3,2 \times 3,14 = 32,1536 \square'$, folglich nach §. 43. d. die Höhe $= \frac{160,768 \times 3}{32,1536} = 15'$.

A. n. z. M. Höhe $= \frac{277248 \times 3}{4534,16} = 183,4'' = 15' 3''$.

5) Wie groß ist die ganze Oberfläche und der Cubikinhalt eines Kegels, wenn der Umfang der Grundfläche 2,512 Fuß beträgt und die Seite desselben 2 Fuß lang ist?

Auflös. Nach Thl. I. §. 63. b. ist der Durchmesser der Grundfläche $= 2,512 : 3,14 = 0,8'$, also der Halbmesser $= 0,4'$ und der Inhalt $= 0,4 \times 0,4 \times 3,14 = 0,5024 \square'$. Der Mantel beträgt nach §. 43. a. $= \frac{2,512 \times 2}{2} = 2,512 \square'$; folglich ist die Oberfläche $= 0,5024 \square' + 2,512 \square' = 3,0144 \square' = 3 \square' 1 \square'' 44 \square'''$.

Um den Cubikinhalt zu bestimmen, muß zuerst, wie in §. 43 e. angegeben wurde, die Höhe berechnet werden. Es ist nach Thl. I. §. 49. das Quadrat über der Höhe $= 2 \times 2 - 0,4 \times 0,4 = 4 - 0,16 = 3,84$, also die Höhe $= \sqrt{3,84} = 1,959'$; folglich der Cubikinhalt des Kegels (§. 43. c.) $= \frac{0,5024 \times 1,959}{3} = 0,3280672$ c′ $= 328$ c″ $67\frac{1}{2}$ c‴.

Fig. 34.

Anmerkung.

Um die Höhe mittelst Construktion zu finden, mache man $ab = 4''$ (Fig. 34), errichte im Endpunkte ca senkrecht auf ab und schlage $bc = 2'$ von b aus auf ac ab, so gibt ac die verlangte Höhe, deren Länge nun leicht auf dem angenommenen Maaßstabe zu bestimmen ist.

6) Es soll ein Kegel aus Blech gefertigt werden, welcher 8 Zoll tief und an der Basis 6 Zoll weit werden soll; mit welchem

Digitized by Google

Halbmesser muß der Bogen des Sektors beschrieben werden, der das Netz bildet (§. 15.), und wie groß muß dieser Bogen gemacht werden, damit beim Zusammenpassen der verlangte Kegel erhalten wird?

Auflös. Der Radius des Netzsektors ist zugleich die Seite des Kegels. Diese wird nach §. 43. f. bestimmt, wie folgt: das Quadrat über der Seite (Thl. I. §. 48.) $= 0{,}8 \times 0{,}8 + 0{,}3 \times 0{,}3 = 0{,}64 + 0{,}09 = 0{,}73$, also die Seite selbst $= \sqrt{0{,}73} = 0{,}854'$ oder $8'' 5\frac{1}{2}'''$.

Der Bogen des Sektors bildet beim Zusammenlegen den Umfang der Basis und wird daher (nach Thl. I. §. 63. a.) $= 0{,}6 \times 3{,}14 = 1{,}884'$ oder $1' 8'' 8\frac{1}{5}'''$.

7) Ein kegelförmiger Behälter (Trichter) soll eine Stütze fassen und $1\frac{1}{4}$ Fuß tief werden; welche Dimensionen erhält das Netz hierzu?

Auflös. Da 18 Maas einen Cubikfuß ausmachen, so gibt 1 Stütze oder 10 Maas $\frac{10}{18} = \frac{5}{9}\,c' = 0{,}5555\,c'$. Der Inhalt der Grundfläche wird also nach §. 43. d. $= \frac{0{,}5555 \times 3}{1{,}5} = 1{,}1111\,\square'$ und der Halbmesser derselben (Thl. I. §. 63. d.) $= \sqrt{\frac{1{,}1111}{3{,}14}} = \sqrt{0{,}353857} = 0{,}594'$; demnach der Umfang, also auch der Bogen des Netzsektors (Thl. I. §. 63. a.) $= 2 \times 0{,}594 \times 3{,}14 = 3{,}73032'$ oder $3' 7'' 3'''$. Die Seite des Kegels oder der Halbmesser des Netzes ist wie in vorhergehender Aufgabe $= \sqrt{0{,}594 \times 0{,}594 + 1{,}5 \times 1{,}5} = \sqrt{2{,}602836} = 1{,}613'$ oder $1' 6'' 1\frac{3}{10}'''$

8) Ein eiserner Kegel von 100 ℔ Gewicht hat eine Basis von 4 Zoll Halbmesser; wie hoch ist er? (Spez. Gew. = 7,2.)

Auflös. Nach §. 24. ist der Cubikinhalt $= \frac{100}{54 \times 7{,}2} = 0{,}2572\,c'$. Der Inhalt der Grundfläche beträgt (Thl. I. §. 63. c. 2.) $0{,}4 \times 0{,}4 \times 3{,}14 = 0{,}5024\,\square'$; folglich wird nach §. 43. d. die Höhe des Kegels $= \frac{0{,}2572 \times 3}{0{,}5024} = 1{,}535'$ oder $1' 5'' 3\frac{1}{2}'''$.

Digitized by Google

§. 45. Berechnung des abgekürzten Kegels.

a) Um den Inhalt des Mantels zu finden, addire man die Umfänge der beiden Grundflächen, multiplicire die Summe mit der Seite des abgekürzten Kegels und dividire das Produkt durch 2.

b) Ist die ganze Oberfläche zu berechnen, so zähle man zu dem nach a. bestimmten Mantel, noch die Inhalte der beiden Grundflächen.

c) Den Cubikinhalt des abgekürzten Kegels findet man ähnlich, wie den der abgekürzten Pyramide (§. 39), nach einer mittelst Hilfe der Buchstabenrechnung abgeleiteten Formel.

Bezeichnet man nämlich den Radius der größeren Grundfläche mit R, den Radius der kleinern Grundfläche mit r und die Höhe des abgekürzten Kegels mit h, so heißt diese Formel:

$$\text{Cubikinhalt} = \frac{(R \times R + r \times r + R \times r) \times 3{,}14 \times h}{3}$$

Hiernach wird also der Cubikinhalt eines abgekürzten Kegels auf folgende Weise erhalten:

Man multiplicire den Halbmesser des größern Kreises mit sich, dann den Halbmesser des kleinern Kreises mit sich und noch den größern mit dem kleinern, zähle die drei Produkte zusammen, multiplicire die Summe mit 3,14 und nochmals mit der Höhe des Körpers und dividire zuletzt das erhaltene Resultat durch 3.

Anmerkungen.

1) Die soeben angeführte Methode wird immer angewendet, wenn eine ganz genaue Lösung der Aufgabe verlangt wird; oft und zwar in den meisten im Praktischen vorkommenden Fällen, genügt aber ein annäherndes Resultat. Ein solches kann auf folgende zwei Arten erzielt werden:

a) Man zähle die Halbmesser der beiden Grundflächen zusammen, dividire durch 2 (d. h. man nehme das Mittel beider Halbmesser) und rechne den Inhalt eines Kreises, welcher die gefundene Zahl zum Halbmesser hat und multiplicire diesen mit der Höhe des abgekürzten Kegels.

b) Man addire die Inhalte der beiden Grundflächen, multiplicire die Summe mit der Höhe des Körpers und dividire das Produkt durch 2.

Beide Verfahrungsarten liefern besonders dann hinreichend ge-

Digitized by Google

naue Werthe, wenn der zu berechnende Kegel sich der Form eines Cylinders nähert; also bei Berechnung von Baumstämmen, Säulen u. drgl. Die erste Methode gibt immer ein zu kleines, die zweite dagegen ein zu großes Resultat. Von beiden ist jedoch die erstere die genauere.

2) Zur Bestimmung der Höhe und der beiden Halbmesser der Begrenzungskreise dienen folgende Formeln (vergl. §. 39. Anmerkg. 2.)

$$1)\ h = \frac{3 \times C}{(R \times R + r \times r + R \times r) \times 3{,}14}$$

$$2)\ R = \sqrt{\frac{(3{,}14 \times r \times r \times h - 6 \times C) - r \times \sqrt{(4 \times C - 3{,}14 \times r \times r \times h) \times 9{,}42 \times h}}{6{,}28 \times h}}$$

$$3)\ r = \sqrt{\frac{(6 \times C - 3{,}14 \times R \times R \times h) - R \times \sqrt{(4 \times C - 3{,}14 \times R \times R \times h) \times 9{,}42 \times h}}{6{,}28 \times h}}$$

§. 46. Beispiele.

1) Die Durchmesser der beiden Grundflächen eines abgekürzten Kegels sind 8 Fuß und 5 Fuß, die Seite desselben beträgt 12 Fuß; wie groß ist die krumme und wie groß die ganze Oberfläche.

Aufl. Der Umfang des größern Kreises ist (Thl. I. §. 63. a.) $= 8 \times 3{,}14 = 25{,}12'$; der des kleinern $= 5 \times 3{,}14 = 15{,}7'$ also nach §. 45. a.

Inhalt des Mantels $= \frac{(25{,}12 + 15{,}7) \times 12}{2} = 244{,}92\ \square'$

„ „ größern Kreises (Thl. I. §. 63. c. 1.)
$= \frac{25{,}12 \times 4}{2} = 50{,}24\ \square'$

Inhalt des kleinern Kreises $= \frac{15{,}7 \times 2{,}5}{2} = 19{,}625\ \square'$

folglich die ganze Oberfläche (§. 45. b.) $= 314{,}785\ \square'$

A. n. z. M. Das Resultat wird ebenfalls $= 314{,}785\ \square'$ oder $314\ \square' 113\ \square''$.

Digitized by Google

2) Man soll den Cubikinhalt eines abgekürzten Kegels von 5′ 7″ Höhe berechnen, wenn die Halbmesser der beiden Kreise 1′ 4″ und 8″ betragen.

Auflös. Nach der in §. 45. c. angegebenen Regel erhält man:

Der größere Halbmesser mit sich = 1,4 × 1,4 = 1,96
„ kleinere „ „ „ = 0,8 × 0,8 = 0,64
„ größere „ mal dem kleinern = 1,4 × 0,8 = 1,12
zusammen = 3,72

Dies mit der Höhe 5,7 multiplicirt macht 21,204, nochmals mit 3,14 gibt 66,58056 und dieses durch 3 dividirt, folgt für den Cubikinhalt = 22,19352 c′ oder 22 c′ 193 c″ 520 c‴.

Löst man diese Aufgabe nach den in §. 45. c. angeführten Näherungsmethoden, so erhält man:

1) Nach der ersten Methode a)

Mittel der beiden Halbmesser $= \frac{1,4 + 0,8}{2} = 1,1$

Inhalt des Kreises für diesen Halbmesser = 1,1 × 1,1 × 3,14 = 3,7994 □′; also der Cubikinhalt = 3,7994 × 5,7 = 21 c′ 656 c″ 580 c‴.

2) Nach der zweiten Methode b)

Inhalt der größern Grundfläche = 1,4 × 1,4 × 3,14 = 6,1544 □′
„ „ kleinern „ = 0,8 × 0,8 × 3,14 = 2,0096 □′
Summe beider = 8,164

Dieses mit der Höhe 5,7 multiplicirt gibt 46,5348 und dies durch 2 dividirt, folgt für den Cubikinhalt = 23 c′ 267 c″ 400 c‴.

Das erstere Resultat ist also nur um 536 c″ 940 c‴ zu klein, das letztere um 1 c′ 73 c″ 880 c‴ zu groß.

A. n. z. M. Cubikinhalt $= (16 \times 16 + 8 \times 8 + 16 \times 8) \times \frac{67 \times 3,14}{3}$

= 31416,74 c′ = 18 c′ 312 c″.

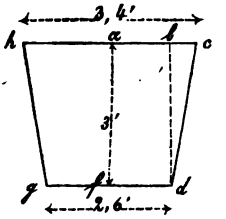
3) Ein kupferner Kessel von der Form eines abgekürzten Kegels soll oben 3′ 4″ und unten 2′ 6″ weit und 3 Fuß tief werden, wie viel Quadratfuß Kupferblech werden erfordert (den Deckel nicht mitgerechnet), und wie viel Maas faßt der Kessel?

Auflös. Stellt *hcdg* (Fig 35.) den Kessel vor, so ist also

Digitized by Google

$hc = 3{,}4'$, $gd = 2{,}6'$ und $af = 3'$. Um die krumme Oberfläche bestimmen zu können, muß zuvor die Seite des Kegels (cd) gesucht werden. Zieht man zu diesem Ende die senkrechte Linie db, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck dbc und ein Rechteck $abdf$, und

Fig. 35.



es ist $bd = af = 3'$, $ab = fd = \frac{2{,}6}{2} = 1{,}3'$; also da $ac = \frac{3{,}4}{2} = 1{,}7'$, wird $bc = ac - ab = 1{,}7 - 1{,}3 = 0{,}4'$; folglich nach Thl. I. §. 48. in dem Dreieck bcd das Quadrat über $cd = 0{,}4 \times 0{,}4 + 3 \times 3 = 0{,}16 + 9 = 9{,}16$, demnach $cd = \sqrt{9{,}16} = 3{,}026'$.

Der Umfang des größern Kreises $= 3{,}4 \times 3{,}14 = 10{,}676'$
„ „ „ kleinern „ $= 2{,}6 \times 3{,}14 = 8{,}164'$
Summe beider $= 18{,}84$

also nach §. 45. a. der Inhalt des Mantels $= \frac{18{,}84 \times 3{,}026}{2} = 28{,}50492\,\square'$

Der Inhalt d. Bodens $= 1{,}3 \times 1{,}3 \times 3{,}14 = 5{,}3066\,\square'$

hierzu addirt gibt das erforderl. Kupferblech $= 33{,}81152\,\square'$
oder $33\,\square'\ 81\,\square''\ 15\,\square'''$.

Zur Beantwortung der zweiten Frage hat man zunächst den Cubikinhalt des Kessels zu berechnen. Dieser wird nach §. 45. c., wenn man in der dort aufgestellten Formel für die Buchstaben, die betreffenden Zahlenwerthe setzt $=$

$$\frac{(1{,}7 \times 1{,}7 + 1{,}3 \times 1{,}3 + 1{,}7 \times 1{,}3) \times 3{,}14 \times 3'}{3}$$

$= 21{,}3206\,c'$.

Da nun $1\,c' = 18$ Maas ausmacht (§. 18. Anmrk. 1), so faßt also der Kessel $21{,}3206 \times 18 = 383{,}7708$ oder nahezu 384 Maas.

Digitized by Google

4) Mittelst eines Meßbandes wurden die Umfänge eines 20′ 4″ langen Baumstammes an beiden Enden gleich 7′ 8½″ und 6′ 2″ 8‴ gefunden; wie groß ist der Cubikinhalt und was kostet dieser Stamm, wenn der Cubikfuß zu 30 kr. gerechnet wird?

Auflösung. Um die Berechnung nach der in §. 45. c. angegebenen Formel vornehmen zu können, müssen zuerst die Halbmesser an den beiden Enden bestimmt werden.

Der Durchmesser des größern Kreises wird (Thl. I. §. 63. b.) = 7,85 : 3,14 = 2,5′, also der Halbmesser R = 1,25; eben so findet man den Halbmesser r = 1′. Setzt man diese Zahlenwerthe in die erwähnte Formel, so erhält man:

Cubikinhalt =

$$\frac{(1{,}25 \times 1{,}25 + 1 \times 1 \times 1{,}25 \times 1) \times 3{,}14 \times 20{,}4}{3}$$

= 81,4045 c′.

Der Stamm kostet daher 81,4045 × ½ fl. = 40 fl. 42 kr.

§. 47. Berechnung der Kugel.

a) Die Oberfläche einer Kugel wird erhalten, wenn man den Inhalt eines größten Kreises 4 mal nimmt, oder auch wenn man den Durchmesser mit sich und mit 3,14 multiplicirt.

b) Um den Cubikinhalt einer Kugel zu bestimmen, multiplicire man den Durchmesser dreimal mit sich und mit 3,14 und dividire das Produkt durch 6.

Anmerkungen.

1) Ist die Oberfläche schon bekannt, so erhält man den Cubikinhalt auch, wenn man diese mit dem Halbmesser der Kugel multiplicirt und das Produkt durch 3 dividirt.

2) Ein annäherndes Resultat wird gefunden, wenn man den Durchmesser dreimal mit sich multiplicirt und das Produkt halbirt.

Die Kugel ist also nahezu die Hälfte eines Würfels, dessen Seite gleich dem Durchmesser dieser Kugel ist.

c) Um den Durchmesser einer Kugel bei bekannter Oberfläche zu finden, dividire man (nach a.) letztere

Digitized by Google

durch 3,14 und ziehe aus dem Resultate die Quadratwurzel.

Wird der Durchmesser halbirt, so erhält man den Halbmesser.

d) Ist der Cubikinhalt bekannt, so findet man den Durchmesser, wenn man mit 3,14 in den sechsfachen Cubik-Inhalt dividirt und aus dem Resultate die Cubikwurzel zieht.

e) Der Flächeninhalt einer Kugelhaube (§. 4. 3.), so wie eines Kugelgürtels ist gleich dem Umfange eines größten Kreises der Kugel multiplicirt mit der Höhe dieser Flächen.

f) Um den Cubikinhalt eines Kugelsektors zu berechnen, multiplicire man den nach e. berechneten Inhalt der zu diesem Sektor gehörigen Haube mit dem Halbmesser der Kugel und dividire das Produkt durch 3.

g) Der Kubikinhalt eines Kugelsegments *dcm* (Fig. 36) ist gleich dem Inhalte des ganzen Sektors *gdmc* weniger dem Cubikinhalte des Kegels *dcg*.

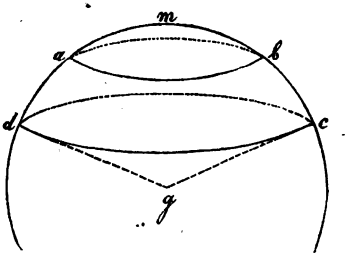


Fig. 36.

h) Man findet den Cubikinhalt einer körperlichen Zone *abcd* (Fig. 36.), wenn man den Cubikinhalt des Segments *abm* von dem Cubikinhalte des Segments *dcm* abzieht.

Anmerkung. Annähernd findet man den Cubikinhalt der Zone, wenn man diese als einen abgekürzten Kegel nach §. 45. c. berechnet.

i) Soll der Cubikinhalt einer Hohlkugel berechnet werden, so ziehe man den Cubikinhalt des hohlen Raumes von dem Cubikinhalte der ganzen Kugel ab.

Digitized by Google

§. 48. Beispiele.

1) Wie groß ist die Oberfläche und der Cubikinhalt einer Kugel von 2′ 4″ Halbmesser?

Auflös. Der Inhalt eines größten Kreises dieser Kugel ist (Thl. I. §. 63. c. 2.) = 2,4 × 2,4 × 3,14 = 18,0864 □′, also nach §. 47. a. die Oberfläche = 4 × 18,0864 □′ = 72,3456 □′ oder 72 □′ 34 □″ 56 □‴. Nach der Anmerkung 1. zu §. 47. b. wird demnach der Cubikinhalt $= \frac{72{,}3456 \times 2{,}4}{3} = 57{,}87648$ c′ oder 57 c′ 876 c″ 480 c‴.

A. n. z. M. Oberfläche = 28 × 28 × 3,14 × 4 = 9847 □″ = 68 □′ 55 □″. Cubikinhalt = 53 c′ 322 c″.

2) Die Oberfläche einer Kugel beträgt 6 □′ 28 □″; wie groß ist der Durchmesser und der Cubikinhalt derselben?

Auflös. Nach §. 47. c. wird der Durchmesser $= \sqrt{\frac{6{,}28}{3{,}14}}$ $= \sqrt{2} = 1{,}414'$ folglich der Halbmesser = 0,707′, also nach §. 47. b. Anmerkung 1. der Cubikinhalt $= \frac{6{,}28 \times 0{,}707}{3} = 1{,}47998$c′ oder 1c′ 479 c″ 980c‴.

A. n. z. M. 6 □′ 28 □″ = 892 □″. Durchmesser $= \sqrt{\frac{892}{3{,}14}} =$ $\sqrt{284} = 16\frac{4}{7}'' = 1' 4\frac{4}{7}''$. Cubikinhalt = 1 c′ 769 c″.

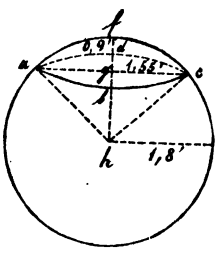
3) Wie groß ist der Durchmesser einer Kugel von 1 c′ 436 c″ 27 c‴ Inhalt?

Auflös. Nach §. 47. d. ist der Durchmesser = $\sqrt[3]{\frac{6 \times 1{,}436027}{3{,}14}} = \sqrt[3]{2{,}744} = 1{,}4'$ oder 1′ 4″.

A. n. z. M. Durchmesser $= \sqrt[3]{\frac{6 \times 3739419\text{ c}'}{3{,}14}} = \sqrt[3]{7145386} =$ 192‴ = 1′ 4″.

Digitized by Google

Fig. 37.



4) Von einer Kugel von 1′ 8″ Halbmesser wird durch eine Ebene ein Segment *abcfd* (Fig. 37) abgeschnitten; wie groß ist die Oberfläche der Haube und der Cubikinhalt dieses Segments, wenn *fg* = 9 Zoll und *gc* = 1′ 5½″ bestimmt wurden?

Auflösung. Der Inhalt eines größten Kreises ist $3{,}14 \times 1{,}8 \times 1{,}8 = 10{,}1736\,\square'$, folglich nach §. 47. e. die Oberfläche der Haube $= 10{,}1736 \times 0{,}9 = 9{,}15624\,\square'$ oder $9\,\square'\ 15\,\square''\ 62\frac{1}{2}\,\square'''$.

Der Cubikinhalt des Segments ist nach §. 47. g. zu berechnen.

Nach §. 47. f. wird der Cubikinhalt des Sektors *afch* $= \frac{9{,}15624 \times 1{,}8}{3} = 5{,}493744\,c'$. Der Inhalt des Kreises *abcd* ist $= 3{,}14 \times 1{,}55 \times 1{,}55 = 7{,}54385\,\square'$; also nach §. 43. c. der Cubikinhalt des Kegels *ach*, da $gh = hf - fg = 1{,}8 - 0{,}9 = 0{,}9$ ist, $= \frac{7{,}54385 \times 0{,}9}{3} = 2{,}263155\,c'$; folglich der Cubikinhalt des Segments *abcfd* $= 5{,}493744 - 2{,}263155 = 3{,}230589\,c'$ oder $3\,c'\ 230\,c''\ 589\,c'''$.

5) Welchen Cubikinhalt hat die Eisenmasse einer Hohlkugel, wenn der größere Durchmesser 1′ 2″ und die Eisendicke 2″ betragen, und wie schwer ist dieselbe?

Auflös. Der Cubikinhalt der ganzen Kugel ist (§. 47. b.) $= \frac{1{,}2 \times 1{,}2 \times 1{,}2 \times 3{,}14}{6} = 0{,}90432\,c'$, der Durchmesser des hohlen Raumes ist, da an dem größern Durchmesser auf beiden Seiten 2 Zoll abgehen $= 1{,}2' - 0{,}4' = 0{,}8'$; also der Cubikinhalt desselben $=$

$$\frac{0{,}8 \times 0{,}8 \times 0{,}8 \times 3{,}14}{6}$$

Digitized by Google

$= 0{,}267946\,c'$ folglich der Cubikinhalt der Eisenmasse (§. 47. i.) $= 0{,}90432\,c' - 0{,}267946\,c' = 0{,}636374\,c'$ oder $636\,c''\ 374\,c'''$.

Da das spec. Gewicht des Gußeisens (Anh. IV.) $= 7{,}2$ ist, so wiegt diese Masse (§. 23.) $= 0{,}636374 \times 54 \times 7{,}2 = 247{,}422\,\text{℔}$ oder 2 Ctr. 47$\frac{1}{2}$ ℔.

6) Wie groß ist das Gewicht einer eisernen Kugel, deren größter Kreis einen Umfang von $7'\ 8''\ 5'''$ hat?

Auflösung. Man hat hier zuerst den Durchmesser, dann den Cubikinhalt und hieraus das Gewicht zu bestimmen.

Der Durchmesser ist (Thl. I. §. 63. b.) $= \frac{7{,}85}{3{,}14} = 2{,}5'$,

also der Cubikinhalt (§. 47. b.) $= \frac{2{,}5 \times 2{,}5 \times 2{,}5 \times 3{,}14}{6}$

$= 8{,}177\,c'$; folglich das Gewicht (§. 23.) $=$
$8{,}177 \times 54 \times 7{,}2 = 3179{,}2176\,\text{℔}$ oder 31 Ctr. 79$\frac{1}{2}$ ℔.

7) Wie groß ist der Durchmesser einer 48pfündigen Kugel von Eisen? (Sp. G. $= 7{,}2$.)

Auflösung. Nach §. 24. ist der Inhalt $= \frac{48}{54 \times 7{,}2} =$
$0{,}123456\,c'$; also nach §. 47. d. der Durchmesser $= \sqrt[3]{\frac{6 \times 0{,}123456}{3{,}14}} = \sqrt[3]{0{,}23558} = 0{,}61'$ oder $6''\ 1'''$.

A. n. z. M. Cubikinhalt $= \frac{48}{66 \times 7{,}2} = 0{,}10101\,c'$. Durchmesser $= 6''\ 11'''$.

8) Aus einer Kugel von Blei, welche 316 ℔ 16 Loth wiegt, sollen kleinere für einen Büchsenlauf von 5 Linien Weite gegossen werden; wie viele solcher Kugeln werden erhalten, wenn das spec. Gewicht des Bleis zu 11,44 angenommen wird?

Auflös. Man dividire mit dem Cubikinhalt der kleinern Kugel in den der größern. Wie in Aufgabe 7. folgt:

Cubikinhalt der großen Kugel $= \frac{316{,}5}{54 \times 11{,}44} = \frac{316{,}5}{617{,}76}$

Digitized by Google

$= 0{,}512334\,c'$. Der Durchmesser einer kleinen Kugel muß $5'''$ oder $0{,}05'$ sein, also wird der Cubikinhalt einer solchen $=$

$$\frac{0{,}05 \times 0{,}05 \times 0{,}05 \times 3{,}14}{6}$$

$= 0{,}00006541\,c'$. Aus der großen Kugel lassen sich also gießen:

$0{,}512334 : 0{,}00006541 = 51233400 : 6541 = 7832$ Stück kleinere.

9) Eine Kugel hat einen Durchmesser von $5'$; wie groß ist der Inhalt einer Kugel von doppeltem, drei- und vierfachem Durchmesser?

Auflösung. Inhalt der Kugel von $5'$ Durchmesser $=$

$$\frac{5 \times 5 \times 5 \times 3{,}14}{6} = 65{,}4166\,c'.$$

Inhalt der Kugel von $2 \times 5 = 10'$ Durchmesser $=$

$$\frac{10 \times 10 \times 10 \times 3{,}14}{6} = 523{,}3333\,c'.$$

Inhalt der Kugel von $3 \times 5 = 15'$ Durchmesser $=$

$$\frac{15 \times 15 \times 15 \times 3{,}14}{6} = 1766{,}25\,c'.$$

Inhalt der Kugel von $4 \times 5 = 20'$ Durchmesser $=$

$$\frac{20 \times 20 \times 20 \times 3{,}14}{6} = 4186{,}66\,c'.$$

Anmerkung. Aus der nähern Betrachtung dieser Resultate ergibt sich für die Kugel ein ähnlicher Satz wie er in der Anmerkung zur Aufgabe 10. in §. 36. für den Würfel aufgestellt wurde.

Man bemerkt nämlich, daß $523{,}333\ldots = 8 \times 65{,}4166$; $1766{,}25 = 27 \times 65{,}4166$; und $4186{,}66\ldots = 64 \times 65{,}4166\ldots$ ist, daß also der Cubikinhalt einer Kugel, somit auch das Gewicht (wenn die Materie dieselbe ist) von doppeltem Durchmesser 8mal, von dreifachem 27mal und von vierfachem Durchmesser 64mal größer wird, oder daß sich die Kugeln verhalten wie die Cubikzahlen ihrer Durchmesser oder Halbmesser.

Auf gleiche Weise läßt sich für alle unter einander ähnliche (gleichgeformte) Körper folgender Satz nachweisen:

Aehnliche Körper verhalten sich dem Cubikinhalte nach, wie die Cubikzahlen irgend gleichliegender Kanten oder Linien derselben. Alle Würfel, so wie alle Kugeln sind unter einander ähnlich.

Digitized by Google

Anhang.

I. Aufgaben über die Berechnung der Körper.

1) Die Seite eines Würfels beträgt 8′ 4″; wie groß ist die Oberfläche?

Auflösung. Der Inhalt eines Seitenquadrats ist = 8,4 × 8,4 = 70,56 □′, also die Oberfläche (§. 28. a.) = 70,56 × 6 = 423 □′ 36 □″.

2) Wie groß ist der Cubikinhalt eines Würfels von 4″ 2‴ Seite?

Auflösung. Cubikinhalt (§. 28. c.) = 0,42 × 0,42 × 0,42 = 0,074088 c′ = 74 c″ 88 c‴.

3) Ein Würfel von 2′ 4″ Seite kann in wie viele Würfel von 3″ Seite zerlegt werden?

Auflösung. Cubikinhalt des ganzen Würfels (§. 28. c.) = 2,4 × 2,4 × 2,4 = 13,824 c′. Der Cubikinhalt eines kleinern Würfels = 0,3 × 0,3 × 0,3 = 0,027 c′; folglich werden aus ersterem erhalten: 13,824 : 0,027 = 13824 : 27 = 512 Würfel von 3″ Seite.

4) Wie groß ist der Cubikinhalt eines Würfels dessen Oberfläche 174 □′ 96 □″ beträgt?

Auflös. Der Inhalt einer Seitenfläche ist = 174,96 : 6 = 29,16 □′, folglich eine Seite (Thl. I. §. 36. b.) = $\sqrt{29,16}$ = 5,4′ und der Cubikinhalt = 5,4 × 5,4 × 5,4 = 157 c′ 464 c″.

5) Wie viel Maas Wasser faßt ein Gefäß, dessen hohler Raum die Form eines Würfels von 8″ Seite hat?

Auflösung. Der Cubikinhalt ist (§. 28. c.) = 0,8 × 0,8 × 0,8 = 0,512 c′, also hält das Gefäß (§. 18. Anmerkung.) 0,512 × 18 = 9,216 Maas.

Digitized by Google

6) Wie viel wiegt ein Postament von Granit, wenn dasselbe einen Würfel von 2′ Seite bildet?

Auflösung. Cubikinhalt $= 2 \times 2 \times 2 = 8\,c'$, also das Gewicht, da das spec. Gewicht des Granits nach Anhang IV. $= 2{,}7$ ist $= 8 \times 54 \times 2{,}7 = 1166\frac{2}{5}$ ℔. (§. 23.)

7) Ein Würfel von Gußeisen wiegt 2 Ctr.; wie groß ist eine Seite desselben?

Auflös. Das spec. Gewicht ist nach Anhang IV. $= 7{,}2$ und $54 \times 7{,}2 = 388{,}8$, also nach §. 24. der Cubikinhalt $= 200 : 388{,}8 = 0{,}514403$, folglich nach §. 28. e eine Seite des Würfels $= \sqrt[3]{0{,}514403} = 0{,}801'$ oder $8'' \frac{1}{10}'''$.

8) Wenn die Seite eines Würfels 6′ beträgt, um wie viel ist die Seite eines Würfels von doppeltem Inhalte größer?

Auflös. Inhalt des Würfels $= 6 \times 6 \times 6 = 216\,c'$, also der des doppelt so großen $= 432\,c'$ und eine Seite desselben $= \sqrt[3]{432} = 7{,}55'$, demnach um $7{,}55 - 6 = 1{,}55'$ oder $1' 5\frac{1}{2}''$ größer. (Vergl. die Anmerk. zu Aufg. 10. in §. 36.)

9) Ein Gefäß soll die Form eines Würfels bekommen und 4 Maas halten; wie groß muß eine Seite desselben gemacht werden und wie viel Blech ist erforderlich, wenn das Gefäß offen bleibt?

Auflös. 4 Maas geben $\frac{4}{18}$ oder $\frac{2}{9} = 0{,}222\ldots c'$, also wird eine Seite (§. 28. e.) $= \sqrt[3]{0{,}222222} = 0{,}605' = 6'' \frac{1}{2}'''$.

Der Inhalt eines Seitenquadrats ist $= 0{,}605 \times 0{,}605 = 0{,}366025$ □′ also braucht man $0{,}366025 \times 5 = 1{,}830125$ □′ oder 1 □′ 83 □″ Blech.

10) Welche Oberfläche hat ein regelmäßiges vierseitiges Prisma von 8′ Höhe, wenn eine Seite der Grundfläche 1′ 5″ lang ist?

Auflösung.

Der Inhalt beider Grundflächen ist $= 1{,}5 \times 1{,}5 \times 2 = 4{,}5$□′
der Inhalt der 4 Seitenflächen $= 1{,}5 \times 8 \times 4 = 48$ □′

folglich die Oberfläche (§. 26. a.) $= 52{,}5$ □′

11) Ein Holzkistchen mit Deckel, das 2′ 4″ lang 1′ 5″ breit und 2′ tief ist, soll mit Papier überklebt werden; wie viele Bogen sind erforderlich, wenn jeder 1′ 5″ lang und 1′ 2″ breit ist?

Digitized by Google

Auflösung.

Inhalt des Bodens und Deckels $= 2{,}4 \times 1{,}5 \times 2 = 7{,}2\ \square'$
Inhalt der 4 Seitenwände $= 2{,}4 \times 2 \times 2 + 1{,}5 \times 2 \times 2 = 15{,}6\ \square'$

die zu überklebende Fläche also $= 22{,}8\ \square'$

Der Inhalt eines Bogen Papiers $= 1{,}5 \times 1{,}2 = 1{,}8\ \square'$; folglich sind nöthig $22{,}8 : 1{,}8 = 12{,}66 \ldots$ oder $12\frac{2}{3}$ Bogen.

12) Wie groß ist der Cubikinhalt einer 8′ hohen Mauer, wenn dieselbe 123′ lang und 2′ dick ist?

Auflös. Nach §. 26. Anmerkung zu b. wird der Cubikinhalt $= 123 \times 8 \times 2 = 1968\ c'$.

13) Es soll ein Graben von 430′ Länge, 4′ Tiefe und 3′ Breite hergestellt werden; wie viel Cubikfuß Erde sind wegzuschaffen?

Auflös. Cubikinhalt (§. 26. b.) $= 430 \times 3 \times 4 = 5160\ c'$.

14) Wie theuer kommt ein prismatischer Baumstamm, welcher 20′ lang, $2\frac{1}{2}$′ hoch und 2′ 2″ dick ist, wenn für den Cubikfuß 48 kr. bezahlt werden müssen?

Auflös. Cubikinhalt des Stammes (§. 26. b.) $= 2{,}5 \times 2{,}2 \times 20 = 110\ c'$, diese kosten 110×48 kr. $= 88$ fl.

15) In einen Behälter, welcher 18′ lang, 4′ tief und 4′ 5″ breit ist, fließen durch eine Röhre in jeder Minute 27 Maas Wasser; in welcher Zeit wird derselbe gefüllt sein?

Auflös. Der Cubikinhalt des Behälters ist $= 18 \times 4{,}5 \times 4 = 324\ c'$. Der Cubikinhalt von 27 Maas ist (§. 18. Anmerkung) $= \frac{27}{11}$ oder $1\frac{1}{2} = 1{,}5\ c'$, also wird der Behälter gefüllt in $324 : 1{,}5 = 216$ Minuten oder in 3 Stunden 36 Minuten.

16) Welches Gewicht hat ein Sandstein, der 5′ 8″ lang, 3′ 4″ breit und 2′ 5″ hoch ist, wenn sein spec. Gewicht 2,4 beträgt?

Auflös. Cubikinhalt des Steins (§. 26. b.) $= 5{,}8 \times 3{,}4 \times 2{,}5 = 49{,}3\ c'$, daher sein Gewicht (§. 23.) $= 49{,}3 \times 54 \times 2{,}4 = 6389{,}28\ \text{℔} = 63$ Ctr. $89\frac{7}{25}$ ℔.

17) Auf einem 45′ langen, 28′ breiten Fruchtboden ist 2′ hoch Frucht aufgeschüttet; wie viel Malter liegen daselbst?

Auflösung. Der Cubikinhalt der Frucht beträgt (§. 26. b.) $45 \times 28 \times 2 = 2520\ c'$; diese geben (§. 18. Anmerk.) $2520 \times 18 = 45360$ Meßlein $= 4536$ Sester oder $453\frac{3}{5}$ Malter.

Digitized by Google

18) Wie viel wiegt eine Bleiplatte, welche 3′ 4″ lang, 1′ 5″ breit und 4‴ dick ist? (Spec. Gew. = 11,38.)

Auflös. Cubikinhalt der Platte $= 3{,}4 \times 1{,}5 \times 0{,}04 = 0{,}204$ c′; also das Gewicht $= 0{,}204 \times 11{,}38 \times 54 = 125{,}36208$ ℔ oder 125 ℔ 12 Loth.

19) 2304 c′ Steine sind so aufgesetzt, daß sie eine 4′ dicke und 8′ hohe Mauer bilden; wie lang ist diese?

Auflösung. Nach der Anmerkung zu d. in §. 26. wird sie $\frac{2304}{4 \times 8} = 72'$ lang.

20) Man soll aus 1984 c′ Steinen eine 124′ lange und 8′ hohe Mauer aufführen; wie dick wird dieselbe gemacht werden müssen?

Auflös. Die Dicke wird $\frac{1984}{124 \times 8} = 2'$ (§. 26. d. Anmerkg).

21) Es soll ein Keller von 14′ Tiefe, 28′ Länge und 16′ Breite gegraben werden. Wie viele Wagen Erde sind wegzuschaffen, wenn der Wagenkasten 7′ lang, 2′ breit und $1\frac{1}{2}$′ tief ist?

Auflös. Cubikinhalt der auszugrabenden Erde $= 28 \times 16 \times 14 = 6272$ c′:

Inhalt des Wagenkastens $= 7 \times 2 \times 1{,}5 = 21$ c′.
Es gibt daher $6272 : 21 = 299$ Fuhren. (Vergl. Anmerkg. zu Aufg. 9. §. 27.)

22) Es soll eine 85′ lange, 8′ hohe und 1′ 8″ dicke Mauer aus Backsteinen aufgeführt werden. Wie viel Backsteine sind zur Aufführung erforderlich und was kosten dieselben, wenn jeder 9″ lang, $4\frac{1}{2}$″ breit und 2″ dick ist und 100 Backsteine mit 1 fl. 30 kr. bezahlt werden?

Auflös. Cubikinhalt der Mauer (§. 26. b.) $= 85 \times 1{,}8 \times 8 = 1224$ c′. Inhalt eines Backsteins $= 0{,}9 \times 0{,}45 \times 0{,}2 = 0{,}081$ c′ folglich sind erforderlich $1224 : 0{,}081 = 15112$ Backsteine und diese kosten $\frac{15112 \times 1\frac{1}{2} \text{ fl.}}{100} = 226$ fl. 40 kr.

23) Es hat Jemand 16 Eisenstäbe, von welchen jeder 3′ lang, 8‴ breit und 6‴ dick ist. Es wird daraus ein Würfel gegossen; wie groß ist eine Seite desselben?

Auflös. Cubikinhalt eines Stabes $= 3 \times 0{,}08 \times 0{,}06 = 0{,}0144$ c′; also der Inhalt der 16 Stäbe $= 0{,}0144 \times 16 = 0{,}2304$ c′ $=$

Digitized by Google

dem Cubikinhalt des Würfels. Eine Seite desselben wird demnach (§. 28. d.) $= \sqrt[3]{0{,}2304} = 0{,}613' = 6'' \, 1\frac{3}{10}'''$.

24) Ein Baumstamm ist 46′ lang, 3′ 5″ breit und 2′ 8″ hoch; wie viel Klafter Holz liefert derselbe?

Auflös. Cubikinhalt des Stammes $= 46 \times 3{,}5 \times 2{,}8 = 450{,}8$ c′; folglich, da 1 Klafter nach §. 18. 144 c′ hat, liefert der Stamm $450{,}8 : 144 = 3\frac{1}{8}$ Klafter.

Anmerkung. Beim wirklichen Messen wird sich aber ein größeres Resultat herausstellen. Warum?

25) Ein Kühlschiff soll $4\frac{1}{2}$ Ohm fassen und 8′ breit werden; wie lang muß man dasselbe machen, wenn das Bier nur $2\frac{1}{2}''$ hoch stehen darf?

Auflösung. $4\frac{1}{2}$ Ohm sind 25 c′ (§. 18.), folglich wird die Länge (§. 26. d.) $= \frac{25}{8 \times 0{,}25} = 12\frac{1}{2}'$.

26) Es soll ein Kanal von 15600′ Länge, 60′ Breite und 12′ Tiefe in 6 Monaten (= 156 Arbeitstagen) gegraben werden; wie viel Arbeiter muß man anstellen, wenn angenommen wird, daß ein Mann im Durchschnitt täglich 96 c′ Erde wegschafft?

Auflös. Inhalt des Canals $= 15600 \times 60 \times 12 = 11232000$ c′. In 156 Tagen fördert 1 Mann $156 \times 96 = 14976$ c′; folglich sind anzustellen $11232000 : 14976 = 750$ Arbeiter.

27) Eine regelmäßige achtseitige Säule von 24′ Höhe hat an der Grundfläche eine Seite von 1′ 5″ Länge; wie theuer kommt der Anstrich der Seitenflächen, wenn der Quadratfuß $2\frac{1}{2}$ kr. kostet und wie groß ist der Cubikinhalt dieser Säule?

Auflös. Inhalt eines Seitenrechtecks $= 24 \times 1{,}5 = 36$ □′; also der Mantel $= 36 \times 8 = 288$ □′. Der Anstrich kostet daher $288 \times 2\frac{1}{2} = 720$ kr. = 12 fl.

Der Inhalt der Grundfläche ist nach Thl. 1. §. 61. d. $= 4{,}828 \times 1{,}5 \times 1{,}5 = 10{,}863$ □′; folglich der Cubikinhalt der Säule $= 10{,}863 \times 24 = 260$ c′ 712 c″.

28) Die Luft übt einen Druck aus, der gleich ist dem Gewichte einer Quecksilbersäule, welche die gedrückte Fläche zur Grundfläche und den jeweiligen Barometerstand zur Höhe hat. Wie stark drückt hiernach die Luft auf die Oberfläche eines Menschen, wenn diese zu 14 □′ angenommen wird, bei

Digitized by Google

einem Barometerstand von 27½″? (Spec. Gew. des Queckſilbers = 13,6.)

Auflöſ. Der Cubikinhalt der erwähnten Queckſilberſäule iſt = $14 \times 2{,}75 = 38{,}5$ c′; alſo ihr Gewicht oder auch der Luftdruck $= 38{,}5 \times 54 \times 13{,}6 = 28274{,}4$ ℔ oder 282¾ Ctr. (nahezu).

29) Wie groß iſt die ganze Oberfläche einer Pyramide mit quadratiſcher Baſis, wenn die Seite der Grundfläche = 8′ 5″ und die Höhe eines Seitendreiecks = 12′ 4″ iſt?

Auflöſung. Inhalt der Grundfläche $= 8{,}5 \times 8{,}5 = 72{,}25$ □′
Inhalt der 4 Seitenflächen (Thl. I. §. 46. a.) =
$$\frac{8{,}5 \times 12{,}4}{2} \times 4 = 210{,}8 \text{ □′}$$
folglich die Oberfläche $= 283{,}05$ □′

30) Eine regelmäßige vierſeitige Pyramide hat an der Grundfläche 2′ 3″ Seite und eine Höhe von 8′ 7″; wie groß iſt der Cubikinhalt?

Auflöſ. Inhalt der Grundfläche $= 2{,}3 \times 2{,}3 = 5{,}29$ □′; alſo der Cubikinhalt (§. 37. c.) $= \frac{5{,}29 \times 8{,}7}{3} = 15$ c′ 341 c″.

31) Zu den größten Gebäuden auf der Erde gehören die Pyramiden von Ghize in Egypten. Unter ihnen befindet ſich eine (die Pyramide des Cheops), welche an der Grundfläche an jeder Seite 775′ (= 716 par. Fuß) lang iſt und deren ſenkrechte Höhe 507′ (= 468 par. Fuß) beträgt; wie groß iſt das Gewicht derſelben, wenn das ſpec. Gewicht der Maſſe, aus welcher ſie beſteht = 2,7 iſt?

Aufl. Inhalt der Grundfläche $= 775 \times 775 = 600625$ □′. Cubikinh. der Pyramide $= \frac{600625 \times 507}{3} = 101505625$ c′; folglich ihr Gewicht $= 101505625 \times 54 \times 2{,}7 = 14799520125$ ℔ oder 147995201½ Ctr.

32) Wie hoch muß eine vierſeitige Pyramide mit quadratiſcher Baſis von 1′ 5″ Seite gemacht werden, damit ſie 2 Ctr. wiegt, wenn das ſpec. Gewicht = 2,5 iſt?

Auflöſung. Cubikinhalt nach §. 24 $= \frac{200}{54 \times 2{,}5} = 1{,}481481$ c′.
Inhalt der Grundfläche $= 1{,}5 \times 1{,}5 = 2{,}25$ □′; folglich die Höhe nach §. 37. e. $= \frac{1{,}481481 \times 3}{2{,}25} = 1{,}975$′.

Digitized by Google

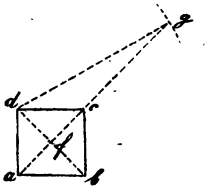
33) Wie groß ist die Seite der Grundfläche einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide von 12′ Höhe und 768 c′ Inhalt?

Auflösung. Nach §. 37. d. wird der Inhalt der Grundfläche $= \frac{768 \times 3}{12} = 192 \square'$; folglich eine Seite derselben $= \sqrt{192} = 13{,}85' = 13' 8\frac{1}{2}''$.

34) Ein Grabstein von Granit bildet eine regelmäßige vierseitige Pyramide. Wie groß ist der Cubikinhalt und das Gewicht desselben, wenn die Seite der Grundfläche $= 3'$ und eine Seitenkante $= 8'$ ist? (Spec. Gew. des Granits $= 2{,}7$.)

Auflös. Nach Thl. 1. §. 61. b. ist der Halbmesser R des um die Grundfläche beschriebenen Kreises $= 0{,}707 \times 3 = 2{,}121'$. Dieser Halbmesser bildet aber mit der Höhe und der Seitenkante der Pyramide ein rechtwinkliges Dreieck und es ist also nach Thl. 1. §. 49. das Quadrat über der Höhe $= 8 \times 8 - 2{,}121 \times 2{,}121 = 59{,}501359$, demnach die Höhe selbst $= \sqrt{59{,}501359} = 7{,}713'$. Der Cubikinhalt wird folglich, da die Grundfläche $= 9 \square'$ ist, nach §. 37. c. $= \frac{9 \times 7{,}713}{3} = 23{,}139$ c′ und das Gewicht (§. 23.) $= 23{,}139 \times 2{,}7 \times 54 = 3373$ ℔ 21 Loth.

Fig. 38.



Anmerkung. Die Höhe der Pyramide könnte man auch auf folgende Weise durch Zeichnung bestimmen: Zeichne ein Quadrat *abcd* (Fig. 38.) mit 3′ Seite in verjüngtem Maaße, ziehe *ac* und *db*, verlängere *ac* und schlage von *d* aus die Kante $= 8'$ nach *dg*, so gibt *fg* die verlangte Höhe, deren Länge nun rückwärts auf dem Maaßstabe zu bestimmen ist.

35) Die Höhe einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide ist 16′ und die Seite der Basis 5′ lang; wie groß ist die ganze Oberfläche?

Auflös. Um die Oberfläche berechnen zu können, ist nach §. 37. a. die Länge der Höhe eines Seitendreiecks zu wissen nöthig. Diese bildet aber mit der Höhe der Pyramide und dem Halbmesser des in die Grundfläche beschriebenen Kreises ein rechtwinkliges Dreieck und kann sonach leicht gefunden werden. Der erwähnte Halbmesser r wird nach Thl. 1. §. 61. b. $= 0{,}866 \times 5 = 4{,}33'$, also das Quadrat über der Höhe des Seitendreiecks (nach Thl. I. §. 48.) $= 16 \times 16 + 4{,}33 \times 4{,}33 = 274{,}7489$ und die Höhe selbst $=$

Digitized by Google

$\sqrt{271{,}7489} = 16{,}57'$. Der Inhalt eines Seitendreiecks wird demnach (Thl. I. §. 46. a.) $= \frac{16{,}57 \times 5}{2} = 41{,}425\,\square'$; also der des

Mantels $= 41{,}425 \times 6 = \ldots\ldots\ldots\ldots 248{,}55\,\square'$

Hierzu die Grundfläche (Thl. I. §. 51. d.) $=$

$2{,}598 \times 5 \times 5 = \ldots\ldots\ldots\ldots 64{,}95\,\square'$

addirt, gibt für die ganze Oberfläche $= 313{,}5\,\square' = 313\frac{1}{2}\,\square'$.

Anmerkung. Die Höhe des Seitendreiecks kann auch leicht durch Zeichnung bestimmt werden.

36) Wie groß ist die ganze Oberfläche einer abgekürzten regelmäßigen vierseitigen Pyramide, wenn die Seite des größeren Quadrats $= 8'\,6''$, die des kleinern $= 5'\,5''$ und die Höhe eines Seitenparalleltrapezes $= 15'\,4''$ ist?

Auflös. Inhalt des größern Quadrats $= 8{,}6 \times 8{,}6 = 73{,}96\,\square'$

„ „ kleinern „ $= 5{,}5 \times 5{,}5 = 30{,}25\,\square'$

Inhalt eines Seitenparalleltrapezes (nach Thl. I. §. 54. a.) $= \frac{8{,}6 + 5{,}5}{2} \times 15{,}4 = 108{,}57\,\square'$, also

der des Mantels $= 108{,}57 \times 4 = \ldots\ldots 434{,}28\,\square'$

folglich die ganze Oberfläche $= 538{,}49\,\square'$

37) Die beiden Grundflächen einer abgekürzten Pyramide betragen $16\,\square'$ und $25\,\square'$, die senkrechte Entfernung beider ist $9'$; wie groß ist der Cubikinhalt dieser Pyramide?

Auflös. Nach der in §. 39. c. angegebenen Formel wird der Cubikinhalt $= \frac{(25 + 16 + \sqrt{25 \times 16}) \times 9}{3} = 183\,c'$.

Anmerkung. Nach der Annäherungsmethode (Anmerkung 1. zu §. 39. c.) wird der Cubikinhalt $= \frac{25 + 16}{2} \times 9 = 184{,}5\,c'$; also um $1\frac{1}{2}\,c'$ zu groß.

38) Wie groß ist der Cubikinhalt eines vierseitigen pyramidalischen Baumstammes, welcher an der größern Grundfläche $3'\,2''$ breit und $2'\,4''$ dick, an der kleinern aber $2'\,8''$ breit und $2'$ dick ist und eine Länge von $31'\,5''$ hat?

Auflös. Der Cubikinhalt wird nach §. 39. c. $= 208{,}215\,c'$, oder $208\,c'\,215\,c''$.

Anmerkung. Nach der Näherungsmethode erhält man $209{,}16\,c'$; also nur $945\,c''$ zu viel.

Digitized by Google

39) Ein eisernes Gewicht hat die Form einer abgekürzten regelmäßigen sechsseitigen Pyramide, die Seite der größern Grundfläche beträgt 8″, die der kleinern 6″ und die Höhe 5″; wie schwer ist dasselbe?

Auflös. Nach Thl. I. §. 61. d. ist der Inhalt der größern Grundfläche $= 0{,}8 \times 0{,}8 \times 2{,}598 = 1{,}66272$ □′, der der kleinern $= 0{,}5 \times 0{,}5 \times 2{,}598 = 0{,}6495$ □′, also der Cubikinhalt des Gewichts (§. 39. c.) =

$$\frac{(1{,}66272 + 0{,}6495 + \sqrt{1{,}66272 \times 0{,}6495}) \times 0{,}5}{3}$$

$= 0{,}55857$ c′ und hieraus das Gewicht (§. 23) $= 0{,}55857 \times 54 \times 7{,}2 = 217$ ℔ 5 Loth.

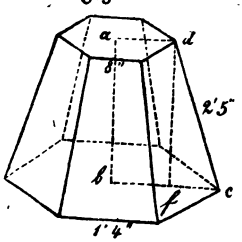
40) Die Inhalte der beiden Grundflächen einer abgekürzten Pyramide von 548 c′ Inhalt betragen 64 □′ und 56 □′ 25 □″; wie hoch ist dieselbe?

Auflös. Nach der in §. 39. c. Anmerk. 2 aufgestellten Formel 1. wird die Höhe $h = \frac{3 \times 548}{(64 + 56{,}25 + \sqrt{64 \times 56{,}25})} = \frac{1644}{180{,}25} =$ 9,12′ oder 9′ 1″ 2‴.

41) Ein Körper von Eisen hat die Gestalt einer regelmäßigen sechsseitigen abgekürzten Pyramide. Die Seite der untern Grundfläche mißt 1′ 4″, die der obern 8″ und jede der schiefen Seitenkanten ist 2′ 5″ lang; wie groß ist das Gewicht dieses Körpers, das spec. Gew. zu 7,2 gerechnet?

Auflös. Man hat hier zunächst, um den Cubikinhalt berechnen zu können, die Höhe ab (Fig. 39.) zu bestimmen, wie folgt:

Fig. 39.



Nach Theil I. §. 61. b. wird der Halbmesser $bc = 1{,}4'$ und der $ad = 0{,}8'$. Zieht man nun df senkrecht auf bc, so entsteht das Rechteck $adfb$ und ein rechtwinkliges Dreieck dfc, in welchem $fc = bc - bf = 1{,}4 - 0{,}8 = 0{,}6'$ ist.

Nach Theil I. §. 49. wird nun das Quadrat über $df = 2{,}5 \times 2{,}5 - 0{,}6 \times 0{,}6 = 5{,}89$; folglich df oder auch die Höhe $ab = \sqrt{5{,}89} = 2{,}42'$.

Der Inhalt des untern Sechsecks ist nach Theil I. §. 61. d. $= 2{,}598 \times 1{,}4 \times 1{,}4 = 5{,}09208$ □′, der des obern =

Digitized by Google

$2{,}598 \times 0{,}8 \times 0{,}8 = 1{,}66272$ □′; folglich nach §. 39. c. der Cubikinhalt =

$$\frac{(5{,}09208 + 1{,}66272 + \sqrt{5{,}09208 \times 1{,}66272}) \times 2{,}42}{3}$$

= 7,7960784 c′ und endlich nach §. 23. das Gewicht =
7,7960784 × 54 × 7,2 = 30 Ctr. 31 ℔.

42) Wie groß ist der Mantel und die ganze Oberfläche eines Cylinders von 18′ Höhe′ wenn sein Umfang 7′ 8″ 5‴ beträgt?

Auflösung. Nach §. 41. a. wird der Inhalt des Mantels = 7,85 × 18 = 141,3 □′.

Nach Theil I. §. 63. b. ist der Durchmesser = 7,85 : 3,14 = 2,5′, also der Inhalt der Grundfläche nach Theil I. §. 63. c. = 4,90625 □′; folglich die ganze Oberfläche =
141,3 □′ + 2 × 4,90625 □′ = 151 □′ 11¼ □″.

43) Eine walzenförmige Säule hat eine Höhe von 22′ und einen Durchmesser von 3′ 6″; wie groß ist die krumme Oberfläche derselben?

Auflös. Der Umfang ist = 3,6 × 3,14 = 11,304′ folglich die krumme Oberfläche (§. 41. a.) = 11,304 × 22 = 248,688 □′.

44) Wie groß ist der Cubikinhalt eines 12′ hohen Cylinders, dessen Halbmesser 1′ 5″ lang ist?

Auflösung. Inhalt der Grundfläche (Theil I. §. 63. c. 2.) = 1,5 × 1,5 × 3,14 = 7,065 □′, folglich der Cubikinhalt nach §. 41. c. = 7,065 × 12 = 84,78 c′ = 84 c′ 780 c″.

45) Der Umfang einer 48′ hohen Säule beträgt 14′ 1″ 3‴; wie groß ist der Cubikinhalt derselben?

Auflös. Der Durchmesser ist = 14,13 : 3,14 = 4,5′, also der Halbmesser = 2,25′ und der Inhalt der Basis (Thl. I. §. 63. c. 1.) = $\frac{14{,}13 \times 2{,}25}{2}$ = 15,89625 □′. Der Cubikinhalt wird daher (§. 41. c.) = 15,89625 × 48 = 763,02 c′ = 763 c′ 20 c″.

46) Wie viel Maas faßt ein cylindriges Gefäß, welches im Lichten 1′ 8″ Weite und eine Höhe von 3′ hat?

Auflösung. Halbmesser = 0,9′, also der Inhalt des Bodens = 0,9 × 0,9 × 3,14 = 2,5434 □′ und der Cubikinhalt des Gefäßes (§. 41. c.) = 2,5434 × 3 = 7,6302 c′. Dieses faßt demnach (§. 18. Anmerk.) 7,6302 × 18 = 137,3436 Maas.

47) Eine Marmorsäule hat einen Umfang von 7,536′ und eine Höhe von 16′; wie groß ist das Gewicht derselben? (Spec. Gewicht des Marmors sei = 3.)

Digitized by Google

Auflöſ. Der Durchmeſſer iſt = 7,536 : 3,14 = 2,4′, alſo der Halbmeſſer = 1,2′ und der Inhalt der Grundfläche = 7,536 × 0,6 = 4,5216 □′. Der Cubikinhalt beträgt demnach (§. 41. c.) 4,5216 × 16 = 72,3456 c′ und das Gewicht (§. 23.) = 72,3456 × 54 × 3 = 11719,9872 ℔ oder beinahe 117¼ Ctr.

48) Es ſoll ein Seſter verfertigt werden, welches 1′ Durchmeſſer hat; wie hoch muß man daſſelbe machen?

Auflöſ. 1 Seſter = $\frac{10}{11}$ oder $\frac{5}{9}$ = 0,555555 c′, alſo, da der Inhalt des Bodens (Thl. I. §. 63. c. 2.) = 0,5 × 0,5 × 3,14 = 0,785□′ iſt, ſo wird die Höhe des Seſters (§. 41. e.) = 0,555555 : 0,785 = 0,707′ oder 7″ $\frac{7}{10}$‴.

49) Ein oben offenes Gefäß von Blech ſoll 2 Maas faſſen und 6″ hoch werden; wie groß wird der Bodenhalbmeſſer und wie viel Blech iſt zur Verfertigung erforderlich?

Auflöſ. 2 Maas = $\frac{2}{18}$ = 0, 111111 c′; alſo (§. 41. d.) der Inhalt der Grundfläche = 0,111111 : 0,6 = 0,185185 . . □′.

Nach Theil I. §. 63. d. wird demnach der Halbmeſſer =

$$\sqrt{\frac{0,185185}{3,14}} = \sqrt{0,058976} = 0,242' \text{ oder } 2'' 4\tfrac{1}{2}'''.$$

Das erforderliche Blech beträgt (§. 41. a.)
0,484 × 3,14 + 0,185185 = 1,704945 □′ oder 1 □′ 70½ □″.

50) In ein Gefäß, welches die Form eines Cylinders hat und 1′ 4″ weit und 3′ hoch iſt, werden 27 Maas Waſſer gegoſſen; wie hoch iſt der Waſſerſpiegel über dem Boden?

Auflöſ. Die Flüſſigkeit bildet einen Cylinder von 27 Maas oder 1½ c′ Inhalt und einer Grundfläche von 1,4′ Durchmeſſer. Der Inhalt der letztern iſt aber (Thl. I. §. 63. c.) = 0,7 × 0,7 × 3,14 = 1,5386 □′, alſo beträgt die Höhe der Waſſerſäule (§. 41. e.) = 1,5 : 1,5386 = 0,974′ oder 9″ 7½‴.

51) Es ſoll ein eiſernes Gewicht von der Form eines Cylinders gegoſſen werden, welches gerade 100 ℔ wiegt; wie hoch wird daſſelbe gemacht werden müſſen, wenn der Durchmeſſer 6″ betragen ſoll?

Auflöſ. Das ſpec. Gew. iſt 7,2, alſo nach §. 24. der Cubikinhalt = $\frac{100}{54 \times 7,2} = \frac{100}{388,8} = 0,257201$ c′.

Der Inhalt der Grundfläche iſt = 0,3 × 0,3 × 3,14 = 0,2826 □′, folglich nach §. 41. e. die Höhe = 0,257201 : 0,2826 = 0,91′ oder 9″ 1‴.

52) Ein bleierner Cylinder von 2′ 8″ Länge hat ein Gewicht von

Digitized by Google

3 Ctr.; wie dick ist derselbe? (spec. Gew. des Bleies = 11,3).

Auflösung. Cubikinhalt (§. 24.) $= \frac{300}{54 \times 11{,}3} = \frac{300}{610{,}2} =$ 0,491642 c′, also der Inhalt des Querschnitts (§. 41. d.) = 0,491642 : 2,8 = 0,17558 □′; folglich (Thl. I. §. 63. d.) der Halbmesser $= \sqrt{\frac{0{,}17558}{3{,}14}} = \sqrt{0{,}0559} = 0{,}236'$ und der Durchmesser = 0,236 × 2 = 4″ 7$\frac{1}{5}$‴.

53) Ein prismatischer Brunnentrog von 8′ Länge 3′ 5″ Breite und 4′ Tiefe (im Lichten) ist mit Wasser gefüllt; wie viel Mal muß man mit einem cylinderförmigen Gefäße von 6″ Durchmesser und 1′ 5″ Höhe schöpfen, um denselben zu entleeren, wenn das Gefäß immer ganz gefüllt wird?

Auflös. Inhalt des Troges = 8 × 3,5 × 4 = 112 c′. Inhalt des Gefäßes = 0,3 × 0,3 × 3,14 × 1,5 = 0,4239 c′; demnach muß man schöpfen 112 : 0,4239 = 264 mal.

54) Um die innere Weite einer Glasröhre zu messen, hat man in dieselbe $\frac{1}{2}$ Loth Quecksilber gebracht und gefunden, daß dieses darin einen 6″ 5‴ langen Cylinder bildete; wie groß war der innere Durchmesser der Röhre? (Spec. Gew. = 13,6.)

Auflös. Cubikinhalt des Quecksilbers (da $\frac{1}{2}$ Loth = $\frac{1}{64}$ = 0,015625 ℔) nach §. 24. $= \frac{0{,}015625}{54 \times 13{,}6} = 0{,}000021275$ c′; also nach §. 41. d. der Inhalt des Querschnitts = 0,000021275 : 0,65 = 0,00003273 □′; folglich nach Theil I. §. 63. d. der Halbmesser $= \sqrt{\frac{0{,}00003273}{3{,}14}}$ = 0,0032′ und der Durchmesser = 0,0064′ oder 6$\frac{4}{5}$ IV.

55) Welches Gewicht hat ein Mühlstein von 4′ Durchmesser, wenn seine Höhe 9″ 5‴ beträgt? (Spec. Gew. = 2,8.)

Auflös. Cubikinhalt = 2 × 2 × 3,14 × 0,95 = 11,932 c′, folglich das Gewicht = 11,932 × 54 × 2,8 = 644,328 ℔.

56) In ein cylindrisches Gefäß von 9″ Weite wird mit einem andern von 3″ Weite und 8″ Höhe Wasser geschöpft; bis zu welcher Höhe wird ersteres gefüllt sein, nachdem man 6 mal geschöpft hatte?

Auflös. Cubikinhalt des nach dem 6ten Male geschöpften Wassers = 0,15 × 0,15 × 3,14 × 0,8 × 6 = 0,33912 c′. Inhalt der

Digitized by Google

Grundfläche des größern Gefäßes $= 0{,}45 \times 0{,}45 \times 3{,}14 = 0{,}63585$ □′. Also nach §. 41. e. die Höhe des Wasserstandes $= 0{,}33912 : 0{,}63585 = 0{,}533'$ oder $5'' 3\frac{3}{10}'''$.

57) Für einen runden Baumstamm von 36′ Länge und 4′ Dicke wurden $150\frac{7}{10}$ fl. bezahlt; wie theuer kam ein Cubikfuß?

Auflös. Inhalt des Querschnitts $= 2 \times 2 \times 3{,}14 = 12{,}56$ □′, also der Cubikinhalt des Stammes (§. 41. c.) $= 12{,}56 \times 36 = 452{,}16$ c′.

1 c′ kostete demnach $150{,}7 : 452{,}16 = 0{,}333\ldots$ oder 20 kr.

58) Wie groß ist der Cubikinhalt eines hohlen Cylinders von 18′ Höhe, wenn der äußere Durchmesser $= 12''$ und die Weite im Lichten $= 6''$ ist?

Auflösung. Der Inhalt des ganzen Cylinders ist $= 20{,}3472$ c′. Der Inhalt des hohlen Raumes beträgt 5,0868 c′; folglich wird der Cubikinhalt des hohlen Cylinders $= 20{,}3472 - 5{,}0868 = 15{,}2604$ c′ oder 15 c′ 260 c″ 400 c‴.

59) Wie groß ist der Cubikinhalt einer 12′ langen eisernen Röhre, wenn deren Umfang 3′ 1″ 4‴ beträgt und die Eisendicke $= 2'' 5'''$ ist?

Auflös. Der äußere Durchmesser wird $= 1'$; also der Cubikinhalt des ganzen Cylinders $= 9{,}42$ c′. Da die Dicke des Eisens 2″ 5‴ beträgt, so ist der Halbmesser des hohlen Raumes $= 0{,}5' - 0{,}25' = 0{,}25'$ und der Cubikinhalt desselben $= 2{,}355$ c′; folglich der Cubikinhalt der Eisenmasse $= 9{,}42 - 2{,}355 = 7{,}065$ c′ oder 7 c′ 65 c″.

60) Wie groß ist der Mantel und die ganze Oberfläche eines Kegels, wenn der Halbmesser der Grundfläche $= 2'\ 5''$ und die Seite desselben $= 8'\ 6''$ messen?

Auflös. Mantel (§. 43. a.) $= \frac{5 \times 3{,}14 \times 8{,}6}{2} = 67$ □′ 51 □″

Inhalt der Grundfläche $= 2{,}5 \times 2{,}5 \times 3{,}14 = 19$ □′ $62\frac{1}{4}$ □″

folglich die Oberfläche $= 87$ □′ $13\frac{1}{4}$ □″

61) Die Grundfläche eines 8′ hohen Kegels beträgt 6 □′; wie groß ist der Cubikinhalt desselben?

Auflös. Nach §. 43. c. ist der Cubikinhalt $= \frac{6 \times 8}{3} = 16$ c′.

62) Der Halbmesser der Grundfläche eines 2′ 4″ hohen Kegels beträgt 4″; wie groß ist sein Cubikinhalt?

Digitized by Google

Auflöſ. Der Inhalt der Grundfläche iſt $= 0{,}4 \times 0{,}4 \times 3{,}14 =$ $0{,}5024$ □′, alſo der Cubikinhalt (§. 43. c.) $= \frac{0{,}5024 \times 2{,}4}{3}$ $= 0{,}40192$ c′ $= 401$ c″ 920 c‴.

63) Wie groß iſt die ganze Oberfläche und der Cubikinhalt eines 6′ hohen Kegels, wenn der Halbmeſſer der Grundfläche 1′ 5″ lang iſt?

Auflöſ. Die Seite des Kegels iſt (§. 43. f.) $= \sqrt{6 \times 6 + 1{,}5 \times 1{,}5}$ $= \sqrt{38{,}25} = 6{,}18'$, alſo nach §. 43. a. der Mantel $= \frac{3 \times 3{,}14 \times 6{,}18}{2} = 29{,}1078$ □′. Der Inhalt der Grundfläche iſt $1{,}5 \times 1{,}5 \times 3{,}14 = 7{,}065$ □′, folglich die Oberfläche (§. 43. b.) $= 36{,}1728$ □′.

Der Cubikinhalt iſt (§. 43. c.) $= \frac{7{,}065 \times 6}{3} = 14{,}13$ c′. $=$ 14 c′ 130 c″

Anmerkung. Durch Zeichnung läßt ſich die Seite auf folgende Weiſe finden: Man mache (Fig. 40) $ab = 1'\ 5''$, ac ſenkrecht auf $ab = 6'$, ſo gibt bc die verlangte Seite.

Fig. 40.

64) Der Umfang der Grundfläche eines Kegels beträgt 6′ 2″ 8‴, die Seite iſt 5′ 4″ lang; wie groß iſt der Inhalt des Mantels und der Cubikinhalt?

Aufl. Der Inhalt des Mantels iſt $= \frac{6{,}28 \times 5{,}4}{2} = 16{,}956$ □′ die Höhe des Kegels iſt nach §. 43. e. $=$ $\sqrt{5{,}4 \times 5{,}4 - 1 \times 1} = \sqrt{28{,}16} = 5{,}3'$ (denn der Durchmeſſer iſt $= 6{,}28 : 314 = 2'$, alſo der Halbmeſſer $= 1'$). Der Cubikinhalt wird, weil die Grundfläche $= 1 \times 1 \times 3{,}14 = 3{,}14$ □′ Inhalt hat, nach §. 43 c. $= \frac{3{,}14 \times 5{,}3}{3} = 5{,}547333$ c′ $= 5$ c′ 547 c″ 333 c‴.

65) Ein kegelförmiger Trichter ſoll 4 Maas faſſen. Wie groß muß die Seite werden, wenn die Weite 8″ betragen ſoll und wie wird das Netz hierzu gezeichnet?

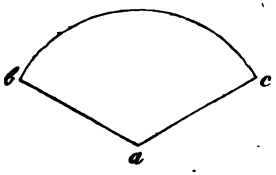
Auflöſ. 4 Maas ſind $\frac{4}{18}$ oder $\frac{2}{9}$ c′ $= 0{,}222222$ c′; alſo, da der Inhalt der Oeffnung $= 0{,}4 \times 0{,}4 \times 3{,}14 = 0{,}5024$ □′ beträgt,

Digitized by Google

ist nach §. 43. d. die Höhe des Trichters $= \frac{0{,}222222 \times 3}{0{,}5024} =$ 1,326′.

Die Seite wird also (§. 43. f.) $= \sqrt{1{,}326 \times 1{,}326 + 0{,}4 \times 0{,}4}$ $= \sqrt{1{,}918276} = 1{,}385' = 1'\ 3''\ 8\frac{1}{2}'''$.

Fig. 41.



Beschreibt man daher (Fig. 41.) mit $ab = 1'\ 3''\ 8\frac{1}{2}'''$ einen Bogen bc und macht diesen gleich dem Umfang der Oeffnung $= 0{,}8 \times 3{,}14 = 2{,}512' = 2'\ 5''\ 1'''$, so ist abc das Netz zu dem Trichter.

66) Ein Haufen Sand hat die Gestalt eines Kegels. Wie viel Cubikfuß enthält derselbe, wenn der Umfang auf dem Boden 47′ 1″ beträgt und eine Linie vom Umfange nach der Spitze gemessen 25′ lang ist?

Auflösung. Der Durchmesser der Grundfläche ist $= 47{,}1 : 3{,}14 = 15'$, also der Halbmesser $= 7{,}5'$ und der Inhalt derselben $= 7{,}5 \times 7{,}5 \times 3{,}14 = 176{,}625\ \square'$. Die Höhe des Haufens (§. 43. e.) $= \sqrt{(25 \times 25 - 7{,}5 \times 7{,}5)} = \sqrt{568{,}75} = 23{,}84'$; folglich der Cubikinhalt (§. 43. c.) $= \frac{176{,}625 \times 23{,}84}{3} =$ 1403,58 c′.

67) Ein Kegel von Kupfer wiegt 50 ℔ und ist 5″ hoch; wie groß ist der Halbmesser der Grundfläche? (Spec. Gewicht = 8,78.)

Auflös. Nach §. 24. ist der Cubikinhalt $= \frac{50}{54 \times 8{,}78} = 0{,}105458 c'$, also nach §. 43. d. der Inhalt der Grundfläche $= \frac{0{,}105458 \times 3}{0{,}5}$ $= 0{,}63275$, folglich der Halbmesser $= \sqrt{\frac{0{,}63275}{3{,}14}} = 4''\ 4\frac{4}{5}'''$.

68) Die Durchmesser der beiden Grundflächen eines abgekürzten Kegels betragen 5′ und 4′, die Seite desselben ist 8′ lang; wie groß ist der Inhalt des Mantels und der ganzen Oberfläche?

Auflös. Der Umfang des größern Kreises ist $= 5 \times 3{,}14 = 15{,}7'$; der des kleinern Kreises $= 4 \times 3{,}14 = 12{,}56$; also nach §. 45. a.

Digitized by Google

der Mantel $= \frac{15{,}7 + 12{,}56}{2} \times 8 =$ . . . . 113,04 □′

der Inhalt der größern Grundfläche =

$2{,}5 \times 2{,}5 \times 3{,}14$ 19,625 □′

„ „ „ kleinern „ $= 2 \times 2 \times 3{,}14$ 12,56 □′

daher die ganze Oberfläche = 145,225 □′

69) Die Halbmesser der beiden Grundflächen eines abgekürzten Kegels sind 6′ und 5′, die senkrechte Entfernung derselben beträgt 9′; wie groß ist der Cubikinhalt?

Auflös. Setzt man in der Formel §. 45. c. $R = 6$, $r = 5$ und $h = 9$, so folgt der Cubikinhalt $= (6 \times 6 + 5 \times 5 + 6 \times 5) \times \frac{3{,}14 \times 9}{3} = (36 + 25 + 30) \times 9{,}42 = 857{,}22$ c′.

Anmerkung. Wendet man die beiden in §. 45. c. angeführten Näherungsmethoden an, so erhält man:

1) Mittel beider Halbmesser $= \frac{6 + 5}{2} = 5{,}5$; Inhalt des zugehörigen Kreises $= 3{,}14 \times 5{,}5 \times 5{,}5 = 94{,}985$ □′; also der Cubikinhalt $= 94{,}985 \times 9 = 854{,}865$ c′.

2) Inhalt des größern Kreises $= 6 \times 6 \times 3{,}14 =$ 113,04 □′

„ „ kleinern „ $= 5 \times 5 \times 3{,}14 =$ 78,5 □′

Summe beider = 191,54 □′

also der Cubikinhalt $= \frac{191{,}54 \times 9}{2} = 861{,}93$ c′.

Das Resultat nach der ersten Methode ist also um 2 c′ 355 c″ zu klein und das der zweiten um 4 c′ 710 c″ zu groß. Die Abweichung von dem wahren Werthe ist hier beträchtlich, weil die Inhalte der beiden Kreise um sehr viel differiren.

70) Ein 30′ langer Baumstamm ist an dem einen Ende 3′ und an dem andern 2′ 6″ dick; wie groß ist der Cubikinhalt?

Auflös. Man hat in der §. 45. c. angeführten Formel für $R = \frac{3}{2} = 1{,}5$′, für $r = \frac{2{,}6}{2} = 1{,}3$′ und für $h = 30$′ zu setzen. Es wird der Cubikinhalt =

$$\frac{(1{,}5 \times 1{,}5 + 1{,}3 \times 1{,}3 \times 1{,}5 \times 1{,}3) \times 3{,}14 \times 30}{3},$$

$= 184{,}946$ c′ oder 184 c′ 946 c″.

Anmerkung. Annähernd erhält man:

Nach der ersten Methode: Größerer Halbmesser $= 1{,}5$′, kleinerer Halbmesser $= 1{,}3$′, Mittel beider $= \frac{1{,}5 + 1{,}3}{2} = 1{,}4$′;

Digitized by Google

Inhalt des zugehörigen Kreises $= 3{,}14 \times 1{,}4 \times 1{,}4 = 6{,}1544 \square'$,
also der Cubikinhalt $= 6{,}1544 \times 30 = 184{,}632\ c'$.

Nach der zweiten Methode:

Inhalt des größern Kreises $= 1{,}5 \times 1{,}5 \times 3{,}14 = 7{,}065\ \square'$
„ „ kleinern „ $= 1{,}3 \times 1{,}3 \times 3{,}14 = 5{,}3066\ \square'$

Summe beider $= 12{,}3716\ \square'$

also der Cubikinhalt $= \frac{12{,}3716 \times 30}{2} = 185\ c'\ 574\ c''$.

Die erste Art liefert ein Resultat nur um 314 c'' zu klein und die zweite um 628 c'' zu groß.

71) Ein runder Baumstamm hat an dem untern Theile einen Umfang von 12′ 5″ 6‴ und an dem obern Ende einen solchen von 9′ 4″ 2‴, seine Länge beträgt 33′; wie groß ist der Cubikinhalt und was kostet dieser Stamm, wenn für den Cubikfuß 24 kr. bezahlt werden?

Auflös. Der Durchmesser am untern Ende ist $= 12{,}56 : 3{,}14 = 4'$, und der am obern $= 9{,}42 : 3{,}14 = 3'$ also ist in der Formel für $R = \frac{4}{2} = 2'$, für $r = \frac{3}{2} = 1{,}5'$ und für $h = 33'$ zu setzen.

Man findet: Cubikinhalt $= 319{,}495\ c'$. Der Stamm kostet demnach $319{,}495 \times 24$ kr. oder 127 fl. 47 kr.

72) Ein Kessel ist oben 3′ 4″ und am Boden 2′ 8″ weit und 2′ 4″ tief; wie viel Maas Wasser faßt derselbe?

Auflös. Setzt man in der bekannten Formel für $R = \frac{3{,}4}{2} = 1{,}7'$, für $r = \frac{2{,}8}{2} = 1{,}4'$ und für $h = 2{,}4'$, so wird der Cubikinhalt $=$

$$\frac{(1{,}7 \times 1{,}7 + 1{,}4 \times 1{,}4 + 1{,}7 \times 1{,}4) \times 3{,}14 \times 2{,}4}{3}$$

$= 18{,}16176\ c'$. Der Kessel faßt daher $18{,}16176 \times 18 = 326\frac{9}{10}$ Maas.

73) Man soll ein Gefäß von der Form eines abgekürzten Kegels aus Blech verfertigen. Dasselbe muß oben 1′ 4″ und unten 1′ weit werden und gerade 1 Sester fassen; wie tief wird das Gefäß; wie groß muß man eine Seite desselben machen; wie viel Blech ist dazu erforderlich; und wie wird das Netz hierzu construirt?

Auflös. Setzt man in der in §. 45. Anmerkung 2. gegebenen Formel von h für $C = \frac{1}{1\,8} = 0{,}555\ldots\ldots\ c'$ (der Inhalt eines Sesters), für $R = \frac{1{,}4}{2} = 0{,}7'$ und für $r = \frac{1}{2} = 0{,}5'$, so findet man die

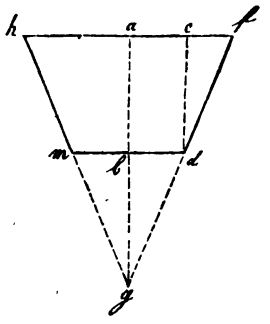
Digitized by Google

$$\text{Tiefe (Höhe)} = \frac{3 \times 0{,}555}{(0{,}7 \times 0{,}7 + 0{,}5 \times 0{,}5 + 0{,}7 \times 0{,}5) \times 3{,}14}$$

$$= \frac{1{,}665}{3{,}4226} = 0{,}486' \text{ oder } 4'' \, 8\tfrac{1}{2}'''.$$

Die Seite fd (Fig. 42) des Gefäßes findet man aus dem rechtwinkligen Dreieck dcf. Es ist nämlich $fd = \sqrt{cf \times cf + cd \times cd}$, oder da $cd = ab = 0{,}486'$ und $cf = af - ac = af - bd = 0{,}7 - 0{,}5 = 0{,}2'$ ist; auch $fd = \sqrt{0{,}2 \times 0{,}2 + 0{,}486 \times 0{,}486} = \sqrt{0{,}276196} = 0{,}525'$.

Fig. 42.



Da ferner der Umfang der Oeffnung $= 1{,}4 \times 3{,}14 = 4{,}396'$ und der des Bodens $= 3{,}14'$ beträgt, so wird nach §. 45. a. die krumme

$$\text{Oberfläche} = \frac{(4{,}396 + 3{,}14) \times 0{,}525}{2} \ldots = 1{,}9782 \square'$$

Hierzu addirt den Inhalt des Bodens $=$

$$0{,}5 \times 0{,}5 \times 3{,}14 = \underline{0{,}785 \square'}$$

gibt für das erforderliche Blech $= 2{,}7632 \square'$.

Das Netz zu diesem Gefäße kann auf folgende Weise erhalten werden:

Man trage hf (Fig. 42.) $= 1'\ 4''$ auf, errichte in der Mitte die Senkrechte ab und mache sie $= 4'' \, 8\tfrac{1}{2}'''$, ziehe dann md parallel zu hf und mache $mb = bd = \frac{1}{2}$ Fuß (da $md = 1'$ werden soll), verbinde m mit h und d mit f und verlängere die Linien hm und fd bis sie sich in g schneiden, so geben die Linien gf und gd die zwei Radien mit welchen die concentrischen Kreisbogen des Netzes Fig. 29. gezeichnet werden müssen.

74) Wie groß ist die Oberfläche einer Kugel von 6′ Durchmesser?

Auflös. Nach §. 42. a. wird die Oberfläche $= 3{,}14 \times 3 \times 3 \times 4 = 113 \square' \, 4 \square''$.

75) Welche Oberfläche hat eine Kugel, deren größter Umfang $9'\ 4''\ 2'''$ beträgt?

Auflös. Der Durchmesser ist $= 9{,}42 : 3{,}14 = 3'$, also der Halbmesser $= 1{,}5$ und die Oberfläche (§. 47. a.) $= 1{,}5 \times 1{,}5 \times 3{,}14 \times 4 = 28 \square' \, 26 \square''$.

76) Der Durchmesser einer Kugel beträgt 9″; wie groß ist der Cubikinhalt?

Digitized by Google

Auflöſ. Nach §. 47. b. iſt der Cubikinhalt $= \frac{3{,}14 \times 0{,}9 \times 0{,}9 \times 0{,}9}{6} = \frac{2{,}28906}{6} = 0{,}38151\ c'$ oder 381 c″ 510 c‴.

77) Der Umfang des größten Kreiſes einer Kugel beträgt 1,413′; wie groß iſt der Kubikinhalt derſelben?

Auflöſ. Der Durchmeſſer iſt $= 1{,}413 : 3{,}14 = 0{,}45'$ alſo der Cubikinhalt (§. 47. b.) $= \frac{3{,}14 \times 0{,}45 \times 0{,}45 \times 0{,}45}{6} =$ 0,047688 c′ oder 47 c″ 688 c‴.

78) Wie groß iſt das Gewicht einer bleiernen Kugel von 6″ Durchmeſſer? (Spec. Gew. = 11,38.)

Auflöſ. Der Cubikinhalt iſt $= \frac{3{,}14 \times 0{,}6 \times 0{,}6 \times 0{,}6}{6} =$ 0,11304 c′, alſo das Gewicht (§. 23.) $= 0{,}11304 \times 54 \times 11{,}38$ = 69,4653408 ℔ oder 69 ℔ 14 Loth.

79) Die Oberfläche einer Kugel beträgt 12 □′ 56 □″; wie groß iſt der Durchmeſſer?

Auflöſ. Der Inhalt des größten Kreiſes iſt (§. 47. c.) = 12,56 : 4 = 3,14 □′, alſo (Thl. I. §. 63. d.) der Halbmeſſer $= \sqrt{\frac{3{,}14}{3{,}14}} =$ 1′ und der Durchmeſſer = 2′.

80) Der Cubikinhalt einer Kugel beträgt 220 c″ 781¼ c‴; wie groß iſt der Durchmeſſer?

Auflöſ. Nach §. 47. d.) iſt der Durchmeſſer $= \sqrt[3]{\frac{0{,}22078125 \times 6}{3{,}14}} = \sqrt[3]{0{,}421875} = 0{,}75'$ oder 7¼″.

81) Eine maſſive Kugel von Meſſing wiegt 2½ ℔; wie groß iſt der Halbmeſſer derſelben? (Spec. Gew. = 8,44.)

Auflöſ. Nach §. 24. iſt der Cubikinhalt $= \frac{2{,}5}{54 \times 8{,}44} = \frac{2{,}5}{455{,}76}$ = 0,005485 c′, alſo der Durchmeſſer (§. 47. d.) = $\sqrt[3]{\frac{0{,}005485 \times 6}{3{,}14}} = \sqrt[3]{0{,}0104808} = 0{,}218'$ und der Halbmeſſer = 0,109′ oder 1″ $\frac{9}{10}$‴.

82) Wie groß iſt die Oberfläche unſerer Erde, wenn der Halbmeſſer 859,3 geographiſche Meilen beträgt?

Digitized by Google

Auflösung. Oberfläche = 859,3 × 859,3 × 3,14 × 4 = 9274259,9144 Quadratmeilen.

83) Wie groß ist der Cubikinhalt unserer Erde, wenn der Durchmesser 1718,6 geogr. Meilen beträgt?

Auflösung. Cubikinhalt (§. 47 b.) = $\frac{1718{,}6 \times 1718{,}6 \times 1718{,}6 \times 3{,}14}{6}$ = 2656457181,37 Cubikmeilen.

84) Welchen Durchmesser hat der Mond, da er ungefähr 50mal kleiner als unsere Erde ist?

Auflös. Nach Aufgabe 83. wird der Cubikinhalt des Mondes = 2656457181,37 : 50 = 53129143,62 Cubikmeilen, also §. 47. d. der Durchmesser = $\sqrt[3]{\frac{6 \times 53129143{,}62}{3{,}14}}$ = 466,5 Meilen.

85) Wie viel faßt ein halbkugelförmiger Kessel, wenn der Durchmesser im Lichten 4′ beträgt?

Auflös. Cubikinhalt der ganzen Kugel = $\frac{3{,}14 \times 4 \times 4 \times 4}{6}$ = 33,493 c′, also der Halbmesser = 16,7465 c′. Demnach faßt der Kessel 16,7465 × 18 = 301,437 Maas oder etwas über 3 Ohm 1 Maas.

86) Der äußere Durchmesser einer eisernen Hohlkugel beträgt 1′ 5″, die Eisendicke 1½″; wie schwer ist dieselbe?

Auflös. Inhalt der ganzen Kugel = $\frac{1{,}5 \times 1{,}5 \times 1{,}5 \times 3{,}14}{6}$ = 1,76625 c′. Da die Eisendicke 1½″ beträgt, so ist der Durchmesser der Höhlung = 1,5′ — 0,3′ = 1,2′ also ihr Inhalt (§. 47. b.) = $\frac{1{,}2 \times 1{,}2 \times 1{,}2 \times 3{,}14}{6}$ = 0,90432 c′; folglich der Inhalt der Hohlkugel = 1,76625 c′ — 0,90432 c′ = 0,86193 c′ = 861 c″ 930 c‴ und das Gewicht = 0,86193 × 54 × 7,2 = 335,118384 ℔.

87) Wie viel Bleikugeln von 3‴ Durchmesser gehen auf 4 ℔? (Spec Gew. = 11,38.)

Auflösung. Eine Kugel hat einen Inhalt von $\frac{3{,}14 \times 0{,}03 \times 0{,}03 \times 0{,}03}{6}$ = 0,00001413 c′; 4 ℔ geben

Digitized by Google

(§. 24.) $\frac{4}{54 \times 11{,}38} = 0{,}006509$ c′, folglich braucht man

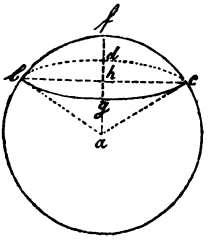
0,006509 : 0,00001413 = 460 Bleikugeln.

88) Der Durchmesser einer Kugel beträgt 2′ 5″, die Höhe eines Abschnitts 8″; wie groß ist der Inhalt der Haube und der Cubikinhalt des Abschnitts?

Auflös. Umfang eines größten Kreises = 3,14 × 2,5 = 7,85′; folglich der Inhalt der Haube *bgcdf* (Fig. 43.) (nach §. 47. e.) = 7,85 × 0,8 = 6,28 □′.

Der Cubikinhalt des Sektors *acfb* (Fig. 43.) wird (nach §. 47. f.) = $\frac{6{,}28 \times 1{,}25}{3} = 2{,}616666$ c′.

Fig. 43.



Um den Cubikinhalt des Kegels *abc* zu finden, hat man zunächst den Halbmesser *hc* der Basis *bgcd* zu bestimmen. Dieß geschieht auf folgende Weise durch Zeichnung: Man zeichne in verjüngtem Maaße über 2′ 5″ als Durchmesser einen Kreis, ziehe den Halbmesser *af*, mache *fh* = 8″, errichte *hc* senkrecht auf *af* in *h*, und messe die Länge von *hc* auf dem angenommenen Maaßstabe. Angenommen, man habe sie = 1′ 1″ 6‴ gefunden, so ist der Inhalt des Kreises *bgcd* = 3,14 × 1,16 × 1,16 = 4,225184 □′, also, da *ah* = *af* − *hf* = 1,25 − 0,8 = 0,45 ist, nach §. 43. c. der Cubikinhalt des Kegels *abc* = $\frac{4{,}225184 \times 0{,}45}{3} = 0{,}6337776$ c′. Demnach erhält man nach §. 47. g. für den Cubikinhalt des Abschnitts *bgcdf* = 2,616666 c′ − 0,6337776 c′ oder 1,982889 c′ d. i. 1 c′ 982 c″ 889 c‴.

89) Wie groß muß der Durchmesser eines halbkugelförmigen Kessels gemacht werden, wenn derselbe eine Ohm fassen soll?

Auflös. Da 18 Maas 1 c′ geben, so ist 1 Ohm oder 100 Maas = $\frac{100}{18} = 5{,}555555$ c′ und eine vollständige Kugel von dem zu bestimmenden Durchmesser hält demnach 2 × 5,555 .... = 11,111111 c′. Nach §. 47. d. wird also der Durchmesser = $\sqrt[3]{\frac{11{,}111111 \times 6}{3{,}14}} = \sqrt[3]{21{,}231422} = 2{,}76'$ oder 2′ 7″ 6‴.

90) Der äußere Durchmesser einer eisernen Hohlkugel beträgt 1′ 4″, der Durchmesser des hohlen Raumes 1′ 2″; wie viel wiegt dieselbe? (Spec. Gew. = 7,2.)

Digitized by Google

Auflösung.

Cub.-Inh. der ganzen Kugel $= \frac{1,4 \times 1,4 \times 1,4 \times 3,14}{6} = 1,436026 c'$

„ des hohlen Raumes $= \frac{1,2 \times 1,2 \times 1,2 \times 3,14}{6} = 0,90432\ c'$

Cub.-Inh. der Hohlkugel (§. 47. 1.) $= 0,531706 c'$

folglich das Gewicht $= 0,531706 \times 54 \times 7,2 = 206,7272928 \text{ℬ}$.

II. Berechnung eines Fasses.

Der Inhalt eines Fasses kann auf folgende Art gefunden werden:

1) Man denke sich das Faß durch einen Bauchschnitt in zwei Theile getheilt, rechne dann einen solchen Theil als abgekürzten Kegel nach einer der in §. 45. c. angegebenen Methoden und nehme den gefundenen Werth doppelt.

2) Man rechne den Inhalt eines Kreises, dessen Durchmesser gleich der Summe aus $\frac{2}{3}$ der Spundtiefe und $\frac{1}{3}$ der Bodentiefe ist, und multiplicire diesen Inhalt mit der Länge des Fasses.

Anmerkung. Von diesen Methoden ist die letztere die genauere.

Beispiel.

Wie viel Maas faßt ein 14″ langes Fäßchen, dessen Spundtiefe 1′ 1″ 7‴ und dessen Bodentiefe 1′ 5‴ beträgt?

Erste Auflösung. Nach einer der zuerst angeführten Methode erhält man (s. §. 45. c. Anmrkg. b):

Inhalt des Bodens $= 0,525 \times 0,525 \times 3,14 = 0,8654625$

„ „ Bauchschnitts $= 0,585 \times 0,585 \times 3,14 = 1,0745865$

folglich die Summe beider $= 1,9400490$

also der Cubikinhalt $= 1,910049 \times \frac{1,4}{2} = 1,3580343 c'$.

Da nun 1 Cubikfuß 18 Maas ausmacht, so faßt das Fäßchen $1,358 \times 18 = 24\frac{11}{25}$ Maas.

Zweite Auflösung. Nach der zweiten Art.

$\frac{2}{3} \times 1,17 = 0,78$

$\frac{1}{3} \times 1,05 = 0,35$

Summe beider $= 1,13 =$ dem Durchmesser, also

Digitized by Google

der Halbmesser = 0,565 und der Inhalt des Kreises = 0,565 × 0,565 × 3,14 = 1,0023665, folglich der Cubikinhalt des Fasses = 1,0023665 × 1,4 = 1,403313 c′; das Fäßchen faßt also 1,403313 × 18 = 25¼ Maas.

Beide Resultate sind nur um etwa 3 Schoppen verschieden.

III. Berechnung des Cubikinhalts eines Körpers von beliebiger Gestalt.

Um den Cubikinhalt eines beliebig gestalteten Körpers von geringem Volumen zu bestimmen, bringe man denselben in ein prismatisches oder cylinderförmiges Gefäß und fülle dieses hierauf mit Wasser oder feinem Sande. Alsdann berechne man den Cubikinhalt des Körpers sammt dem Sande, und den Cubikinhalt des Sandes für sich, nachdem der Körper herausgenommen ist, und ziehe letzteren von ersterem ab, so gibt der Unterschied den Cubikinhalt des fraglichen Körpers.

Würde z. B. ein cylinderförmiger Becher von 2′ Höhe und 3,14 □′ Grundfläche bis oben mit Sand gefüllt und beträgt die Höhe des Sandes nach Herausnahme des Körpers noch 8″; so folgt:

Cubikinhalt der ganzen Masse = 3,14 × 2 = 6,28 c′
„ des Sandes = 3,14 × 0,8 = 2,512c′
folglich der Cubikinhalt des Körpers = 3,768c′
oder 3 c′ 768 c″.

Besitzt der Körper eine bedeutende Größe, so umgebe man ihn mit Brettern in der Weise, daß diese einen einfach zu berechnenden Körper z. B. ein Prisma bilden. Schüttet man nun Sand in bekanntem Volumen hinein, bis der Körper ganz von demselben umgeben ist und rechnet alsdann den Cubikinhalt des Prismas, dessen Höhe bis zur Sandoberfläche reicht und zieht hiervon das bekannte Volumen des Sandes ab, so gibt der Rest den Cubiknhalt des Körpers.

Den Cubikinhalt sehr großer Körper kann man auch auf folgende Weise bestimmen:

Man verfertige ein Modell dieses Körpers und bestimme den Cubikinhalt desselben auf irgend eine der angegebenen Arten, also

Digitized by Google

entweder durch Abwägen mit Anwendung des specifischen Gewichtes oder durch Umgeben mit Sand u. s. w. Hierauf multiplizire man die Zahl, welche angibt, wie viel mal eine Seite des Körpers oder die Entfernung irgend zweier Punkte an demselben, größer ist, als die entsprechende Seite oder die Entfernung der entsprechenden zwei Punkte am Modell, dreimal mit sich und mit dem Cubikinhalt des Modells, so gibt das Produkt den verlangten Cubikinhalt des Körpers.

Anmerkung. Dieses Verfahren findet seinen Grund in der Anmerkung zu §. 48. Aufgabe 9.

Digitized by Google

IV. Specifische Gewichte.

Körper.	Specifisches Gewicht.	Gewicht eines Cubikfußes in badischen Pfund.
1) Metalle:		
Blei	11,38	614,52
Eisen, geschmiedet	7,78	420,12
— gegossen	7,2	388,8
— Stabeisen	7,84	423,36
Gold, gehämmert	19,36	1045,44
— gegossen	19,25	1039,5
Kupfer, gehämmert . . .	8,95	483,3
— gegossen	8,78	474,12
Messing	8,44	455,76
Platin	21,7	1171,8
Quecksilber	13,58 — 14	734 — 756
Silber, gehämmert	10,51	567,54
— gegossen	10,47	565,38
Stahl (Guß-Stahl) . . .	7,92	427,68
Zinn, gegossen	7,29	393,66
— gewalztes	7,47	403,38
2) Holzarten:		
Ahorn, frisch gefällt . . .	0,9	48,6
— trocken	0,65	35,1
Buchen, Roth-, frisch gefällt	0,98	52,92
— trocken	0,59	31,86
— Weiß-, frisch . . .	0,94	50,76
— trocken	0,76	41,04
Eiche, Stein-, trocken . . .	0,7	37,8
Kastanie „	0,57	30,78
Kork	0,24	12,96
Linde, trocken	0,55	29,7
Pappel „	0,39	21,06
Tanne „	0,55	29,7
Weide, Saal-, trocken . . .	0,53	28,62
3) Stein und Erdarten:		
Basalt	2,86	154,44

Digitized by Google

Körper.	Specifisches Gewicht.	Gewicht eines Cubikfußes in badischen Pfund.
Stein- und Erdarten:		
Baustein, im Mittel . . .	2,5	135
Granit, im Mittel	2,7	145,8
Gyps	1,87 — 2,96	100 — 160
Kalkstein	2,5	135
Kochsalz	2,2	118,8
Kreide	2,3	124,2
Marmor	2,7 — 2,83	145,8— 152,8
Quarz	2,65	143,1
Sand	1,4 — 1,77	75,6 — 95,6
Sandstein	2,2 — 2,75	118,8—148,5
Thon	1,9	102,6
4) Tropfbar flüssige Körper:		
Alkohol	0,792	42,768
Oel, Baum-	0,92	49,68
— Lein-	0,94	50,76
— Mohn-	0,92	49,68
— Rüb-	0,91	49,14
— Stein-	0,75 — 0,8	40,5—43,2
— Terpentin-	0,79 — 0,87	42,66—46,98
Säure, Schwefel-	1,85	99,9
— Salpeter-	1,52	82,08
— Salz-	1,19	64,26
Wein	0,9 — 1,05	48,6—56,7
Wasser, reines	1,000	54

Digitized by Google

V. Tabelle zur Vergleichung von Cubikfußen und dem Cubikmeter.

Cubik-Meter *).	Pariser Cub.-Fuß	England. Rußland. Cub.-Fuß.	Preußen. Dänemark. Rheinl. Cub.-Fuß.	Bayern. Cub.-Fuß.	Hannover Cub.-Fuß.	Sachsen. Cub.-Fuß.	Braunschweig. Cub.-Fuß.	Hessen-Kassel. Cub.-Fuß.	Würtemberg. Cub.-Fuß.	Baden. Nassau. Schweiz. Cub.-Fuß.	Oestreich. Cub.-Fuß	Hessen-Darmstadt. Cub.-Fuß.	Frankfurt. Cub.-Fuß.
1	29,17385	35,31658	32,34587	40,22350	40,12627	44,03176	43,03380	41,99374	42,52752	37,03704	31,65785	64,00000	43,42633
0,034277	1	1,210556	0,108728	1,378752	1,375419	1,509288	1,475081	1,439431	1,457727	1,269529	1,085145	2,193745	1,486968
0,028315	0,826067	1	0,915884	1,138941	1,136188	1,246773	1,218515	1,189066	1,204180	1,048715	0,896402	1,812180	1,228335
0,030916	0,901934	1,091842	1	1,243543	1,240538	1,361279	1,330426	1,298272	1,314774	1,145031	0,978730	1,983175	1,341137
0,024861	0,725294	0,878009	0,804154	1	0,997583	1,094678	1,069867	1,044010	1,057281	0,920781	0,787049	1,591108	1,078486
0,024921	0,727051	0,880136	0,806102	1,002423	1	1,097330	1,072459	1,046540	1,059842	0,923012	0,788956	1,594963	1,081105
0,022711	0,662564	0,802071	0,734603	0,913511	0,911303	1	0,977335	0,953715	0,965837	0,841144	0,718977	1,453496	0,985211
0,023237	0,677929	0,820671	0,751639	0,934695	0,932436	1,023190	1	0,975832	0,988235	0,860650	0,735651	1,487202	1,008058
0,023813	0,694719	0,840996	0,770255	0,957845	0,955530	1,048531	1,024767	1	1,012711	0,881966	0,753871	1,524035	1,033026
0,023514	0,685999	0,830440	0,760587	0,945823	0,943537	1,035371	1,011905	0,987449	1	0,870896	0,744408	1,504909	1,020058
0,027000	0,787694	0,953548	0,873339	1,086034	1,083409	1,188857	1,161913	1,133831	1,148243	1	0,854762	1,728000	1,171262
0,031588	0,921536	1,115571	1,021733	1,270570	1,267499	1,390864	1,359341	1,326488	1,343349	1,169916	1	2,021615	1,370228
0,015625	0,455841	0,551822	0,505404	0,628493	0,626973	0,687996	0,672403	0,656153	0,664492	0,578704	0,494653	1	0,678537
0,023052	0,672510	0,814110	0,745630	0,927224	0,924983	1,015011	0,992232	0,968031	0,980335	0,853770	0,729770	1,473760	1

*) Das Cubikmeter bildet die Einheit des französischen Holzmaaßes und wird dann Stere genannt.
1 Cubikdecimeter = 0,001 Cubikmeter bildet unter dem Namen Liter (Litre) die Einheit des franz. Hohlmaßes. — 100 Liter = 1 Hectoliter.

Digitized by Google

VI. Tabelle zur Vergleichung verschiedener Gewichte.

Frankreich. Kilogramm*).	Sachsen. Baden. Hessen-Darmstadt. Schweiz. Zollpfund.	England. Pfund. Avoir du poids Pfund.	Preußen. Hannover. Kurhessen. Braunschweig. Weimar. Pfund.	Bayern. Pfund.	Oesterreich. Pfund.	Dänemark. Norwegen. Pfund.	Schweden. Schalpfund.
1	2,000000	2,204597	2,138072	1,785714	1,785675	2,002768	2,351063
0,500000	1	1,102299	1,069036	0,892857	0,892838	1,001384	1,175532
0,453597	0,907195	1	0,969824	0,809996	0,809978	0,908451	1,066437
0,467711	0,935422	1,031114	1	0,835198	0,835180	0,936716	1,099618
0,560000	1,120000	1,234574	1,197321	1	0,999978	1,121550	1,316595
0,560012	1,120024	1,234601	1,197347	1,000022	1	1,121574	1,316624
0,499309	0,998618	1,100775	1,067559	0,891623	0,891604	1	1,173907
0,425339	0,850679	0,937702	0,909406	0,759535	0,759518	0,851856	1

*) Das Kilogramm ist das Gewicht von 1 Liter Wasser und hat 1000 Gramme.

Digitized by Google

VII. Tabelle zur Vergleichung verschiedener Hohlmaaße.

Frankreich. 1 Liter.	England. 1 Gallon.	Preußen. 1 Quart.	Bayern. 1 Maas-kanne.	Hannover. 1 Stübchen.	Sachsen. 1 Dresdener Kanne.	Braun-schweig. 1 Quartier.	Würtem-berg 1 Helleich-maas.	Baden. Schweiz. 1 Maas.	Schweden. 1 Kanne.	Oesterreich. 1 Maas.	Rußland. 1 Stoof.
1	0,22009	0,87333	0,93543	0,25680	1,06776	1,06741	0,54435	0,66666	0,38208	0,70664	0,81369
4,54345	1	3,96797	4,25008	1,16679	4,85134	4,84975	2,47324	3,02897	1,73600	3,21062	3,69698
1,14503	0,25201	1	1,07109	0,29405	1,22262	1,22222	0,62330	0,76335	0,43750	0,80913	0,93170
1,06902	0,23528	0,93362	1	0,27453	1,14146	1,14109	0,58192	0,71268	0,40846	0,75542	0,86986
3,89395	0,85704	3,40074	3,64252	1	4,15783	4,15646	2,11968	2,59597	1,48784	2,75165	3,16849
0,93653	0,20612	0,81791	0,87606	0,24051	1	0,99967	0,50980	0,62435	0.35784	0,66180	0,76205
0,93684	0,20619	0,81818	0,87635	0,24058	1,00032	1	0,50997	0,62456	0,35795	0,66201	0,76230
1,83704	0,40432	1,60436	1,71842	0,47176	1,96153	1,96088	1	1,22469	0,70191	1,29814	1,49479
1,50000	0,33014	1,31000	1,40314	0,38521	1,60164	1,60112	0,81652	1	0,57313	1,05997	1,22054
2,61718	0,57603	2,28569	2,44819	0,67211	2,79454	2,79362	1,42467	1,74479	1	1,84943	2,12959
1,41513	0,31146	1,23588	1,32375	0,36341	1,51102	1,51053	0,77032	0,94342	0,54070	1	1,15148
1,22896	0,27049	1,07330	1,14960	0,31560	1,31224	1,31181	0,66898	0,81930	0,46957	0,86844	1

Digitized by Google

Geometrische Aufgaben

zum

Gebrauche an höheren Lehranstalten

und beim

Selbststudium.

Von

Karl Spitz,

Lehrer an der polytechnischen Schule in Carlsruhe.

Zweiter Theil.

Berechnungs-Aufgaben

aus der

körperlichen Geometrie

nebst den zugehörigen Resultaten.

Mit 3 in den Text gedruckten Figuren.

Leipzig und Heidelberg.

C. F. Winter'sche Verlagshandlung.

1855.

Digitized by Google

Digitized by Google

Vorwort.

Der vorliegende zweite Theil enthält unter **712** fortlaufenden Nummern über **900** stereometrische Aufgaben. Der eigentlichen Körperberechnung habe ich im Abschnitt **I.** unter **50** Nummern **134** Aufgaben über das Körpermaß und das Gewicht der Körper im Allgemeinen vorausgeschickt, welche theils als Vorbereitung zur Lösung der nachfolgenden Aufgaben dienen, theils aber auch den Schüler mit dem Gebrauche der im Anhange befindlichen Tabellen bekannt machen sollen.

Außer den im ersten Theile gebrauchten Zeichen * und † zur Andeutung von Aufgaben, deren Lösung auf Gleichungen mit mehren Unbekannten, oder auf Gleichungen des zweiten Grades führt, wurde in diesem Theile noch von dem Zeichen ° Gebrauch gemacht, um dadurch Aufgaben zu bezeichnen, deren Lösung die Bekanntschaft mit der Lehre von den höhern Gleichungen voraussetzt.

Diejenigen, welche sich durch Selbststudium Fertigkeit in der Anwendung der geometrischen Sätze erwerben und zu diesem Zwecke Gebrauch von der vorliegenden Aufgabensammlung machen wollen, verweise ich auf das von mir

Digitized by Google

unter dem Titel: „Andeutungen zu den Auflösungen der Berechnungsaufgaben aus der ebenen und körperlichen Geometrie“ in demselben Verlage erschienene Werkchen. — Ueber die Art und Weise der Bearbeitung und den Zweck dieser Andeutungen habe ich mich in der betreffenden Vorrede ausgesprochen.

Carlsruhe, im März 1855.

Carl Spitz.

Digitized by Google

Inhalt.

Abschnitt I.

Seite

Aufgaben über das Körpermaß, das Gewicht und den Kubikinhalt der Körper im Allgemeinen. §. 1—2.

§. 1. Aufgaben über die Reduktion verschiedener Körpermaße . . 1
§. 2. Aufgaben über das Gewicht und den Kubikinhalt der Körper überhaupt 3

Abschnitt II.

Aufgaben über die Berechnung der eckigen Körper. §. 3—10.

§. 3. Aufgaben über die Berechnung des Prisma 6
a) Ueber die Oberfläche 6
b) Ueber den Kubikinhalt 7
c) Ueber das Gewicht 12
§. 4. Aufgaben über die Berechnung des Würfels 14
a) Ueber Oberfläche und Kubikinhalt 14
b) Ueber das Gewicht 17
§. 5. Aufgaben über die Berechnung der Pyramide. 19
A. Berechnung der vollständigen Pyramide 19
a) Ueber die Oberfläche. 19
b) Ueber den Kubikinhalt 21
c) Ueber das Gewicht 24
B. Berechnung der abgekürzten Pyramide 25
a) Ueber einige allgemeine Bestimmungen 25
b) Ueber die Oberfläche 26
c) Ueber den Kubikinhalt 27
d) Ueber das Gewicht 30
§. 6. Aufgaben über die Berechnung des regulären Tetraeders . 31
a) Ueber die Oberfläche 31
b) Ueber den Kubikinhalt und das Gewicht 32
§. 7. Aufgaben über die Berechnung des regulären Oktaeders. . 33
a) Ueber die Oberfläche 33
b) Ueber den Kubikinhalt 33
§. 8. Aufgaben über die Berechnung des regulären Dodekaeders . 33
§. 9. Aufgaben über die Berechnung des regulären Ikosaeders. . 34
§. 10. Aufgaben über die Berechnung des schief abgeschnittenen dreiseitigen Prisma 34

Digitized by Google

Abschnitt III.

Aufgaben über die Berechnung der runden Körper. §. 11—13.

§. 11. Aufgaben über die Berechnung des Cylinders. Seite

A. Berechnung des vollen Cylinders 35
a) Ueber die Oberfläche 35
b) Ueber den Kubikinhalt 37
c) Ueber das Gewicht 40
B. Berechnung des hohlen Cylinders 42
C. Berechnung des schief abgeschnittenen Cylinders . . . 42

§. 12. Aufgaben über die Berechnung des Kegels.
A. Berechnung des vollständigen Kegels 43
a) Ueber die Oberfläche 43
b) Ueber den Kubikinhalt 46
c) Ueber das Gewicht 49
d) Ueber den schiefen Kegel 49
B. Berechnung des abgekürzten Kegels 50
a) Ueber die Oberfläche 50
b) Ueber den Kubikinhalt 52
c) Ueber das Gewicht 55

§. 13. Aufgaben über die Berechnung der Kugel und der Kugeltheile.
A. Berechnung der ganzen Kugel 55
a) Ueber die Oberfläche 55
b) Ueber den Kubikinhalt 57
c) Ueber das Gewicht 61
B. Berechnung der Kugeltheile 62
1) Berechnung der Kugelhaube 62
2) Berechnung des Kugelsektors 64
3) Berechnung des Kugelsegmentes 65
4) Berechnung des Kugelgürtels und der körperl. Zone 66

Resultate zu den Berechnungsaufgaben aus der körperlichen Geometrie 69

Anhang.

I. Tafel der specifischen Gewichte einiger Körper 103
II. Tabelle zur Vergleichung von Kubikfußen unter einander und mit dem Kubikmeter 105
III. Tabelle zur Vergleichung verschiedener Gewichte 106
IV. Tabelle zur Vergleichung verschiedener Hohlmaaße 107

Digitized by Google

Abschnitt I.

Aufgaben über das Körpermaß, das Gewicht und den Kubikinhalt der Körper im Allgemeinen.

---

§. 1. Aufgaben über Reduktion verschiedener Körpermaße.

1) Wie viel Kubikzoll sind nach dem zehntheiligen Maßsysteme:
a) $9^{c\prime}$? b) $125^{c\prime}\ 546^{c\prime\prime}$? c) $30^{c\prime}\ 47^{c\prime\prime}$?
d) $8^{c\prime}\ 40^{c\prime\prime}$? e) $427^{c\prime}\ 5^{c\prime\prime}$? f) $302^{c\prime}\ 108^{c\prime\prime}$?

2) Wie viel Kubikzoll geben nach dem zwölftheiligen Systeme:
a) $3^{c\prime}$? b) $25^{c\prime}\ 346^{c\prime\prime}$? c) $764^{c\prime}\ 8^{c\prime\prime}$? d) $5^{c\prime}\ 28^{c\prime\prime}$?

3) Wie viel Kubiklinien zehntheilig sind:
a) $48^{c\prime}$? b) $37^{c\prime}\ 548^{c\prime\prime}$? c) $6^{c\prime}\ 24^{c\prime\prime}\ 376^{c\prime\prime\prime}$?
d) $884^{c\prime\prime}$? e) $7^{c\prime\prime}\ 364^{c\prime\prime\prime}$? f) $8^{c\prime}\ 5^{c\prime\prime}\ 7^{c\prime\prime\prime}$?

4) Verwandelt in Kubiklinien nach dem Duodecimalsysteme:
a) $6^{c\prime}\ 1484^{c\prime\prime}$! b) $3^{c\prime}\ 4^{c\prime\prime}\ 620^{c\prime\prime\prime}$! c) $74^{c\prime\prime}\ 1045^{c\prime\prime\prime}$!

5) Man soll folgende zehntheilige Maße in Form von Decimalbrüchen anschreiben, in welchen die Anzahl der Fuße oder Meter die Stelle der Ganzen einnehmen:

a) $48^{c\prime}\ 547^{c\prime\prime}$.	g) $84^{c\prime\prime}$.	n) $47^{c\prime\prime}\ 5\frac{1}{4}^{c\prime\prime\prime}$.
b) $6^{c\prime}\ 74^{c\prime\prime}$.	h) $8\frac{4}{5}^{c\prime\prime}$.	o) $43^{c\prime}\ 74^{c\prime\prime}\ 8^{c\prime\prime\prime}$.
c) $37^{c\prime}\ 524^{c\prime\prime}\ 816^{c\prime\prime\prime}$.	i) $19^{c\prime\prime}\ 48^{c\prime\prime\prime}$.	p) $7^{c\prime}\ 9^{c\prime\prime}\ 8^{c\prime\prime\prime}$.
d) $4^{c.m.}\ 716^{c.dm.}$.	k) $7^{c.m.}\ 15^{c.dm.}$.	q) $16^{c.dm.}\ 47^{c.cm.}$
e) $978\frac{3}{4}^{c\prime\prime}$.	l) $8^{c\prime}\ 12^{c\prime\prime}\ 15^{c\prime\prime\prime}$.	r) $50^{c\prime}\ 4\frac{1}{2}^{c\prime\prime\prime}$.
f) $6^{c\prime}\ 84^{c\prime\prime}\ 594^{c\prime\prime\prime}$.	m) $427^{c\prime\prime\prime}$.	s) $468^{c\prime}\ 9^{c\prime\prime}\ 7\frac{3}{5}^{c\prime\prime\prime}$.

6) Wie werden folgende Decimalbrüche gelesen:

a) $768{,}832^{c\prime}$?	g) $5{,}768^{c\prime\prime}$?	n) $0{,}8025^{c.dm.}$?
b) $405{,}085^{c\prime}$?	h) $0{,}465^{c.m.}$?	o) $0{,}50072^{c0}$?
c) $125{,}007^{c\prime}$?	i) $0{,}0246^{c0}$?	p) $8{,}03064^{c\prime}$?
d) $48{,}72^{c.m.}$?	k) $7{,}04832^{c\prime}$?	q) $0{,}00403^{c0}$?
e) $400{,}8^{c\prime}$?	l) $0{,}85^{c\prime\prime}$?	r) $5{,}72403^{c.m.}$?
f) $36{,}045^{c0}$?	m) $3{,}0006^{c\prime}$?	s) $7{,}08605^{c.m.}$?

Digitized by Google

7) Verwandelt folgende nach dem Decimalmaß gegebenen Werthe in Duodecimalmaß:

a) $547^{c''}$; b) $875^{c''}$; c) $390^{c''}\ 625^{c'''}$.

8) Folgende Duodecimalmaße in Decimalmaß zu verwandeln:

a) $576^{c''}$; b) $1296^{c''}$.

9) Wie viel Kubikmeter geben:

a) $96^{c'}$; b) $187^{c'}\ 320^{c''}$; c) $716^{c'}\ 5^{c''}\ 264^{c'''}$ neubad. Maß?*)

Anmerkung. Mehre der nachfolgenden Aufgaben haben den Zweck, den Gebrauch der im Anhange befindlichen Tabellen zu zeigen und das Nöthige zur Lösung derselben ist daher aus jenen zu entnehmen.

10) Man soll a) $78^{c'}$; b) $25^{c'}\ 1296^{c''}$; c) $7\frac{5}{8}^{c'}$ preußisches Maß in Kubikmeter verwandeln.

11) Verwandelt: a) $486^{c.m.}$; b) $76{,}95^{c.m.}$; c) $1{,}296^{c.m.}$ in neubad. Maß!

12) Wie viel würtemberger Kubikfuß geben:

a) 37,6; b) $6\frac{2}{3}$ bad. Kubikfuß?

13) Ein Behälter faßt 185 bayr. Kubikfuß Wasser; wie viel faßt derselbe a) badische; b) preußische; c) würtembergische Kubikfuß?

14) Wie viel Liter**) (Litres) geben:

a) $925^{c''}\ 926^{c'''}$; b) $4^{c'}\ 629^{c''}\ 630^{c'''}$ bad. Maß?

15) Wie viel bad. Maas Wasser faßt ein Gefäß dessen Inhalt beträgt:

a) $46^{c'}$? b) $8{,}5^{c'}$? c) $125^{c''}\ 250^{c'''}$? d) $666\frac{2}{3}^{c''}$? e) $1^{c.m.}$

(1 bad. Kubikfuß = 18 bad. Maas.)

16) a) 90 Liter; b) 2 Hektolit. 16 Lit. geben wie viel 1) bad. Maas? 2) österr. Maas? 3) preuß. Quart?

17) Welches Volumen haben in bad. Maße:

a) 45 Maas? b) 68,4 Maas? c) 7 Ohm 6 Stützen $4\frac{1}{10}$ Maas?

(1 Ohm = 10 Stützen = 100 Maas; 18 Maas = $1^{c'}$.)

18) Man soll das Volumen nach bad. Maßsysteme bestimmen von:

---

*) Eine Tabelle zur Vergleichung von Kubikfußen verschiedener Staaten unter einander und mit dem Kubikmeter findet sich im Anhang: Tab. II.

**) Vgl. die Anmerkung zur Tab. II. im Anhang.

Digitized by Google

a) 175½ Liter; b) 56 preuß. Quart; c) 540 österr. Maas; d) 121½ würt. Scheffel; e) 45 bayr. Eimer à 60 Maas.

(1 würt. Scheffel = 177,226 Liter. — 1 bayr. Eimer = 64,14 Lit.)

19) Wie viel Kubikfuß geben 45 Malter 9 Sester bad. Maß?

(1 Malter = 10 Sstr. à 10 Meßlein. — 18 Meßlein = 1 c′.)

20) Es hat Jemand berechnet, daß er 5865 bad. Kubikfuß Frucht habe; wie viel bad. Malter u. s. w. macht dies?

§. 2. Aufgaben über das Gewicht und den Kubikinhalt der Körper überhaupt.

Anmerkungen. 1) Bei sämmtlichen Aufgaben über Gewichtsbestimmungen ist das specifische Gewicht, wenn dasselbe nicht dabei angegeben ist, aus der im Anhange befindlichen Tabelle I. zu entnehmen.

2) Zur Lösung mehrer der folgenden Aufgaben hat man noch Nachstehendes zu wissen nöthig: 1 bad. Kubikfuß reines Wasser wiegt 54 bad. ℔; 1 bayr. Kubikfuß 44,3 bayr. ℔; 1 preuß. Kubikfuß 66 preuß. ℔; 1 würtemb. Kubikfuß 50,2 würt. ℔; 1 wiener Kubikfuß 56 ℔ 12 Loth wiener Gewicht; 1 gr. hess. Kubikfuß 50,2 hess. ℔.

3) Um Mißverständnissen vorzubeugen, sei hier bemerkt, daß die Lösung der Aufgaben, wenn nicht ausdrücklich diese andere Voraussetzungen enthalten, nach dem Decimalsystem vorzunehmen ist, und ebenso dann den betreffenden Aufgaben das badische Maß- und Gewichtssystem zu Grunde liegt.

21) Welches Gewicht haben in bad. Pfunden u. s. w.:

a) 48 c′; b) 15 c′ 325 c″; c) 34,88 c‴; d) 7 c′ 25 c″ 175 c‴; e) 27 Maas; f) 131,22 Maas reines Wasser.

(Vgl. obige Anmerkung 2. und Anmerk. zu Aufg. 15.)

22) Welches Volumen haben in bad. Kubikfußen:

a) 81 ℔; b) 33 ℔ 24 Loth; c) 23 Ctr. 32 ℔ 25⅗ Loth reines Wasser?

23) Wie viel preuß. Pfund wiegen 425 preuß. Kubikfuß reines Wasser?

24) Welches Volumen haben 265⅘ bayr. ℔ reines Wasser, in bayr. und bad. Kubikfußen ausgedrückt?

25) 560 bad. Kubikfuß wiegen wie viel

a) preuß. ℔? b) Kilogramm? c) bayr. ℔?

26) Welches Gewicht hat ein Stück Blei von 15 c′ Inhalt? (spec. Gew. = 11,38).

Digitized by Google

27) Wie schwer ist ein Postament von Marmor dessen Kubikinhalt 48$^{c'}$ 475$^{c''}$ beträgt? (sp. Gew. = 2,8.)

28) Welches Resultat erhält man für Aufgabe 27, wenn die Lösung nach preuß. Maß- und Gewichtssysteme vorgenommen wird?

29) Eine Pyramide von Sandstein, dessen sp. Gew. = 2,5 ist, hat einen Kubikinhalt von 825$^{c'}$; wie groß ist das Gewicht derselben?

30) Der Kubikinhalt eines tannenen Stammes wurde zu 132$^{c'}$ berechnet, wie schwer ist derselbe? (sp. Gew. = 0,55.)

31) Löset Aufg. 30 nach bayr. Maß- und Gewichtssysteme!

32) Der Kubikinhalt einer gußeisernen Röhre beträgt 2$^{c'}$ 216$^{c''}$; wie groß ist ihr Gewicht, wenn nach preuß. Maß- und Gewichtssysteme gerechnet wird? (sp. Gew. = 7,2.)

33) Eine gußeiserne Walze wiegt 1555$^1/_5$ bad. ℔, wie groß ist der Kubikinhalt derselben?

34) Löset Aufg. 33 nach würtemb. Maß- u. Gewichtssysteme!

35) Ein Kupferdraht wiegt 8 Loth; welchen Kubikinhalt hat dieser, wenn das sp. Gew. des Kupfers = 8,8 ist?

36) Ein Gefäß von Zinn wiegt 2 ℔ 12 Loth; wie groß ist das Volumen des Zinns, wenn das sp. Gew. desselben = 7 angenommen wird?

37) Man hat ein Stück Kupfer, dessen sp. Gew. = 8,8 ist, unter Wasser getaucht und gefunden, daß es davon 2$^1/_4$ bad. Maas verdrängte; wie groß ist der Kubikinhalt und das Gewicht des Körpers?

38) Ein Faß hält 2 bad. Ohm und wiegt leer 65 ℔; wie groß ist das Gewicht, wenn es mit Oel vom sp. Gew. = 0,94 gefüllt ist?

39) Ein Granitblock wiegt 886 bayr. ℔, wie groß ist dessen Kubikinhalt in bad. Maße? (sp. Gew. = 2,7.)

40) Ein Körper dessen Inhalt = 2$^1/_2$$^{c'}$ gefunden wurde, wog 972 ℔; wie groß ist das spec. Gew. der Masse?

41) Man hat 9$^{c'}$ Kupfer und 1$^{c'}$ Zinn zusammengeschmolzen; wie viel wiegt die Legirung? (sp. Gew. des Kupfers = 8,8, das des Zinns = 7,3.)

Digitized by Google

42) Man hat zu $118^4/_5$ ℔ Kupfer so viel Zinn zugesetzt, daß die Legirung einen Inhalt von $0{,}35^{c'}$ hatte; wie viel Zinn ist dem Gewichte nach darin enthalten? (sp. Gew. wie in Aufgabe 41.)

43) Man hat eine Legirung, welche aus den zwei Metallen A und B besteht, zu einem Würfel gegossen und dessen Inhalt $= {}^3/_4{}^{c'}$ und sein Gewicht $= 313^1/_5$ ℔ gefunden. Wie viel war dem Volumen nach von jedem Metall in der Legirung enthalten, wenn das sp. Gew. von A = 8 und das von B = 7,2 ist?

44) Eine Legirung von Kupfer und Zinn wog 3,2 ℔. Beim Abwägen unter Wasser fand man einen Gewichtsverlust von 0,4 ℔; wie viel von jedem Metall war a) dem Gewichte nach; b) dem Volumen nach in der Legirung enthalten? (sp. Gew. wie in Aufgabe 41.)

45) Eine Legirung, aus den Metallen A und B bestehend, hatte einen Inhalt $= k^{c'}$ und ein Gewicht $= P$ ℔; wie viel war dem Volumen nach von jedem Metall in der Legirung enthalten, wenn das sp. Gew. von A = s, das von B = s' ist und $1^{c'}$ reines Wasser = p ℔ wiegt?

46) Auf ein im Wasser schwimmendes 12 ℔ schweres Stück Holz, dessen sp. Gew. = 0,64 war, wurde ein Stab von Schmiedeisen gelegt und das Ganze schwebte nun im Wasser; wie groß war a) der Inhalt, b) das Gewicht des Eisenstabes?

47) Eine Legirung zweier Metalle A und B wog P ℔ und hatte ein sp. Gew. = S. Das sp. Gew. von A ist = s und das von B = s'. Wie viel von jedem der beiden Metalle war dem Inhalte nach in der Legirung enthalten, da $1^{c'}$ Wasser p ℔ wiegt?

48) Ein Würfel, aus Kupfer und Zinn bestehend, wiegt $896^2/_5$ ℔ und hat eine Größe von $2^{c'}$; wie viel von jedem Metall enthält der Körper a) dem Inhalte, b) dem Gewichte nach? (sp. Gew. wie in Aufg. 41.)

49) Der Inhalt einer aus 2 Metallen A und B bestehenden Legirung ist = k, der Inhalt des Körpers A ist = k' und dessen sp. Gew. = s', der Inhalt von B ist = k'' und dessen

Digitized by Google

sp. Gew. = s''. Wie groß ist das sp. Gew. der Legirung, wenn das Gewicht von $1^{c'}$ Wasser = p ist?

50) Ein goldener Becher verdrängte unter Wasser gebracht, davon $2^1/_2$ Loth, sein absolutes Gewicht war 36 Loth; bestand dieser Becher aus reinem Golde? Wenn dies nicht der Fall ist und man weiß, daß das Gold gewöhnlich mit Silber legirt wird; wie viel Gold und Silber waren dann a) dem Gewichte, b) dem Inhalte nach in der Legirung enthalten?

Abschnitt II.

Aufgaben über die Berechnung der eckigen Körper.

---

§ 3. Aufgaben über die Berechnung des Prisma.

a) Ueber die Oberfläche.

51) Welche Oberfläche hat ein regelmäßiges vierseitiges Prisma von 8' Höhe, wenn eine Seite der Grundfläche $1^1/_2$' lang ist?

52) Welches Resultat erhält man für die Oberfläche eines regelmäßigen dreiseitigen Prisma, wenn eine Seite der Basis = $5^1/_2$' und die Höhe = $5^1/_4$' ist?

53) Die Grundfläche eines senkrechten Prisma bildet ein Rechteck, dessen Seiten 4' und 3' lang sind; die Höhe des Körpers beträgt $15^4/_5$'. Wie groß ist die Oberfläche desselben?

54) Der Mantel einer regelmäßigen sechsseitigen Säule soll angestrichen werden. Wie hoch kommt der Anstrich, wenn das Prisma 38' hoch und eine Seite der Basis $2^1/_4$' lang ist, und der Quadratschuh mit 2 Kr. bezahlt wird? Wie groß ist ferner die ganze Oberfläche dieser Säule?

55) Die drei Seiten der Basis eines dreiseitigen senkrechten Prisma von 18' Höhe sind $2^2/_5$', 3' und $1^4/_5$' lang; wie groß ist die Oberfläche desselben?

56) Wie groß ist der Inhalt der Grundfläche eines regelmäßigen vierseitigen Prisma von $20^1/_2$' Höhe, wenn dessen Mantel 287□' Inhalt hat?

Digitized by Google

57) Wie hoch ist ein senkrechtes Prisma, dessen Grundfläche ein reguläres Dreieck von 4′ Seite bildet, wenn die Oberfläche 313,856 □′ beträgt?

58) Die Oberfläche eines senkrechten Prisma mit quadratischer Basis beträgt 198 □′, die Höhe ist 5mal so groß als die Seite der Grundfläche; wie groß sind diese Dimensionen?

59) Die Seiten der Basis und die Höhe eines rechteckigen Parallelepipeds verhalten sich wie 2 : 3 : 15; wie groß sind diese Stücke, wenn die Oberfläche $364\frac{1}{2}$ □′ beträgt?

†60) Wie groß ist die Seite der Basis eines regelmäßigen vierseitigen Prisma von $26\frac{4}{5}$′ Höhe, wenn die Oberfläche $715\frac{1}{5}$ □′ beträgt?

†61) Die Oberfläche eines senkrechten Prisma mit quadratischer Basis ist = O; die Höhe ist um a größer als die Seite der Basis; welche Ausdrücke erhält man für diese Seite und die Höhe?

†62) Die Diagonale der quadratischen Grundfläche eines senkrechten Prisma ist um 20′ kleiner als die Höhe des Körpers; wie groß sind beide, wenn die Oberfläche $278\frac{1}{2}$ □′ beträgt?

†63) Die Oberfläche eines rechteckigen Parallelepipeds beträgt 648 □′; die zwei anliegenden Seiten der Basis differiren um 2′ und die Höhe ist um 10′ größer als der Umfang der Grundfläche. Wie groß sind die Seiten der Basis und die Höhe des Körpers?

64) Die Höhen zweier ähnlichen Prismen differiren um 5m, die Oberfläche des einen ist viermal so groß wie die des andern; wie hoch sind beide?

b) Ueber den Kubikinhalt.

65) Wie groß ist der Kubikinhalt eines Prisma von 7′ 4″ Höhe, dessen Grundfläche ein Fünfeck von 8 □′ 64 □″ Inhalt bildet?

66) Welches Resultat ergiebt sich für vorhergehende Aufgabe, wenn bei der Auflösung das Duodecimalsystem zu Grunde gelegt wird?

67) Wie groß ist der Kubikinhalt einer 8′ hohen Mauer, wenn dieselbe 123′ lang und 2′ dick ist?

Digitized by Google

68) Es soll ein Graben von 430′ Länge, 4′ Tiefe und 3′ Breite hergestellt werden; wie viel Kubikfuß Erde sind auszuheben?

69) Wie theuer kommt ein prismatischer Baumstamm, welcher 20′ lang, $2\frac{1}{2}$′ hoch und $2\frac{1}{5}$′ dick ist, wenn für den Kubikfuß 48 Kreuzer bezahlt werden?

70) Es soll ein Keller von 52′ Länge, 29′ Breite und 18′ Tiefe gegraben werden; wie viele Fuhren sind nöthig, um die Erde wegzuschaffen, wenn durch jede Fuhre 24 c′ befördert werden?

71) Die drei aneinander liegenden Kanten eines rechteckigen Parallelepipeds sind a, b und c; wie groß ist der Kubikinhalt desselben?

72) Ein Baumstamm ist 46′ lang, $3\frac{1}{2}$′ breit und $2\frac{1}{5}$′ hoch; wie viel Klafter Holz liefert derselbe, da eine Klafter 144 c′ hat?

73) Ein Keller von 14′ Tiefe, 28′ Breite und 16′ Länge soll gegraben werden. Wie viele Wagen Erde sind wegzuschaffen, da der Wagenkasten 9′ lang, 2′ breit und $1\frac{1}{2}$ tief ist?

74) Es soll ein Kanal von 15600′ Länge, 60′ Breite und 12′ Tiefe in 6 Monaten (= 156 Arbeitstagen) gegraben werden; wie viel Arbeiter muß man anstellen, wenn angenommen werden darf, daß ein Mann im Durchschnitt täglich 96 c′ aushebt?

75) Eine zwischen zwei Häusern stehende Mauer ist 45′ lang, 8′ hoch und 1′ 6″ breit. Wie groß ist die Oberfläche derselben; wie hoch kommt der Anstrich, wenn der Quadratschuh mit 2 Kr. bezahlt wird, und was kostet die Aufführung dieser Mauer, wenn man den Kubikfuß mit Arbeitslohn zu 6 Kr. rechnet?

76) Ein Wasserbehälter ist im Lichten 7′ lang, $4\frac{1}{2}$′ breit und 3′ tief; wie viel Maas Wasser faßt derselbe? (18 bad. Maas = 1 c′.)

77) Eine Mauer von 65′ Länge, 7′ Höhe und 18″ Dicke soll mit Backsteinen aufgeführt werden, von denen jeder 9″ lang, $4\frac{1}{2}$″ breit und 2″ dick ist (die Lage des Mörtels eingerechnet); wie viel Backsteine sind zur Aufführung der Mauer erforderlich und wie theuer kommen diese, wenn 100 Stück 2 fl. kosten?

Digitized by Google

78) Welche Resultate erhält man für die Anzahl der Backsteine und den Preis derselben in Aufg. 77, wenn die Lösung nach dem Duodecimalsystem vorgenommen wird?

79) Um einen rechteckigen Garten von 264′ Länge und 120′ Breite soll ein Graben von 2′ Tiefe und 5′ Breite angelegt werden; welchen Kubikinhalt hat die auszuhebende Erde?

80) In einen Behälter, welcher 18′ lang, 4′ tief und $4\frac{1}{2}$′ breit ist, fließen durch eine Röhre in jeder Minute 27 Maas Wasser; in welcher Zeit wird der Behälter gefüllt sein? (18 Maas = 1c′.)

81) Auf einem 45′ langen, 28′ breiten Fruchtboden ist 2′ hoch Frucht aufgeschüttet; wie viel Malter liegen daselbst? (1 Mltr. = 100 Meßlein, 18 Meßlein = 1c′.)

82) Ein Fruchtkasten ist $18\frac{3}{5}$′ lang, $4\frac{1}{2}$′ breit und $4\frac{4}{5}$′ hoch; wie viel Frucht faßt er?

83) In einen mit Wasser gefüllten Teich laufen in jeder Sekunde $8\frac{3}{4}$c′ Wasser zu, aber auch in derselben Zeit $12\frac{1}{5}$c′ ab. Wenn nun der Teich 250′ lang, 140′ breit und $8\frac{2}{5}$′ tief ist; wie lange wird es währen, bis sich der Teich entleert hat?

84) Die Grundfläche eines 25′ hohen Prisma bildet ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seiten 1′ 8″ lang sind; wie groß ist der Kubikinhalt desselben?

85) Welchen Kubikinhalt hat eine regelmäßige sechsseitige Säule von 32′ Höhe, wenn der Umfang der Grundfläche $5\frac{2}{5}$′ beträgt?

86) Die Diagonale der quadratischen Basis eines senkrechten Parallelepipeds von 18′ 6″ Höhe beträgt 4′ 8″; wie groß ist der Kubikinhalt desselben?

87) Die drei Seiten der Grundfläche eines dreiseitigen Prisma von 14′ Höhe sind 2′ $2\frac{1}{2}$″, 1′ 8″ und 1′ $3\frac{1}{2}$″; wie groß ist der Kubikinhalt?

88) Die Grundfläche eines dreiseitigen Prisma von 12′ Höhe bildet ein gleichschenkliges Dreieck von 2′ 4″ Umfang, ein Schenkel dieses Dreiecks ist $7\frac{1}{2}$″ lang; wie groß ist der Kubikinhalt des Körpers?

89) Ein dreiseitiges Prisma von 16′ 2″ Höhe hat zur

Digitized by Google

Basis ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck von 15′ 8″ Umfang; wie groß ist dessen Kubikinhalt?

90) Die Grundfläche eines $16^2/_5$′ hohen Prisma ist ein Paralleltrapez, dessen zwei parallele Seiten $2^3/_5$′ und $1^4/_5$′ lang und um $1^3/_5$′ von einander entfernt sind; welchen Kubikinhalt hat das Prisma?

91) Die vier Seiten der Grundfläche einer unregelmäßigen vierseitigen Säule von 25′ Höhe sind 3,68′, 4,13′, 3,81′ und 5,08′; die Diagonale, welche die Endpunkte der Seiten 3,81′ und 5,08′ verbindet, mißt 6,35′. Wie groß ist der Kubikinhalt der Säule?

92) Ein Prisma hat einen Kubikinhalt von 375,375 c′, der Inhalt der Grundfläche beträgt 21,45 □′; wie hoch ist das Prisma?

93) Der Kubikinhalt eines Prisma mit quadratischer Basis beträgt 48 c′ 654 c″, seine Höhe mißt 8′ 5″; wie groß ist die Seite der Grundfläche?

94) Wie groß wird die Seite der Basis in Aufg. 93, wenn die Lösung nach dem Duodecimalsystem vorgenommen wird?

95) 2304 c′ Steine sind so aufgesetzt, daß sie eine 4′ dicke und 8′ hohe Mauer bilden; wie lang ist diese?

96) Man soll aus 1984 c′ Steine eine 124′ lange und 8′ hohe Mauer aufführen; wie dick wird dieselbe gemacht werden müssen?

97) Es soll ein prismatisches, oben offenes Gefäß verfertigt werden, welches 4 Maas Wasser faßt. Wenn nun dessen Grundfläche ein Quadrat von 4″ Seite sein soll; wie hoch muß dann das Gefäß gemacht werden, und wie viel Blech ist zur Verfertigung desselben erforderlich?

98) Ein Behälter soll $4^1/_2$ Ohm fassen und 8′ breit werden; wie lang muß man denselben machen, wenn die Flüssigkeit nur $2^1/_2$″ hoch darin stehen darf? (Vgl. Aufg. 17.)

99) Ein Behälter von der Form eines rechteckigen Parallelepipeds faßt $11^1/_4$ Ohm und ist im Lichten gleich lang und breit und halb so hoch als breit; welches sind seine Dimensionen?

†100) Die Oberfläche eines rechteckigen Parallelepipeds beträgt

Digitized by Google

664 □′; die Breite ist um 2′ und die Höhe um 6′ größer als die Länge. Wie groß ist der Kubikinhalt?

†101) Die Grundfläche eines Parallelepipeds ist ein Quadrat, dessen Seite um 8′ kleiner ist als die Höhe des Körpers; wie groß ist dessen Kubikinhalt, wenn die Oberfläche 224 □′ beträgt?

102) Die drei an einer Ecke zusammentreffenden Kanten eines rechteckigen Parallelepipeds von $184^1/_2$ □′ Oberfläche verhalten sich wie 2 : 3 : 7; wie groß sind diese und der Kubikinhalt?

103) Der Kubikinhalt eines rechteckigen Parallelepipeds beträgt $364^1/_2$ c′, drei aneinander stoßende Kanten verhalten sich wie 2 : 3 : 18; wie groß ist die Oberfläche des Körpers?

104) Der Kubikinhalt eines vierseitigen Prisma mit quadratischer Basis beträgt $91^1/_8$ c′; die Höhe ist doppelt so lang als die Diagonale der Grundfläche. Wie groß ist die Oberfläche?

105) Für einen vierkantigen Stamm, wovon der Kubikfuß 24 kr. kostet, zahlte man 50 fl. 24 kr. Wenn nun derselbe 28′ lang ist und die Dicke die Hälfte der Breite beträgt; wie dick und breit war dieser Stamm?

106) Ein Kasten mit rechteckiger Basis faßt $2369^1/_4$ Meßlein und ist $4^1/_2$′ tief; wie groß sind die Seiten der Grundfläche, wenn beide um 2′ differiren? (18 Meßlein = 1 c′.)

107) Die Länge eines rechteckigen Parallelepipeds ist = l, die Breite = b und die Höhe = h. Dasselbe soll ausgehöhlt werden, daß die Dicke der Seitenwände = d und die des Bodes, welcher von l und b gebildet ist, = δ wird; wie groß wird der Inhalt der Höhlung?

108) Der Inhalt eines rechteckigen Parallelepipeds ist = K, die Länge, Breite und Höhe verhalten sich zu einander wie m : n : p; wie groß sind diese Dimensionen?

109) Zwei ähnliche Gefäße von prismatischer Form fassen zusammen 9 Maas, die Höhe des einen beträgt 6″, die des andern 8″; wie viel faßt jedes?

110) Zwei ähnliche Prismen verhalten sich dem Inhalte nach wie m : n, eine Kante des einen ist = a; wie groß ist die homologe Kante des andern?

111) Zwei ähnliche Prismen differiren ihrem Inhalte nach

Digitized by Google

um 3192 Kubikfuß, zwei homologe Seiten sind 18′ und 12′ lang; wie groß ist der Inhalt eines jeden dieser Prismen?

112) Die Inhalte zweier ähnlichen Prismen sind 64^{c}′ und 27^{c}′, zwei homologe Kanten differiren um 2′; wie groß sind diese?

c) Ueber das Gewicht.

113) Wie viel wiegt eine Bleiplatte, welche $3^{2}/_{5}$′ lang, $1^{1}/_{2}$′ breit und $^{1}/_{4}$′ dick ist? (sp. Gew. = 11,38).

114) Was wiegt ein Backstein von 9″ Länge, $4^{1}/_{2}$″ Breite und $2^{1}/_{4}$″ Dicke, wenn das sp. Gew. = 2,2 ist?

115) Eine eiserne Stange von 16′ Länge hat einen quadratischen Querschnitt von 8‴ Seite; wie viel wiegt dieselbe? (sp. Gew. = 7,78).

116) Ein Zimmer ist 45′ 8″ lang, 32′ 4″ breit und 12′ 5″ hoch; wie groß ist das Gewicht der darin eingeschlossenen Luft, wenn dieselbe 770mal leichter ist als reines Wasser?

117) Löset Aufg. 116 nach preuß. Maß- und Gewichtssysteme?

118) Die Luft übt einen Druck aus, der gleich ist dem Gewichte einer Quecksilbersäule, welche die gedrückte Fläche zur Grundfläche und den jeweiligen Barometerstand zur Höhe hat. Wie stark drückt hiernach die Luft auf die Oberfläche eines Menschen, wenn diese zu 14□′ angenommen wird, bei einem Barometerstand von $27^{1}/_{2}$″? (sp. Gew. des Queckf. = 13,6.)

119) Man braucht 24 schmiedeiserne Stäbe von 8′ 2″ Länge und einem quadratischen Querschnitt von 8‴ Seite; wie theuer kommen diese, wenn für das Pfund 9 kr. bezahlt werden?

120) Wie schwer ist ein gußeisernes 16″ hohes Prisma, dessen Grundfläche ein rechtwinkliges Dreieck bildet, wovon die Hypotenuse 4″ 2‴ und eine Kathete um $8^{2}/_{5}$‴ kürzer ist als diese?

121) Löset Aufg. 119 nach würtemb. Maß- und Gewichtssysteme!

122) Ein vierseitig behauener Stamm von Tannenholz ist 36′ 8″ lang. Der Querschnitt desselben bildet ein Parallel-

Digitized by Google

trapez, von welchem die zwei parallelen Seiten 1′ 8″ und 1′ 6″ und jede der zwei andern 1′ 5″ lang sind; wie viel wiegt dieser Stamm? (sp. Gew. = 0,79).

123) Die drei Seiten der Grundfläche eines dreiseitigen Prisma von 8′ Höhe sind $2^1/_2$′, $1^1/_2$′ und 2′; wie groß ist das Gewicht, wenn das sp. Gew. = 3,5 ist?

124) Eine regelmäßige achtseitige Säule von Sandstein, dessen sp. Gew. = 2,5 ist, hat eine Höhe von 24′ und einen Umfang von 12′; wie groß ist das Gewicht derselben? (1^{cr} Wasser zu 44,3 ℔ gerechnet.)

125) Ein Stückchen Kupfer, das die Form eines Parallelepipeds mit quadratischer Basis hat, wiegt 2,281 ℔, die Länge desselben beträgt $7^1/_2$″; wie groß ist die Seite der Grundfläche? (sp. Gew. = 8,8.)

126) Ein regelmäßiges dreiseitiges Prisma von 5′ Höhe hat ein Gewicht von 1836 ℔; wie groß ist die Seite der Grundfläche, wenn das sp. Gew. = 4 ist?

127) Ein parallelepipedischer Stab von Schmiedeisen wiegt 157,545 ℔, der Querschnitt ist ein Quadrat dessen Umfang in der Länge des Stabes 6mal enthalten ist; wie lang ist der Stab und wie groß ist die Seite des Querschnitts?

†128) Es sollen Eisenstäbe von rechteckigem Querschnitt geschmiedet werden, von welchen der laufende Fuß $1^1/_2$ ℔ wiegt. Zwei anstoßende Seiten des Querschnitts sollen um 4‴ differiren; wie groß müssen diese gemacht werden?

129) Es soll ein Centnergewicht von Eisen gegossen werden, das die Form eines regelmäßigen sechsseitigen Prisma hat. Dasselbe soll $^4/_5$′ hoch werden; wie groß muß man eine Seite der Grundfläche machen, wenn ein Kubikfuß Wasser 50,2 ℔ wiegt?

130) Wie tief sinkt ein rechteckiges Parallelepiped von trockenem Ahornholz in Wasser ein, wenn dasselbe 18′ lang, 3′ breit und 4′ dick ist und mit der breiten Seitenfläche auf das Wasser gelegt wird?

131) Wie tief sinkt das Parallelepiped der vorhergehenden Aufgabe ein, wenn es mit der schmalen Seitenfläche auf das Wasser gelegt wird?

Digitized by Google

132) Ein hölzerner parallelepipedischer Kasten ohne Deckel hat im Lichten eine Breite von 3′, eine Länge von 5′ und eine Tiefe von $2^1/_2$′, die Holzdicke beträgt durchgängig $1^1/_2$″. Wie tief sinkt derselbe in Wasser ein, und wie viel Backsteine können noch in den Kasten gelegt werden, damit derselbe noch 4″ über den Wasserspiegel hervorragt, wenn jeder Backstein 9″ lang, $4^1/_2$″ breit und 2″ dick und das sp. Gew. des Holzes = 0,75 und das der Backsteine = 2,2 ist?

133) Zwei ähnliche gußeiserne Stäbe von prismatischer Form wiegen zusammen 39,366 ℔, zwei homologe Kanten sind 4′ 5″ und $2^1/_4$′ lang; wie viel wiegt jeder dieser Stäbe?

134) Eine Kante eines 192 ℔ schweren Prisma ist um 0,3′ kleiner als die gleichliegende Kante eines ähnlichen aus derselben Materie bestehenden und 375 ℔ schweren Prisma; wie groß sind diese Kanten?

135) Ein Prisma von Holz dessen spec. Gew. = 0,6 ist und ein ähnliches von Metall vom sp. Gew. = 7,5 wiegen zusammen $5313^3/_5$ ℔; wie groß ist das Gewicht eines jeden dieser Körper, wenn eine Kante des erstern = 8′ und die homologe des andern = 4′ ist?

136) Ein Parallelepiped von Stahl (sp. Gew. = 8), das 1,5′ lang, 0,5′ breit und 0,4′ hoch ist, soll mit einem ähnlich geformten Parallelepiped von Holz (sp. Gew. = 0,5) verbunden werden, daß die Verbindung im Wasser schwebt, d. h. gleiches Gewicht mit dem Wasser hat; wie lang, hoch und breit muß der Körper von Holz gemacht werden?

§. 4. Aufgaben über die Berechnung des Würfels.

a) Ueber Oberfläche und Kubikinhalt.

137) Wie groß ist die Oberfläche und der Kubikinhalt eines Würfels, dessen Kante mißt:

a) 6′? c) 2′ 6″? e) 4″ 5‴?
b) $5^4/_5$? d) 8′ 4″ 3‴? f) $1^{\text{met.}}\ 4^{\text{d.m.}}\ 3^{\text{c.m.}}$?

138) Man soll die Oberfläche und den Kubikinhalt eines Würfels von 2′ 8‴ Seite a) nach dem Decimal-, b) nach dem Duodecimalsystem bestimmen.

Digitized by Google

139) Die Länge der Kante eines Würfels ist = a; wie groß ist dessen Oberfläche und Kubikinhalt?

140) Der Umfang der Seitenfläche eines Würfels beträgt 12,32$^{met.}$; wie groß ist die Oberfläche und der Kubikinhalt desselben?

141) Ein Würfel von $8^1/_2$′ Seite soll mit Oelfarbe angestrichen werden; der Quadratfuß Anstrich kostet 2 kr. Wie viel muß bezahlt werden, wenn der Körper mit einer Seitenfläche auf dem Boden aufliegt, und wie groß ist der Kubikinhalt des Würfels?

142) Man soll die Oberfläche und den Kubikinhalt eines Würfels aus der Summe aller Kanten = 42′ berechnen.

143) Um wie viel differiren die Oberflächen und die Kubikinhalte zweier Würfel, wenn die Kante des einen = $1^3/_4$′, und die des andern viermal so groß ist?

144) Der Flächeninhalt des Seitenquadrats eines Würfels beträgt 13□′ 24□″ 96□‴; wie groß ist der Kubikinhalt des Körpers?

145) Löset Aufgabe 144 nach dem Duodecimalsysteme!

146) Die Diagonale des Seitenquadrats eines Würfels mißt 2′ 4″; wie groß ist die Oberfläche und der Kubikinhalt desselben?

147) Man soll die Oberfläche und den Kubikinhalt eines Würfels berechnen, dessen Diagonale 6 Fuß lang ist.

148) Welche Ausdrücke erhält man für die Oberfläche und den Kubikinhalt eines Würfels, dessen Diagonale = D ist?

149) Bestimmet die Kantenlänge und den Kubikinhalt eines Würfels, dessen Oberfläche beträgt:
a) 2646□′; b) 47,04□′; c) 326,7864□′; d) 98,415□$^{met.}$

150) Leitet einen Ausdruck für den Kubikinhalt eines Würfels her, dessen Oberfläche = O ist!

151) Die Oberfläche eines Würfels beträgt 73,5□′; wie groß ist die Diagonale und der Kubikinhalt desselben?

152) Der Inhalt des Netzes zu einem Würfel beträgt 3□′ 84□″; wie groß wird der Kubikinhalt des Würfels?

153) Die Oberfläche eines Würfels beträgt 66□′ 96□″ Duodecimalmaß; wie groß ist dessen Kubikinhalt?

Digitized by Google

154) Wie viel Würfel von 3″ Seite lassen sich aus einem andern von 2′ 4″ Seite bilden?

155) Wie viel Maas Wasser faßt ein Gefäß, dessen hohler Raum die Form eines Würfels von 8″ Seite hat? ($1^{c'} =$ 18 Maas.)

156) Zwei Würfel haben zusammen eine Oberfläche von $174\square'$; die Kante des einen ist $2\frac{1}{2}$mal so groß wie die des andern. Wie groß ist der Kubikinhalt eines jeden Würfels?

***157)** Man kennt die Summe der Kanten zweier Würfel $= S$, die Differenz derselben $= d$, und soll hieraus die Kubikinhalte beider bestimmen!

158) Nimmt man die Kante eines Würfels um $1\frac{1}{2}'$ größer, so wird dessen Oberfläche um $58\frac{1}{2}\square'$ größer als vorher; wie groß ist der Kubikinhalt des Würfels in beiden Fällen?

†159) Man kennt die Summe der Oberflächen zweier Würfel $= 61\frac{1}{2}\square'$ und die Summe zweier Kanten derselben $= 4\frac{1}{2}'$; wie groß ist der Kubikinhalt eines jeden dieser Würfel?

†160) Die Summe der Oberflächen zweier Würfel sei $= O$ und die zweier Kanten $= K$; welchen Ausdruck erhält man für jede dieser Kanten?

†161) Die Diagonale eines Würfels übertrifft dessen Kante um 2 Fuß; wie groß ist der Kubikinhalt desselben?

†162) Setzet in Aufgabe 161 den Unterschied der Diagonale und der Kante $= d$ und leitet für den Kubikinhalt einen allgemeinen Ausdruck her!

†163) Die Summe der Kante und der Diagonale eines Würfels sei $= S$; welchen Ausdruck erhält man für den Kubikinhalt desselben?

164) In einen Würfel ist ein anderer so eingeschrieben, daß dessen Kanten die Seitenflächen des erstern halbiren; in welchem Verhältniß stehen die Oberflächen und die Inhalte beider Würfel, wenn die Kante des umschriebenen $= k$ ist?

165) Wie groß ist die Seite eines Würfels, wenn dessen Kubikinhalt beträgt:

a) $3\frac{3}{8}{}^{c'}$? d) $131^{c'}\ 69^{c''}\ 512^{c'''}$? g) $\frac{11}{32}{}^{c'}$?
b) $42\frac{7}{8}{}^{c'}$? e) $250^{c'}\ 47^{c''}$? h) $24^{c.m.}\ 389^{c.dm.}$?
c) $248^{c'}\ 858^{c''}\ 189^{c'''}$? f) $\frac{5}{8}{}^{c'}$? i) $15{,}438249^{c.met.}$?

Digitized by Google

166) Der Kubikinhalt eines Würfels beträgt nach dem Duodecimalmaß 418$^{c\prime}$ 508$^{c\prime\prime}$ 992$^{c\prime\prime\prime}$; wie groß ist dessen Kante?

167) Der hohle Raum eines Behälters soll die Form eines Würfels haben und 100 Maas fassen; wie groß muß eine Seite des Raumes gemacht werden, da 18 Maas 1$^{c\prime}$ geben?

168) Aus drei Würfeln, deren Seiten 6″, 8″ und 9″ lang sind, wurde ein Würfel gefertigt; wie groß war die Kante desselben?

169) Die Seite eines Würfels beträgt 6′; um wie viel ist die eines Würfels von doppeltem Inhalte größer?

170) Ein Gefäß von Blech soll die Gestalt eines Würfels bekommen und 4 Maas fassen; wie groß muß eine Seite desselben gemacht werden, und wie viel Blech ist erforderlich, wenn das Gefäß oben offen bleibt? (18 Maas = 1$^{c\prime}$.)

171) Der Kubikinhalt eines Würfels ist = C; welchen Ausdruck erhält man für dessen Oberfläche?

172) Wie groß ist die Diagonale eines Würfels von 21,952$^{c\prime}$ Inhalt?

173) Bezeichnet man den Kubikinhalt eines Würfels mit C, so erhält man welchen allgemeinen Ausdruck für dessen Diagonale?

°174) Man goß vier Würfel zu einem einzigen, dessen Kubikinhalt = $12\frac{1}{2}$$^{c\prime}$ wurde. Die Seiten der vier Würfel bildeten eine arithmetische Reihe, indem die des kleinern von dem zunächst größern immer um $\frac{1}{2}$′ an Länge übertroffen wurde. Wie groß war der Kubikinhalt eines jeden dieser vier Würfel?

†175) Wird die Seite eines Würfels um $\frac{1}{2}$′ kleiner angenommen, so wird der Kubikinhalt dadurch um $21\frac{1}{8}$$^{c\prime}$ kleiner; wie groß war anfänglich die Seite?

†176) Die Inhalte zweier Würfel sind zusammen = 280$^{c\prime}$, die Summe zweier Kanten derselben beträgt 10′; wie groß sind die Oberflächen beider Würfel?

b) Ueber das Gewicht.

177) Die Seite eines Würfels von Marmor mißt 2′ 5″, wie groß ist das Gewicht desselben? (sp. Gew. = 2,7.)

Digitized by Google

178) Löset Aufg. 177 nach dem preuß. Maß- und Gewichtssysteme!

179) Wie viel wiegt ein Postament von Granit, wenn dasselbe einen Würfel von 2′ Seite bildet? (sp. Gew. = 2,7.)

180) Aus 1000 ℔ Eisen können wie viel Würfel von 8″ Seite gegossen werden? (sp. Gew. = 7,2.)

181) Ein hölzernes Gefäß, welches oben offen und an den Außenflächen 12″ lang, breit und hoch ist, wird mit Wasser gefüllt; wie viel wiegt dasselbe sammt Wasser, wenn die Seitenwände wie der Boden 5‴ dick sind, und das sp. Gew. des Holzes = 0,6 ist?

182) Es soll ein zwei Centner schwerer Würfel von Eisen gegossen werden; wie groß muß man eine Seite desselben machen?

183) Löset vorhergehende Aufgabe nach preuß. Maß- und Gewichtssysteme! (1 Ctr. = 110 ℔.)

184) Ein Würfel von 1′ 6″ 4‴ Seite wiegt 17 Ctr. $86^2/_5$ ℔; wie groß ist das sp. Gew. der Masse?

185) Das Gewicht eines gußeisernen Würfels beträgt $60^3/_4$ Ctr.; wie groß ist dessen Seite und Diagonale?

186) Aus zwei eisernen Würfeln von 4″ und 5″ Seite soll ein Würfel gegossen werden; welches Gewicht erhält dieser und wie groß wird eine Seite desselben?

187) Zwölf gleich große Würfel von Kupfer wiegen zusammen 45 ℔ 29 Loth; wie groß ist die Seite eines jeden? (sp. Gew. = 8,8.)

188) Man gießt aus 22 ℔ Kupfer und 9 ℔ Zinn einen Würfel; wie groß wird eine Seite desselben? (sp. Gew. des Kupfers = 8,8; das des Zinns = 7,3.)

°189) Das Gewicht eines hohlen Würfels von Kupfer beträgt 112,91 ℔, welche Dicke hat die überall gleich starke Wand, wenn eine Kante des Körpers 2′ mißt? (sp. Gew. = 8,8.)

190) Wie tief sinkt ein Würfel von Holz ein, dessen sp. Gew. = 0,7 ist, wenn die Kante 2′ 5″ mißt und der Körper so schwimmt, daß die Seitenkanten senkrecht zum Wasserspiegel sind?

191) Ein hohler Würfel von Kupfer hat eine Kante von

Digitized by Google

$1\frac{1}{2}'$ Länge und eine Wandstärke von 1 Linie, wie tief sinkt er im Wasser ein? (sp. Gew. = 8,8.)

192) Wie viel gußeiserne Würfel von $2\frac{1}{2}''$ Seite vermag ein hölzerner, oben offener Kasten im Wasser zu tragen, wenn der hohle Raum einen Würfel von $2\frac{1}{2}'$ Seite bildet, und die Dicke der Seitenwände, sowie des Bodens, $5'''$ beträgt? (sp. Gew. des Holzes = 0,5.)

193) Die Seiten dreier Würfel von Blei bilden eine stetige Proportion. Das Gewicht des größten übertrifft das des kleinsten um $3061\frac{4}{5}$ ℔, und das eines der beiden andern um $2721\frac{3}{5}$ ℔. Wie groß sind die Seiten dieser Würfel?

†194) Aus zwei eisernen Würfeln wurde ein Würfel gegossen, der 3395,9 ℔ wog. Die Summe zweier Seiten beider Würfel war = $3\frac{1}{4}'$; wie groß waren diese?

†195) Nimmt man die Kante eines Würfels um $\frac{1}{2}'$ größer an, so wird das Gewicht um 3294 ℔ größer; wie groß ist die Kante, da das sp. Gew. der Masse = 8 ist?

§ 5. Aufgaben über die Berechnung der Pyramide.

A. Berechnung der vollständigen Pyramide.

a) Ueber die Oberfläche.

196) Die Seite der Grundfläche einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide ist $2\frac{1}{2}'$ lang, die Höhe eines Seitendreiecks mißt $8'$; wie groß ist die Oberfläche der Pyramide?

197) Eine regelmäßige Pyramide hat zur Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck von $26''$ langer Seite; die Höhe eines Seitendreiecks beträgt $54''$. Wie groß ist die Oberfläche des Körpers?

198) Der Mantel einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide soll angestrichen werden. Wie theuer kommt der Anstrich, den Quadratfuß zu 2 kr. gerechnet, wenn die Seite der Basis = $3'\ 4''$ und die Höhe eines Seitendreiecks = $18'\ 2''$ gemessen wurden?

199) Wie groß ist die Oberfläche einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide, wenn die Diagonale der Basis 1,4′ mißt und die Höhe eines Seitendreiecks viermal so groß ist als diese Diagonale?

Digitized by Google

200) Jede der sechs Kanten einer dreiseitigen Pyramide ist 4′ lang; wie groß ist ihre Oberfläche?

201) Die Seite der Basis einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide ist $10^1/_5$′ lang, eine Seitenkante mißt $8^1/_2$′; wie groß ist die Oberfläche?

202) Der Halbmesser des um die Grundfläche einer regelmäßigen dreiseitigen Pyramide beschriebenen Kreises ist 2′ 4″ lang, eine Seitenkante ist = 8′; wie groß ist die Oberfläche der Pyramide?

203) Die Seite der Grundfläche einer regelmäßigen dreiseitigen Pyramide ist = a, eine Seitenkante = b; welchen Ausdruck erhält man für deren Oberfläche?

204) Welche Oberfläche hat eine reguläre vierseitige Pyramide von 4,8′ Höhe, wenn die Seite der Basis 7,2′ lang ist?

205) Man soll die Oberfläche einer regulären sechsseitigen Pyramide von 15′ Höhe berechnen, wenn die Seite der Grundfläche 3′ mißt.

206) Die Seite der Basis einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide ist = a, die Höhe = h; welchen Ausdruck erhält man für deren Oberfläche?

207) Die Oberfläche einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide beträgt $56^1/_4$□′, die Seite der Basis ist $2^1/_2$′ lang; wie groß ist die Höhe eines Seitendreiecks und die Höhe der Pyramide?

208) Die Höhe einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide von 36□′ Oberfläche beträgt $1^1/_2$′; wie groß ist eine Seite der Basis?

†209) Wie hoch ist eine regelmäßige dreiseitige Pyramide von 50□′ Oberfläche, wenn jede der drei Seitenkanten 8′ lang ist?

210) Setzet in Aufg. 208 die Oberfläche = O und die Höhe = h und leitet für die Seite der Basis einen allgemeinen Ausdruck her!

211) Die Seite der quadratischen Basis einer senkrechten Pyramide ist = s, die Oberfläche = O; welchen Ausdruck erhält man für die Höhe des Körpers?

212) Die acht Kanten einer vierseitigen Pyramide sind gleich lang; wie groß ist jede, wenn die Oberfläche = O ist?

Digitized by Google

213) In vorhergehender Aufgabe sei O = 68,3 □′; wie groß ist jede Kante?

214) Die Oberfläche einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide beträgt 512,31 □′, die Seite der Basis kommt der Hälfte der Höhe des Körpers gleich; wie groß sind diese Dimensionen?

†215) Die Oberfläche einer regulären dreiseitigen Pyramide beträgt 343,3 □′, die Höhe eines Seitendreiecks übertrifft eine Seite der Basis um 10′; wie groß ist a) die Seite der Basis, b) eine Seitenkante?

216) Die Seitenkante und die Basisseite einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide von 336 □′ Oberfläche verhalten sich zu einander wie 5 : 6; wie groß sind jene Kanten?

217) Eine reguläre vierseitige Pyramide hat eine Oberfläche von 410,13 □′, die Seite der Basis verhält sich zur Seitenkante wie 4 : 11; wie groß ist die Seite der Grundfläche?

218) Zwei homologe Kanten zweier ähnlichen Pyramiden sind = $4^3/_4$′ und $1^1/_4$′, die Oberfläche der erstern beträgt 162 □′; wie groß ist die der letztern?

219) Die Oberflächen zweier ähnlichen Pyramiden sind O und O′; eine Kante der erstern ist = k; wie groß ist die gleichliegende Kante der andern Pyramide?

220) Die Oberflächen zweier ähnlichen Pyramiden differiren um 135 □′, zwei homologe Kanten sind = $4^1/_2$′ und $1^1/_2$′; wie groß ist die Oberfläche einer jeden Pyramide?

221) Zwei homologe Kanten zweier ähnlichen Pyramiden differiren um 2′, die Oberflächen beider betragen 144 □′ und 121 □′; wie groß sind jene Kanten?

b) Ueber den Kubikinhalt.

222) Eine sechsseitige Pyramide hat eine Grundfläche von 25 □′, 26 □″ Inhalt und eine Höhe von 8′ 5″; wie groß ist deren Kubikinhalt?

223) Löset Aufgabe 220 nach dem Duodecimalsysteme!

224) Die Seite der Grundfläche einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide mißt 2′ 3″, die Höhe des Körpers 8′ 7″; wie groß ist der Kubikinhalt?

Digitized by Google

225) Wie groß ist der Kubikinhalt einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide von 18′ Höhe, wenn die Seite der Basis 5′ lang ist?

226) Bestimmet den Kubikinhalt der in Aufg. 206 gegebenen Pyramide!

227) Die Seite der Grundfläche einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide ist $= 3^1/_5'$, eine Seitenkante $= 15^4/_5'$; wie groß ist deren Kubikinhalt?

228) Berechnet den Kubikinhalt der in Aufg. 202 gegebenen Pyramide!

229) Welchen Ausdruck erhält man für den Kubikinhalt der Pyramide in Aufg. 203?

230) Wie groß ist der Kubikinhalt einer regelmäßigen dreiseitigen Pyramide, wenn der Umfang der Grundfläche $= 8{,}4'$ und jede Seitenkante $= 8{,}2'$ ist?

231) Welchen Kubikinhalt hat die Pyramide der Aufg. 199?

232) Bestimmet den Kubikinhalt einer dreiseitigen Pyramide, von welcher jede Kante 6′ lang ist!

233) Die Seite der Basis einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide ist $= a$, eine Seitenkante $= b$; man soll einen allgemeinen Ausdruck für deren Kubikinhalt ableiten.

234) Eine 8,4′ hohe Pyramide hat zur Grundfläche ein Dreieck, dessen drei Seiten 2,4′, 4′ und 3,2′ lang sind; wie groß ist ihr Kubikinhalt?

235) Die Oberfläche einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide beträgt 56,25 □′, die Seite der Grundfläche mißt 2,5′; wie groß ist der Kubikinhalt derselben?

236) Die Oberfläche einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide beträgt 1176 □′, die Höhe ist $= 14'$; wie groß ist deren Kubikinhalt?

†237) Welchen Kubikinhalt hatte eine regelmäßige dreiseitige Pyramide, wenn die Oberfläche 25 □′ betrug und jede Seitenkante 8′ lang war?

238) Die Kante der Grundfläche einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide ist $= a$, die Oberfläche $= O$; welchen Ausdruck erhält man für den Kubikinhalt dieses Körpers?

Digitized by Google

239) Wie hoch ist eine Pyramide von 598$^{c'}$ Inhalt, wenn die Grundfläche 48$^1/_4$□$'$ groß ist?

240) Wie groß ist die Seite der Grundfläche einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide von 12$'$ Höhe und 768$^{c'}$ Inhalt?

241) Der Kubikinhalt einer regelmäßigen Pyramide mit quadratischer Basis beträgt 58$^{c'}$ 900$^{c''}$ und die Höhe 9$'$ 5$''$; wie groß ist eine Seite der Grundfläche?

242) Eine regelmäßige dreiseitige Pyramide von 415$^{17}/_{25}{}^{c'}$ Inhalt ist 4$^1/_2{}'$ hoch; wie groß ist eine Seite der Basis?

243) Der Kubikinhalt einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide ist = 7,775$^{c'}$, die Seitenkante beträgt das Dreifache der Basisseite; welche Werthe haben diese Dimensionen?

244) Jede Seitenkante einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide von 96$^{c'}$ Inhalt ist doppelt so lang als die Seite der Basis; wie groß sind diese Dimensionen?

245) Die Kanten einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide sind alle gleich lang; wie groß ist jede derselben, wenn der Kubikinhalt des Körpers 1,885$^{c'}$ beträgt?

246) Eine regelmäßige vierseitige Pyramide hat 18,432$^{c'}$ Inhalt, ihre Höhe beträgt das 4fache der Basisseite; wie groß sind Höhe und Basisseite dieses Körpers?

°247) Die Seite der Basis einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide wird von der Höhe um 15$'$ übertroffen; wie groß sind beide, wenn der Kubikinhalt 66,429$^{c'}$ beträgt?

248) Der Kubikinhalt einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide beträgt 283,464$^{c'}$, eine Seitenkante beträgt das 4fache der Kante der Basis; wie groß ist letztere?

249) Man soll eine gerade Pyramide durch einen zur Grundfläche parallelen Schnitt in zwei gleiche Theile theilen; in welcher Entfernung von der Spitze muß die Schnittebene durchgelegt werden, wenn die Höhe der Pyramide = h ist?

250) Eine gerade Pyramide mit quadratischer Basis soll durch eine zur Grundfläche parallele Ebene halbirt werden. In welcher Entfernung von der Spitze muß man die Ebene durchlegen, wenn die Seite der Basis = 2$'$ und eine Seitenkante = 6$'$ ist? a) unmittelbar, b) als Anwendung des für Aufg. 249 erhaltenen Ausdrucks.

Digitized by Google

251) Der Kubikinhalt einer Pyramide beträgt 592,704$^{c'}$, eine Kante ist 8,3′ lang; wie groß ist der Kubikinhalt einer andern dieser ähnlichen Pyramide, wenn die homologe Kante eine Länge von 2,7′ hat?

252) Die Kubikinhalte zweier ähnlichen Pyramiden sind 54,872$^{c'}$ und 5,832$^{c'}$, eine Kante der erstern mißt $3^4/_5$′; wie groß ist die entsprechende Kante der andern Pyramide?

253) Man hat von einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide ein Modell gefertigt, von welchem die Basisseite = a und eine Seitenkante = b ist; wie groß wird der Kubikinhalt der darnach auszuführenden Pyramide, wenn die Höhe derselben = h werden soll?

254) Es sei in Aufg. 253 a = 8″, b = 18″ und h = 24′. Man soll den Kubikinhalt a) unmittelbar, b) nach der erhaltenen Formel berechnen.

255) Zwei homologe Kanten zweier ähnlichen Pyramiden differiren um 1,1′, ihre Kubikinhalte betragen 19,683$^{c'}$ und 4,096$^{c'}$; wie groß sind jene Kanten?

c) Ueber das Gewicht.

256) Welches Gewicht hat eine regelmäßige vierseitige Pyramide, wenn das sp. Gew. der Masse = 2,5, eine Seite der Basis = 7′ und die Höhe = 12′ ist?

257) Zu den größten Gebäuden auf der Erde gehören die Pyramiden von Ghize in Aegypten. Unter ihnen befindet sich eine (die Pyramide des Cheops), welche an der rechtwinkligen Grundfläche eine Seite von 775′ (= 716 par. Fuß) hat und deren senkrechte Höhe 507′ (= 468 par. Fuß) beträgt; wie groß ist das Gewicht derselben, wenn das sp. Gew. der Masse, aus welcher sie besteht, = 2,7 ist?

258) Ein Grabstein von Granit bildet eine regelmäßige vierseitige Pyramide. Wie groß ist dessen Gewicht, wenn die Seite der Grundfläche = 3′ und eine Seitenkante = 8′ ist? (sp. Gew. des Granits = 2,7.)

259) Eine Pyramide, deren Grundfläche ein Quadrat bildet, wiegt $48^3/_5$ ℔; wie hoch ist dieselbe, wenn das sp. Gew. 7,2 beträgt?

Digitized by Google

260) Löset Aufg. 256. a) nach preußischem, b) nach bayerischem und c) nach würtemberg. Maß- und Gewichtssysteme!

261) Nach dem preußischen Maß- und Gewichtssysteme wiegt eine regelmäßige dreiseitige Pyramide 250 ℔; wie groß ist eine Seite der Basis, wenn der Körper 27 Zoll hoch ist und das sp. Gew. der Masse 2,8 beträgt?

262) Wie hoch muß eine vierseitige Pyramide mit quadratischer Basis von $1\frac{1}{2}'$ Seite gemacht werden, damit sie 200 ℔ wiegt, wenn das sp. Gew. = 2,5 ist?

°263) Eine senkrechte Pyramide, deren Höhe um 4′ größer ist als die Diagonale der quadratischen Grundfläche, wiegt 405 ℔; wie hoch ist die Pyramide, wenn das sp. Gewicht der Masse = 3 ist?

264) Es soll eine senkrechte Pyramide mit quadratischer Basis aus Kupfer gegossen werden, welche 3951 ℔ wiegt und bei welcher alle Kanten gleich lang sind; wie groß müssen diese gemacht werden? (sp. Gew. = 8,78.)

265) Zwei ähnliche gußeiserne Pyramiden wiegen $1\frac{1}{4}$ und $33\frac{3}{4}$ Ctr., die eine ist um 5′ höher als die andere; wie hoch ist jede?

B. Berechnung der abgekürzten Pyramide.

a) Ueber einige allgemeine Bestimmungen.

266) Der Inhalt der größern Grundfläche einer abgekürzten Pyramide ist = G, eine Seite derselben = S; wie groß ist der Inhalt der andern Grundfläche, wenn die homologe Seite = s ist?

267) Die Höhe einer vollständigen Pyramide ist = H, in einer Entfernung = h′ von der Spitze wird durch sie eine zur Basis parallele Ebene gelegt; wie groß wird der Inhalt der Durchschnittsfläche, wenn der der Grundfläche = G ist?

268) Die beiden Grundflächen einer abgekürzten Pyramide sind G und g, eine Seite der erstern ist = S; wie groß ist die entsprechende Seite der andern Grundfläche?

269) Durch eine sechsseitige Pyramide, deren Grundfläche 5,29 □′ Inhalt und eine 2,5′ lange Seite hat, wird eine zur Basis parallele Ebene gelegt, so daß die Seite der Schnittfläche,

Digitized by Google

welche der gegebenen Seite der Grundfläche entspricht, 1,5′ lang wird; wie groß wird der Inhalt der Schnittfläche?

270) Eine regelmäßige sechsseitige Pyramide von 12,4′ Höhe hat eine Grundfläche von 2,56′ langer Seite. Parallel zu dieser Fläche soll eine Ebene durch den Körper gelegt werden, so daß die Durchschnittsfläche 0,6′ Seite erhält. In welcher Entfernung von der Basis muß diese Ebene durchgelegt werden?

271) Die Seite der größern Grundfläche einer abgekürzten Pyramide ist = S, die homologe der kleinern = s, die Höhe der vollständigen Pyramide war = H; wie groß ist a) die Höhe der Ergänzungspyramide, b) die der abgekürzten Pyramide?

272) Durch eine Pyramide wurde in einer Entfernung = 18,6′ von der Grundfläche eine zu dieser parallele Ebene gelegt; wie hoch war die Pyramide, wenn eine Seite der Basis = 6,25′ und die homologe der Schnittfläche = 2,5′ ist?

273) Die Seite der Basis einer regelmäßigen dreiseitigen Pyramide von 15,6′ Höhe mißt 5,8′; 8,2′ von der Grundfläche entfernt wird der Körper parallel zu dieser durch eine Ebene geschnitten. Wie groß ist der Inhalt der Durchschnittsfläche?

274) Die Inhalte der beiden Grundflächen einer abgekürzten Pyramide sind G und g, die Höhe = h; welchen Ausdruck erhält man für die Höhe der vollständigen Pyramide?

275) Die beiden Grundflächen einer abgekürzten Pyramide sind G und g, durch die Mitte der Höhe wird eine zu diesen Flächen parallele Ebene gelegt; welchen Inhalt erhält die Durchschnittsfläche?

276) Löset Aufg. 275 für G = 7,29 □′, g = 3,24 □′ a) unmittelbar, b) nach der erhaltenen Formel!

b) Ueber die Oberfläche.

277) Die Höhe einer Seitenfläche einer nseitigen abgekürzten regelmäßigen Pyramide ist = h, die Seiten der beiden Grundflächen sind S und s; wie groß ist der Inhalt des Mantels?

278) Man soll den Inhalt des Mantels einer abgekürzten regelmäßigen sechsseitigen Pyramide berechnen, wenn die Seiten der Grundflächen 3′ 8″ und 2′ 4″ lang sind und die Höhe einer Seitenfläche 8′ 5″ mißt.

Digitized by Google

279) Wie groß ist die ganze Oberfläche einer abgekürzten regelmäßigen vierseitigen Pyramide, wenn die Seite des größern Quadrats = 8′ 6″, die des kleinern = 5′ 5″ und die Höhe einer Seitenfläche = 15′ 4″ ist?

280) Welchen Ausdruck erhält man für die Oberfläche einer abgekürzten regelmäßigen vierseitigen Pyramide, wenn man die Seite des größern Quadrats mit S, die des kleinern mit s und die Höhe der Pyramide mit h bezeichnet?

281) Wie groß ist die Oberfläche einer abgekürzten regelmäßigen vierseitigen Pyramide von 5,2′ Höhe, wenn die Seiten der zwei Grundflächen 6,4′ und 4,8′ lang sind? a) unmittelbar und b) nach der für Aufg. 280 erhaltenen Formel.

282) Welche Höhe hat eine abgekürzte quadratische Pyramide von 163 □′ Oberfläche, wenn die Seiten der Grundflächen 5′ und 3′ lang sind? a) unmittelbar; b) aus der für 280 erhaltenen Formel.

283) Die Seiten der Grundflächen und die Höhe einer Seitenfläche einer abgekürzten regelmäßigen sechsseitigen Pyramide von 274,455 □′ Oberfläche verhalten sich wie 1 : 3 : 8; wie groß sind diese Stücke?

†284) Die Oberfläche einer abgekürzten regulären dreiseitigen Pyramide von 5,4′ Höhe beträgt 52,78 □′; die Seite der einen Grundfläche ist 2,4′ lang; wie groß ist die der andern?

†285) Die Oberfläche einer abgekürzten Pyramide mit quadratischer Basis beträgt 351,9 □′, die Höhe des Körpers mißt 10′; wie groß sind die Seiten beider Quadrate, wenn sie um 3′ differiren?

c) Ueber den Kubikinhalt.

286) Die beiden Grundflächen einer abgekürzten Pyramide sind G und g, die Höhe der vollständigen Pyramide war = H und die der Ergänzungspyramide = h′; wie groß ist der Kubikinhalt der abgekürzten Pyramide?

287) Welchen Kubikinhalt hat eine abgekürzte regelmäßige vierseitige Pyramide von 21′ Höhe, wenn die Höhe der Ergänzungspyramide = 7,8′ und die Seite der Basis = 4,8′ ist?

288) Eine Pyramide, deren Höhe = H ist, wird von einer

Digitized by Google

Ebene parallel zur Grundfläche geschnitten; wie groß ist der Inhalt der Durchschnittsfläche, wenn der Inhalt der Basis = G und der Kubikinhalt der abgekürzten Pyramide = k ist?

289) Bezeichnet man die Inhalte der beiden Grundflächen einer abgekürzten Pyramide mit G und g, und deren Höhe mit h, so ist der Kubikinhalt $= \frac{h}{3}(G + g + \sqrt{G.g})$

Leitet diese Formel her!

290) Die beiden Grundflächen einer abgekürzten Pyramide betragen 16 □′ und 25 □′, die senkrechte Entfernung beider ist = 9′; wie groß ist der Kubikinhalt dieser Pyramide?

291) Man kennt von einer abgekürzten Pyramide den Inhalt der größern Grundfläche = 16 □′, den der kleinern = 9 □′ und die Höhe der Pyramide = 8′ 7″; wie groß ist der Kubikinhalt derselben?

292) Wie groß ist der Kubikinhalt eines vierseitigen pyramidalischen Baumstammes, welcher an der größern Grundfläche 3′ 2″ breit und 2′ 4″ dick, an der kleinern aber 2′ 8″ breit und 2′ dick ist und eine Länge von 31′ 5″ hat?

293) Ein 26 Fuß langer Baumstamm ist nach einer vierseitigen abgestumpften Pyramide behauen, deren Grundflächen Rechtecke bilden. An dem einen Ende ist er 2,2′ hoch und 1,5′ dick, an dem andern 1,4′ hoch und 0,95′ dick; wie groß ist der Kubikinhalt und was kostet der Stamm, wenn der Kubikfuß mit 54 kr. bezahlt wird?

294) Welchen allgemeinen Ausdruck erhält man für den Kubikinhalt einer abgekürzten regelmäßigen vierseitigen Pyramide, wenn man die Seiten der quadratischen Grundflächen mit S und s und die Höhe des Körpers mit h bezeichnet?

295) Die Seiten der Grundflächen einer abgekürzten Pyramide mit quadratischer Basis sind 16″ und 8″; die Höhe beträgt 24″; man soll den Kubikinhalt des Körpers berechnen.

296) Man soll einen 10 Fuß hohen Damm mit rechteckiger Grundfläche aufführen, und das dazu nöthige Material aus einem nahe gelegenen Grundstück abtragen. Wie viel Quadratruthen dieses Grundstückes müssen angekauft werden, wenn nur $2\frac{1}{4}$ Fuß tief die Erde abgetragen werden darf und die

Digitized by Google

größere Basis des Dammes 200 Ruthen lang, 14 Fuß breit und die kleinere 185 Ruthen lang, 8 Fuß breit werden soll?

297) Welchen Kubikinhalt hat eine abgekürzte Pyramide, wenn die Seiten der quadratischen Grundflächen 4′ und $2^1/_2$′ lang sind und jede der schiefen Kanten 6′ mißt?

298) Wie viel Maas faßt ein Behälter, der die Form einer abgekürzten regulären vierseitigen Pyramide von 3 Fuß Tiefe hat, wenn die Diagonalen der beiden Quadrate 15 Fuß und 12 Fuß lang sind? (18 Maas = 1 c′.)

299) Welchen Kubikinhalt hat ein Obelisk, der aus einem würfelförmigen Fuß von $6^1/_2$ Fuß Seite, einer abgekürzten quadratischen Pyramide, deren Seitenkanten 48 Fuß und deren Basisseiten 5 Fuß und $4^1/_2$ Fuß lang sind und aus einer darauf sitzenden Pyramide von $1^1/_4$ Fuß Höhe besteht?

300) Welchen allgemeinen Ausdruck erhält man für den Kubikinhalt einer abgekürzten regelmäßigen dreiseitigen Pyramide, wenn man deren Höhe mit h und die Seiten der beiden Dreiecke mit S und s bezeichnet?

301) Die Inhalte der beiden Grundflächen einer abgekürzten Pyramide von 548 c′ Inhalt betragen 64 □′ und $56^1/_4$ □′; wie hoch ist dieselbe?

302) Der Kubikinhalt einer abgekürzten regelmäßigen vierseitigen Pyramide beträgt 21,546 c′, die Seiten der Grundflächen sind 2,7′ und 1,8′; welche Höhe hat der Körper?

303) Die Seite der größern Grundfläche einer abgekürzten quadratischen Pyramide ist = S, die der kleinern = s, und die Höhe des Körpers = h; in welcher Entfernung von der größern Grundfläche wird eine zu dieser parallel durchgelegte Ebene den Körper halbiren?

304) Es sei in vorhergehender Aufgabe S = 12′, s = 8′ und h = 18′; man soll dieselbe lösen: a) unmittelbar, b) als Anwendung des für Aufg. 303 gefundenen Ausdrucks.

305) Man hat durch die Mitte der Höhe einer Pyramide eine zur Grundfläche parallele Ebene gelegt und so eine abgekürzte Pyramide erhalten, deren Inhalt um 1,645 c′ kleiner ist, als der der vollständigen; wie groß war der Inhalt der erstern?

Digitized by Google

†306) Eine abgekürzte regelmäßige vierseitige Pyramide von 15,6′ Höhe hat einen Kubikinhalt = 353,392$^{c'}$; wie groß ist die Seite der größern Basis, wenn die der kleinern 3,4′ mißt?

†307) Bezeichnet in Aufg. 306 die Höhe mit h, den Kubikinhalt mit k und die gegebene Seite mit S und leitet für die Seite der andern Basis einen allgemeinen Ausdruck her!

†308) Welchen allgemeinen Ausdruck erhält man überhaupt für den Inhalt der größern Grundfläche einer abgekürzten Pyramide, wenn man den Inhalt der kleinern mit g, die Höhe mit h und den Kubikinhalt des Körpers mit k bezeichnet?

†309) Leitet einen Ausdruck für den Inhalt der kleinern Basis einer abgekürzten Pyramide her, wenn der Kubikinhalt mit k, die Höhe mit h und der Inhalt der größern Basis mit G bezeichnet werden!

†310) Der Kubikinhalt einer abgekürzten Pyramide von 12′ Höhe beträgt 916$^{c'}$, der Inhalt der einen Grundfläche ist = 25 □′; wie groß ist die andere Basis?

†311) Eine abgekürzte regelmäßige dreiseitige Pyramide, von welcher die Seite der untern Grundfläche um 2′ größer ist als die der obern, hat einen Kubikinhalt von 42,434$^{c'}$ und eine Höhe = 6′; wie groß sind die Seiten der beiden Dreiecke?

312) Die Grundflächen einer abgekürzten Pyramide, deren Höhe = h ist, sind G und g; man soll parallel mit diesen ein an der größern Basis liegendes Stück abschneiden, das $\frac{n}{m}$ des ganzen Körpers ist. In welcher Entfernung von der größern Grundfläche muß die Ebene durchgelegt werden und wie groß wird der Inhalt der Durchschnittsfläche?

313) Es sei in vorhergehender Aufgabe G = 6,25 □′, g = 4 □′, h = 4′, n = 2 und m = 5; man soll dieselbe für diesen Fall lösen.

d) Ueber das Gewicht.

314) Ein eisernes Gewicht hat die Form einer abgekürzten regelmäßigen sechsseitigen Pyramide; wie schwer ist dasselbe, wenn die Seite der größern Basis = 8″, die der kleinern = 6″ und die Höhe = 5″ ist? (sp. Gew. = 7,2.)

Digitized by Google

315) Ein Körper von Eisen hat die Gestalt einer abgekürzten regelmäßigen sechsseitigen Pyramide. Die Seite der untern Grundfläche mißt 1,4′, die der obern 0,8′ und jede der schiefen Seitenkanten ist 2,5′ lang; wie groß ist das Gewicht dieses Körpers, das sp. Gew. zu 7,2 gerechnet?

316) Eine abgekürzte regelmäßige Pyramide mit quadratischer Basis wiegt 153,9 ℔; wie groß ist die Seite der größern Grundfläche, wenn die der kleinern = 0,4′ und die Höhe der Pyramide = 1,5′ gemessen wurden und das sp. Gew. der Masse 7,5 beträgt?

317) Das Gewicht einer abgekürzten quadratischen Pyramide beträgt 170,28 ℔, die Höhe des Körpers mißt 1,2′ und die Seiten der Grundflächen sind 0,8′ und 0,5′ lang; wie groß ist dessen sp. Gewicht, wenn 1c′ Wasser 66 ℔ wiegt?

°318) Die Höhe einer abgekürzten regulären vierseitigen Pyramide ist um 3′ größer als die Seite der größern und um 4′ größer als die der kleinern Grundfläche; wie groß sind diese Stücke, wenn das Gewicht des Körpers bei einem sp. Gewicht von 2,8 gleich 5745,6 ℔ ist?

319) Von zwei ähnlichen abgekürzten Pyramiden, die 5832 ℔ und 729 ℔ wiegen, ist die eine um 4,6′ höher als die andere; wie hoch ist jede?

§ 6. Aufgaben über die Berechnung des regulären Tetraeders.

a) Ueber die Oberfläche.

320) Die Kante eines regulären Tetraeders ist 2,5′ lang; wie groß ist dessen Oberfläche?

321) Welchen allgemeinen Ausdruck erhält man für die Oberfläche eines regulären Tetraeders, wenn man die Kantenlänge desselben mit s bezeichnet?

322) Die Oberfläche eines regelmäßigen Tetraeders beträgt 3,897 □′; wie groß ist eine Kante desselben?

323) Leitet einen allgemeinen Ausdruck für die Oberfläche eines regulären Tetraeders her, dessen Höhe = h ist!

324) Ein regelmäßiges Tetraeder ist $4\frac{3}{4}$′ hoch; man soll

Digitized by Google

die Oberfläche desselben a) unmittelbar, b) nach der für Aufg. 323 erhaltenen Formel bestimmen.

325) Die Kante eines regulären Tetraeders ist um 1,4′ größer als dessen Höhe; wie groß ist a) die Kante, b) die Oberfläche dieses Körpers?

326) Zwei Netze zweier Tetraeder, deren Seiten um 1,8′ differiren, haben zusammen einen Inhalt von 17,32 □′; wie groß sind Seite und Oberfläche dieser Tetraeder?

b) Ueber den Kubikinhalt und das Gewicht.

327) Bezeichnet man die Kante eines regelmäßigen Tetraeders mit s, so ist der Kubikinhalt $= \frac{s^3}{12}\sqrt{2}$. Leitet diese Formel her!

328) Die Kante eines regulären Tetraeders ist 3,6′ lang; man soll dessen Kubikinhalt a) unmittelbar, b) unter Anwendung der für 327 gegebenen Formel bestimmen.

329) Man soll die Oberfläche eines regulären Tetraeders berechnen, dessen Kubikinhalt 7,5424 c′ beträgt.

330) Die Höhe eines regulären Tetraeders beträgt 5,6′; wie groß ist dessen Kubikinhalt?

331) Bezeichnet man die Höhe eines regulären Tetraeders mit h, so erhält man welchen allgemeinen Ausdruck für dessen Kubikinhalt?

332) Die Summe der Höhe und Kante eines regelmäßigen Tetraeders beträgt 24′; wie groß ist a) die Kante, b) der Kubikinhalt?

†333) Die Summe der Inhalte zweier regulärer Tetraeder ist = 4,12475 c′, die Summe zweier Kanten = 5′; wie groß ist die Kante eines jeden?

334) Ein reguläres Tetraeder von Marmor (sp. Gew. = 2,8) wiegt 3848,8 ℔; wie lang ist eine Kante desselben?

°335) Zwei reguläre Tetraeder wiegen zusammen 144 1/3 ℔, ihre Kanten differiren um 0,6′; wie groß sind diese, wenn das sp. Gew. = 3 ist?

Digitized by Google

§ 7. Aufgaben über die Berechnung des regulären Oktaeders.

a) Ueber die Oberfläche.

336) Wie groß ist die Oberfläche eines regulären Oktaeders, dessen Kante 1,6′ lang ist?

337) Die Kante eines regulären Oktaeders sei = s; welchen Ausdruck erhält man für dessen Oberfläche?

338) Die Oberfläche eines regelmäßigen Oktaeders beträgt 21,65 □′; wie groß ist die Kante desselben?

339) Die Entfernung zweier einander diametral gegenüberliegender Eckpunkte eines regulären Oktaeders beträgt 6 Fuß; wie groß ist dessen Oberfläche?

b) Ueber den Kubikinhalt.

340) Wie groß ist der Kubikinhalt eines regulären Oktaeders, dessen Kante 1,5′ lang ist?

341) Bezeichnet man die Länge der Kante eines regelmäßigen Oktaeders mit s, so erhält man welchen allgemeinen Ausdruck für den Kubikinhalt desselben?

342) Wie groß ist die Kante eines regulären Oktaeders von 12,728 °′ Inhalt?

343) Die Kante eines regulären Oktaeders ist 0,6′ lang; wie groß ist die Kante eines andern von 12fachem Inhalt?

344) Macht man die Kante eines regelmäßigen Oktaeders um einen Fuß größer, so wird der Kubikinhalt um 17,442 °′ größer; wie groß ist die Kante und der Inhalt im ersten Falle?

§. 8. Aufgaben über die Berechnung des regulären Dodekaeders.

345) Bezeichnet man die Kante eines Dodekaeders mit s, so wird a) dessen Oberfläche $= 15s^2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$ und b) dessen Kubikinhalt $= \frac{s^3}{4}(15 + 7\sqrt{5})$. Leitet diese Ausdrücke her!

346) Man soll die Oberfläche und den Kubikinhalt eines regulären Dodekaeders von 5″ langer Kante berechnen.

Digitized by Google

347) Berechnet die Kante und den Inhalt eines regulären Dodekaeders von 516□′ Oberfläche!

348) Man soll die Kante und die Oberfläche eines regulären Dodekaeders berechnen, dessen Kubikinhalt 13,241$^{c'}$ beträgt.

§ 9. Aufgaben über die Berechnung des regulären Ikosaeders.

349) Die Kante eines regulären Ikosaeders ist 4,6′ lang; wie groß ist die Oberfläche desselben?

350) Die Oberfläche eines regelmäßigen Ikosaeders zu bestimmen, dessen Kantenlänge = s ist.

351) Wie groß ist die Kante eines regulären Ikosaeders von 19,49□′ Oberfläche?

352) Bezeichnet man die Kante eines regulären Ikosaeders mit s, so wird der Kubikinhalt $= \frac{5s^3}{12}(3 + \sqrt{5})$. Leitet diesen Ausdruck her!

353) Der Kubikinhalt eines regelmäßigen Ikosaeders beträgt 471,24$^{c'}$; wie groß ist dessen Kante?

354) Die Summe der Oberflächen zweier regulären Ikosaeder ist = 47,3□′, die Summe ihrer Kubikinhalte = 19,635$^{c'}$; wie groß sind die Kanten dieser Körper?

§ 10. Aufgaben über das schief abgeschnittene dreiseitige Prisma.

355) Bezeichnet man die drei parallelen Kanten eines schief abgeschnittenen dreiseitigen Prisma mit k, k′, k″, und den Inhalt des Durchschnittsdreiecks, welches durch eine zu diesen Kanten senkrechte Ebene gebildet wird, mit d, so ist der Kubikinhalt des Prisma $= d\left(\frac{k + k' + k''}{3}\right)$. Leitet diesen Ausdruck her!

356) Die drei parallelen Kanten eines schief abgeschnittenen dreiseitigen Prisma sind 5′, 7′ und 3,9′ lang; der Inhalt des senkrechten Durchschnittsdreiecks beträgt 16□′; wie groß ist der Kubikinhalt des Körpers?

357) Legt man durch die drei parallelen Kanten eines schief abgeschnittenen dreiseitigen Prisma, welche 12,4′, 15,6′ und 11′

Digitized by Google

lang sind, eine zu diesen senkrechte Ebene, so ist der Durchschnitt ein gleichseitiges Dreieck von 7,2′ Umfang; wie groß ist der Kubikinhalt des Prisma?

358) Die drei parallelen Kanten eines schief abgeschnittenen dreiseitigen Prisma sind $65\frac{3}{4}'$, 58′ und $60\frac{1}{4}'$ lang; die drei Seiten des senkrechten Durchschnittsdreiecks betragen $25\frac{1}{2}'$, $42\frac{1}{2}$ und 34′. Wie groß ist der Kubikinhalt des Körpers?

359) Wie groß ist der Inhalt des senkrechten Durchschnittsdreiecks eines schief abgeschnittenen dreiseitigen Prisma von $28\frac{13}{16}$ c′ Inhalt, wenn dessen parallele Seitenkanten $8\frac{3}{4}'$, $7\frac{4}{5}'$ und $6\frac{1}{2}'$ lang sind?

360) Der Kubikinhalt eines schief abgeschnittenen dreiseitigen Prisma beträgt 100,8 c′, der Inhalt des senkrechten Durchschnittsdreiecks ist = 8,4 □′ und die drei parallelen Kanten verhalten sich wie 7 : 9 : 14; wie groß sind diese?

361) Eine der drei parallelen Kanten eines schief abgeschnittenen dreiseitigen Prisma ist um 6″ und die zweite um 1′ 2″ größer als die dritte; die drei Seiten des senkrechten Durchschnittsdreiecks sind $3\frac{3}{4}'$, $2\frac{1}{4}'$ und 3′ lang, und der Kubikinhalt des Prisma beträgt 18,9 c′. Wie groß sind die drei parallelen Kanten?

Abschnitt III.

Aufgaben über die Berechnung der runden Körper.

§ 11. Aufgaben über die Berechnung des Cylinders.

A. Berechnung des vollen Cylinders.

a) Ueber die Oberfläche.

362) Der Umfang eines Cylinders beträgt 5,42′ und die Höhe 8,4′; wie groß ist die krumme Oberfläche (der Mantel)?

363) Wie groß ist der Mantel und die ganze Oberfläche eines Cylinders von 18′ Höhe und 2,5′ Durchmesser?*)

*) Wenn nicht ausdrücklich für π in der Aufgabe ein bestimmter Werth angegeben ist, so hat man dafür immer 3,14 in Rechnung zu bringen.

Digitized by Google

364) Eine walzenförmige Säule hat eine Höhe von 22′ und einen Halbmesser von $1^4/_5$′; wie groß ist die krumme Oberfläche derselben?

365) Wie groß ist der Mantel und die ganze Oberfläche eines Cylinders von $8^1/_2$′ Höhe, wenn der Halbmesser der Basis $1^3/_4$′ lang ist? $\left(\text{für } \pi = \frac{22}{7}\right)$.

366) Der Umfang einer cylinderförmigen Säule von 18′ Höhe beträgt 7,85′; was kostet der Anstrich des Mantels, wenn der Quadratfuß mit 2 kr. bezahlt wird, und wie groß ist die ganze Oberfläche der Säule?

367) Man soll verschiedene cylinderförmige Abflußröhren von $6^1/_2$″ Durchmesser verfertigen; wie viel Quadratfuß Blech sind dazu erforderlich, wenn die Röhren zusammen eine Länge von 185′ erhalten sollen?

368) Um wie viel ist die ganze Oberfläche eines Cylinders größer als die des größtmöglichen daraus zu verfertigenden quadratischen Parallelepipeds, wenn der Durchmesser des Cylinders = 2,8′ und die Höhe = 24′ ist? $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

369) Der Inhalt des Mantels eines Cylinders von $2^1/_2$′ Dicke beträgt 196,35 □′; welche Höhe hat der Körper? ($\pi = 3{,}1416$).

370) Der Mantel eines Cylinders von $12^1/_2$′ Höhe hat $82^1/_2$ □′ Inhalt; welchen Durchmesser hat der Körper? $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

†371) Wie groß ist der Durchmesser eines Cylinders von 14′ Höhe, wenn die ganze Oberfläche $119^{57}/_{80}$ □′ beträgt?

372) Der Umfang eines Cylinders, dessen Oberfläche $117^3/_4$ □′ mißt, ist gleich der Höhe desselben, wie groß ist der Durchmesser?

373) Die Länge einer Walze von 127,6275 □′ Oberfläche ist sechsmal so groß als der Durchmesser; wie groß sind diese Dimensionen? ($\pi = 3{,}1416$).

†374) Die Höhe eines Cylinders übertrifft dessen Umfang um 20,44′ Fuß; wie groß sind beide, wenn die ganze Oberfläche 439,6 □′ beträgt?

Digitized by Google

†375) Die Oberfläche eines Cylinders beträgt 39,25 □′; wird aber der Durchmesser um 4″ und die Höhe um 5′ größer angenommen, so beträgt die Oberfläche gerade das Doppelte. Welches waren im ersten Falle die Dimensionen des Cylinders?

376) Die Oberflächen zweier ähnlichen Cylinder sind 17,64 □′ und 30,25 □′, der Umfang des einen beträgt 8,4′; wie groß ist der des andern?

377) Zur Verfertigung zweier ähnlichen cylinderförmigen Gefäße brauchte man 24 □′ Blech; wie viel Blech war zu jedem Gefäße erforderlich, wenn diese 2,5′ und 1,4′ hoch sind?

378) Man soll aus $20^1/_4$ □′ und $12^1/_4$ □′ Blech zwei ähnliche cylinderförmige Behälter ohne Deckel verfertigen, deren Höhen um 1 Fuß differiren; wie weit und hoch wird jedes dieser Gefäße?

b) Ueber den Kubikinhalt.

379) Der Inhalt der Basis eines Cylinders von 18′ Höhe beträgt 9 □′; wie groß ist sein Kubikinhalt?

380) Wie groß ist der Kubikinhalt eines 12′ hohen Cylinders, dessen Halbmesser $1^1/_2$′ lang ist?

381) Der Halbmesser eines Cylinders ist $2^1/_2$′ lang, die Höhe beträgt $12^4/_5$′; wie groß ist die Gesammtoberfläche und der Kubikinhalt?

382) Der Umfang einer 48′ hohen Säule beträgt 14,13′; wie groß ist der Kubikinhalt derselben?

383) Der Umfang eines Cylinders beträgt 26,69′, die Höhe desselben 15,4′; wie groß ist der Kubikinhalt des Körpers?

384) Man soll aus einem quadratischen Parallelepiped, dessen Grundfläche 2,4 Fuß Seite hat und das 35′ hoch ist, den größtmöglichen Cylinder verfertigen; wie viel fällt ab? $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

385) Wie groß war der Kubikinhalt der Erdmasse, welche beim Bohren eines artesischen Brunnens von 580′ Tiefe und 1,4′ Weite herausgeschafft wurde? $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

386) Welchen allgemeinen Ausdruck erhält man für den Kubikinhalt eines Cylinders, wenn man dessen Umfang mit P und dessen Höhe mit h bezeichnet?

Digitized by Google

387) Was kostet ein runder, überall gleich dicker Baumstamm von $24^1/_2'$ Länge, wenn der Halbmesser $1^3/_4'$ beträgt und der Kubikfuß mit 12 kr. bezahlt wird? $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

388) Aus einem runden, überall $1^4/_5'$ dicken Stamm von 26′ Länge soll ein Balken mit rechteckigem Querschnitt geschlagen werden, dessen eine Seite 10″ lang wird; wie groß ist der Holzabfall?

389) Ein überall gleich dicker Baumstamm hat einen Umfang von 8,4′ und eine Länge von 35′; was kostet derselbe, wenn der Kubikfuß zu 12 kr. berechnet wird?

390) Wie viel bad. Maas faßt ein cylinderförmiges Gefäß von 1,8′ Weite und 3′ Höhe? ($1^{c'} = 18$ Maas.)

391) Ein parallelepipedischer Trog von 8′ Länge, $3^1/_2'$ Breite und 4′ Tiefe (im Lichten) ist mit Wasser gefüllt; wie viel Mal muß man mit einem cylinderförmigen Gefäße von $^3/_5'$ Durchmesser und $1^1/_2'$ Tiefe schöpfen, um denselben zu entleeren, wenn das Gefäß immer gefüllt wird?

392) Für einen cylinderförmigen Baumstamm von 36′ Länge und 4′ Dicke wurden 150 fl. 42 kr. bezahlt; wie theuer kam ein Kubikfuß?

393) Wie viel badische Maas Wasser liefert eine Feuerspritze, die zwei Stiefel hat, deren jeder im Lichten 4″ weit ist, in 30 Minuten unausgesetzter Thätigkeit, wenn die Hubhöhe des Kolbens in jedem Stiefel 8″ beträgt und der Kolben in jeder Minute 25mal auf und ab geht?

394) Der Inhalt eines Cylinders beträgt $942^{c'}$, sein Halbmesser ist $3^3/_4'$ lang; wie hoch ist derselbe?

395) Wie groß ist der Durchmesser und der Umfang eines 32′ langen cylinderförmigen Baumstammes, dessen Kubikinhalt $353^1/_4{}^{c'}$ beträgt? $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

396) Wie groß ist der Durchmesser und der Umfang eines 14,8′ hohen Cylinders, wenn dessen Kubikinhalt $540{,}2^{c'}$ beträgt?

397) In ein cylinderförmiges Gefäß von 9″ Weite wird mit einem andern von 3″ Weite und 8″ Höhe Wasser geschöpft; bis zu welcher Höhe wird ersteres gefüllt sein, nachdem man 6mal geschöpft hatte?

Digitized by Google

398) Ein cylinderförmiger Becher, welcher eine bad. Maas fassen und 1,4′ hoch werden soll, muß welche Weite haben?

399) Wie viel Quadratfuß Blech sind zur Verfertigung einer cylinderförmigen Kanne erforderlich, welche 10 bad. Maas fassen und $2^1/_2$′ hoch werden soll?

400) Es soll ein Sester verfertigt werden, welches 1 Fuß Durchmesser hat; wie hoch muß man dasselbe machen? (1 Sest. = 10 Meßl., 18 Meßl. = 1c′).

401) Ein oben offenes Gefäß von Blech soll 2 bad. Maas fassen und 6″ hoch werden; wie groß wird der Bodenhalbmesser und wie viel Blech ist zur Verfertigung erforderlich?

402) In ein Gefäß, welches die Form eines Cylinders hat und $1^2/_5$′ weit ist, werden 27 bad. Maas Wasser gegossen; wie hoch ist der Wasserspiegel über dem Boden?

403) In einem Gefäß, das 5″ Weite hat, befinden sich $4^1/_2$ Maas Wasser; wie weit ist der Wasserspiegel vom Boden entfernt, nachdem man in dasselbe einen eisernen Würfel von 2c″ Inhalt gelegt hat?

404) Der Inhalt des Mantels eines Cylinders sei = M, die Höhe = h; welchen Ausdruck erhält man für den Kubikinhalt?

405) Wenn man die Oberfläche eines Cylinders mit O, und dessen Durchmesser mit d bezeichnet, so erhält man welche Formel für den Kubikinhalt?

406) Der Radius eines Cylinders von gleicher Höhe und Dicke sei = r; welche Ausdrücke erhält man für die Oberfläche und den Kubikinhalt desselben?

407) Wie groß war der Umfang eines Baumstammes von 28′ Länge, wenn daraus ein gleich langer parallelepipedischer Balken gehauen wurde von 1′ 2″ hoher und 9″ schmaler Kante, welche zugleich Sehnen des runden Querschnitts bildeten; wie viel betrug ferner der Holzabfall? $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

408) Ein cylinderförmiges Gefäß soll 14 bad. Maas Wasser fassen und dessen Durchmesser sich zur Höhe verhalten wie 3 : 7; wie groß werden beide?

Digitized by Google

409) Den Kubikinhalt eines Cylinders von gleicher Dicke und Höhe in der Oberfläche O desselben auszudrücken.

410) Man soll den Kubikinhalt eines Cylinders im Umfange P und der Oberfläche O desselben ausdrücken.

°**411)** Wie groß ist der Durchmesser und die Höhe eines Cylinders, dessen Kubikinhalt = 25,12 c′ und dessen Oberfläche = 56,52 □′ beträgt?

412) Der Kubikinhalt eines Cylinders sei = K, die Höhe = h; wie groß ist seine Oberfläche?

413) Der Inhalt des Mantels eines Cylinders sei = M, der Kubikinhalt = K; welche Ausdrücke erhält man für den Durchmesser und die Höhe desselben?

414) Der Kubikinhalt eines gleichseitigen Cylinders sei = K; welche Ausdrücke erhält man für den Durchmesser oder die Höhe und die Oberfläche?

415) Aus 18,84 □′ Blech soll ein cylinderförmiges Gefäß mit Deckel gefertigt werden, dessen Tiefe gleich der Weite ist; wie viel Maas faßt dasselbe? (18 Maas = 1 c′).

†**416)** Die Höhe eines Cylinders von 69,08 □′ Oberfläche mißt 10′; wie groß ist der Kubikinhalt desselben?

†**417)** Die Oberfläche eines Cylinders, dessen Höhe = h ist, sei = O; welche Formeln erhält man für den Durchmesser und den Kubikinhalt des Körpers?

°**418)** Die Höhe eines Cylinders von $103\frac{1}{8}$ c′ Inhalt übertrifft den Umfang um $13\frac{1}{7}$′ an Länge; wie groß ist der Durchmesser und die Höhe? $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

419) Zwei ähnliche cylinderförmige Gefäße fassen zusammen 4 c′ Wasser, das eine ist 1,2′, das andere 1,5′ hoch; wie viel Kubikfuß faßt jedes dieser Gefäße?

420) Zwei ähnliche Gefäße fassen 729 c″ und 1,728 c′ Wasser, das eine ist um 5″ tiefer als das andere; wie tief ist jedes derselben?

c) Ueber das Gewicht.

421) Eine Marmorsäule hat einen Umfang von 7,536′ und eine Höhe von 16′; wie groß ist das Gewicht derselben? (Sp. Gew. = 3).

Digitized by Google

422) Welches Gewicht hat ein Mühlstein von 4′ Durchmesser, wenn seine Höhe $9\frac{1}{2}$″ beträgt? (sp. Gew. = 2,8).

423) Es soll ein eisernes Gewicht von der Form eines Cylinders gegossen werden, welches 100 ℔ wiegt; wie hoch wird dasselbe gemacht werden müssen, wenn der Durchmesser 6″ betragen soll? (sp. Gew. = 7,2).

424) Es sollen runde Eisenstäbe geschmiedet werden, von welchen jeder laufende Fuß $\frac{1}{2}$ ℔ wiegt; wie dick müssen diese gemacht werden? (sp. Gew. = 7,8).

425) Ein bleierner Cylinder von 2,8′ Länge wiegt 3 Ctr.; wie dick ist derselbe? (sp. Gew. = 11,3).

426) Um die innere Weite einer Glasröhre zu messen, hat man in dieselbe $\frac{1}{2}$ Loth Queckſilber gebracht und gefunden, daß dieses darin einen 6″ 5‴ langen Cylinder bildete; wie groß war der innere Durchmesser der Röhre? (sp. Gew. = 13,6).

427) Man soll aus 15 Ctr. Eisen 3 Walzen gießen, von welchen jede $3\frac{1}{2}$′ lang wird; deren Gewichte sich aber wie 2 : $2\frac{1}{2}$: 3 verhalten; wie groß müssen die Durchmesser gemacht werden? $\left(\text{sp. Gew.} = 7{,}2;\ \pi = \frac{22}{7}\right)$.

428) Es soll eine kupferne Walze gegossen werden, die 20 Ctr. wiegt und deren Länge das 5fache des Durchmessers beträgt; wie groß muß man letztern machen? (sp. Gew. = 8,8).

429) In einem Gefäß von 8″ Weite befindet sich Wasser. In dasselbe wurde ein Würfel von Kupfer gelegt, der genau 30,4 ℔ wog; um wie viel ist hierdurch das Wasser im Gefäß gestiegen? (sp. Gew. = 8,8).

°430) Eine gußeiserne Walze, deren Oberfläche 17,27 □′ beträgt, wiegt 1526 ℔; wie lang und dick ist dieselbe? (sp. Gew. = 7,2).

431) In einem cylinderförmigen Gefäß von 6″ Weite befindet sich Wasser. Man brachte unter dieses einen Cylinder von Kupfer, der gleiche Dicke und Höhe hatte, wodurch das Wasser um 4″ stieg; wie groß waren die Dimensionen und das Gewicht dieses Cylinders?

432) Zwei kupferne Walzen von gleicher Form wiegen zu-

Digitized by Google

sammen 4000 ℔, ihre Durchmesser messen 4″ und $5\frac{1}{2}$″; wie lang ist jede dieser Walzen? $\left(\text{sp. Gew.} = 8{,}8;\ \pi = \frac{22}{7}\right)$.

433) Zwei ähnliche gußeiserne Walzen, deren sp. Gew. = 7,2 ist, wiegen 10 Ctr. und $33\frac{3}{4}$ Ctr., die eine ist um 1 Fuß länger als die andere, wie lang und dick ist jede derselben?

B. Berechnung des hohlen Cylinders.

434) Wie groß ist der Kubikinhalt eines hohlen Cylinders von 18′ Höhe, wenn der äußere Durchmesser = 12″ und die Weite im Lichten = 6″ ist?

435) Eine Brunnenleitung, aus bleiernen Röhren bestehend, hat eine Länge von 4564 Fuß. Der äußere Durchmesser der Röhren beträgt $2\frac{1}{2}$ Zoll und die Weite der Oeffnung 2″ 2‴; wie theuer kommt diese Leitung zu stehen, wenn das Pfund Blei zu 10 Kreuzer berechnet wird? (sp. Gew. = 11,4).

436) Wie groß ist der Kubikinhalt einer 12 Fuß langen eisernen Röhre, wenn deren Umfang 3′ 1″ 4‴ beträgt und die Eisendicke $2\frac{1}{2}$″ mißt?

437) Die Bleidicke einer Röhrenleitung von 188 Ctr. 18 ℔ Gewicht beträgt 2‴, die Weite der Oeffnung ist = 1,6″; wie lang ist die Leitung? $\left(\text{sp. Gew.} = 11;\ \pi = \frac{22}{7}\right)$.

438) Der Kubikinhalt eines hohlen Cylinders ist = K, seine Länge = L, der größere Halbmesser = R; wie groß ist der Radius des hohlen Raumes?

C. Berechnung des schief abgeschnittenen Cylinders.

439) Die größte Höhe eines senkrechten schief abgeschnittenen Cylinders ist = H, die kleinste = h, der Durchmesser = d; wie groß ist a) die Mantelfläche; b) der Kubikinhalt?

440) Die größte Seite eines senkrechten schief abgeschnittenen Cylinders mißt 18′ 6″, die kleinste 14′ 8″, der Durchmesser ist 2′ 8″ lang; wie groß ist der Mantel und der Kubikinhalt? $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$.

Digitized by Google

441) Ein senkrechter Cylinder wird unter einem Winkel von 45^0 zur Axe geschnitten, so daß die Schnittfläche in einer Höhe von 8′ die Axe trifft; wie groß wird der Kubikinhalt des größern Cylindertheils, wenn der Durchmesser 2′ beträgt?

442) Ein senkrechter Cylinder ist 8′ hoch und 1′ dick. Davon wird schief gegen die Grundfläche ein Stück abgeschnitten, dessen größte Seite gleich der Höhe des Cylinders bleibt, dessen kleinste Seite aber um 8″ kleiner ist als jene; wie groß sind die Inhalte beider Theile?

443) Ein 8″ dicker senkrechter Cylinder wird unter einem Winkel von 30^0 zur Basis geschnitten; die kürzeste Seite wird hierdurch $4^1/_2$′ lang; wie groß ist der Inhalt dieses Cylindertheils?

444) Welchen Durchmesser hat ein schief abgeschnittener Cylinder von $2{,}772^{c}$′ Inhalt, wenn die größte Seite 8′ und die kleinste 6,4′ lang ist? $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$.

§ 12. Aufgaben über die Berechnung des Kegels.

A. Berechnung des vollständigen Kegels.

a) Ueber die Oberfläche.

445) Der Umfang der Grundfläche eines Kegels ist $= 15^5/_8$′, die Seite mißt $12^2/_5$′; wie groß ist der Inhalt seines Mantels?

446) Der Halbmesser der Grundfläche eines Kegels sei $= r$, dessen Seite $= s$; welchen Ausdruck erhält man für die Oberfläche desselben?

447) Der Halbmesser der Basis eines Kegels beträgt 3″ 4‴, die Seite ist 1′ 4″ lang; wie groß ist der Inhalt der krummen und der ganzen Oberfläche?

448) Wie groß ist die Oberfläche eines Kegels, wenn der Radius der Grundfläche $2^1/_2$ Fuß mißt und die Seite 8,6′ lang ist?

449) Der Umfang der Grundfläche eines Kegels mißt 12,56′, die Seite ist 7,5′ lang; wie groß ist dessen Oberfläche?

450) Der Durchmesser der Basis eines Kegels ist $10^1/_2$ Fuß

Digitized by Google

lang, eine Seite mißt 18 Fuß; wie groß ist die Oberfläche? $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$.

451) Die Seite eines gleichseitigen Kegels sei = s; wie groß ist dessen Oberfläche?

452) Man soll den Inhalt des Mantels und die ganze Oberfläche eines 16 Fuß hohen Kegels berechnen, wenn der Durchmesser der Grundfläche 6′ lang ist.

453) In ein Rechteck von der Länge = a und der Breite = b ist über diese das größtmögliche gleichschenklige Dreieck gezeichnet. Wenn man nun beide Flächen um die Höhe des gleichschenkligen Dreiecks bis in ihre anfängliche Lage dreht, so wird ein Cylinder und ein Kegel erzeugt; wie verhalten sich deren Oberflächen?

454) Leitet eine Formel für die Oberfläche eines Kegels her, wenn der Halbmesser der Basis = r und die Höhe des Kegels = h ist?

455) Der Umfang der Basis eines Kegels von 8,4′ Höhe beträgt 7,854′; wie groß ist dessen Oberfläche? ($\pi = 3{,}1416$).

456) Die Oberfläche eines Kegels in der Grundfläche g und der Höhe h auszudrücken.

457) Die Höhe eines Kegels ist = h, die Seite = s; wie groß ist dessen Oberfläche?

458) Der Umfang der Grundfläche eines Kegels mißt 13,2′, der Inhalt des Mantels beträgt 99 □′; wie groß ist a) die Seite, b) die Höhe des Kegels? $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$.

459) Der Inhalt des Mantels eines Kegels beträgt 427,04 □′, die Seite 17′; wie groß ist a) der Durchmesser der Basis, b) die Höhe?

†460) Die Mantelfläche eines Kegels von 7,5′ Höhe hat 106,76 □′ Inhalt; wie groß ist a) die Seite, b) der Durchmesser der Grundfläche?

†461) Die Oberfläche eines Kegels sei = O, die Seite = s; welchen Ausdruck erhält man a) für den Durchmesser der Grundfläche, b) für die Höhe des Kegels?

Digitized by Google

†462) Rechnet den Durchmesser der Basis und die Höhe eines Kegels von $4^1/_4'$ langer Seite, wenn die Oberfläche $39^1/_4 \square'$ Inhalt hat a) unmittelbar, b) nach der für Aufg. 461 erhaltenen Formel.

463) Man soll einen Ausdruck für den Radius der Grundfläche eines Kegels herleiten, dessen Oberfläche $= O$ und Höhe $= h$ ist.

464) Die Oberfläche eines Kegels von $11^1/_4'$ Höhe soll $353^1/_4 \square'$ werden; wie groß muß man den Halbmesser der Grundfläche nehmen?

465) Welchen Durchmesser hat die Basis eines gleichseitigen Kegels, dessen Oberfläche $= O$ ist?

466) Die Oberfläche eines Kegels ist $= O$; wie groß ist dessen Höhe, wenn diese gleich dem Durchmesser der Basis ist?

†467) Die Seite eines Kegels von $58{,}96 \square'$ Oberfläche ist um $9{,}2'$ größer als der Durchmesser der Basis; wie groß ist letzterer und die Höhe des Körpers? $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$.

†468) Der Umfang der Basis eines Kegels wird von der Seite um $7{,}44'$ übertroffen; wie groß ist der Durchmesser der Grundfläche, wenn die Oberfläche $138{,}16 \square'$ beträgt?

†469) Die Oberfläche eines Kegels beträgt $75{,}36 \square'$, die Seite ist um $6'$ größer als der Durchmesser; wie groß sind beide?

°470) Die Summe der Höhe und des Durchmessers eines Kegels beträgt $3{,}8'$, die Oberfläche hat $7{,}04 \square'$ Inhalt; wie groß ist a) die Höhe, b) der Durchmesser der Grundfläche? $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$.

471) Die Oberfläche eines Kegels sei $= O$, der Durchmesser der Basis verhalte sich zur Höhe wie $m : n$; welche Ausdrücke erhält man für diese Dimensionen?

†472) Wird der Durchmesser und die Seite eines Kegels von $13{,}345 \square'$ Oberfläche um 1 Fuß größer genommen, so erhält der neue Kegel eine Oberfläche von $31{,}4 \square'$; wie groß war der Durchmesser und die Seite im ersten Falle? ($\pi = 3{,}14$).

Digitized by Google

b) Ueber den Kubikinhalt.

473) Die Grundfläche eines 8′ hohen Kegels hat 6 □′ Inhalt; wie groß ist der Kubikinhalt desselben?

474) Wie groß ist der Kubikinhalt eines 5 Fuß hohen Kegels, wenn der Durchmesser der Grundfläche 3 Fuß lang ist?

475) Der Halbmesser der Grundfläche eines 2′ 4″ hohen Kegels mißt 4″; wie groß ist der Kubikinhalt?

476) Wie groß ist die Oberfläche und der Kubikinhalt eines 6′ hohen Kegels, wenn der Halbmesser der Grundfläche $1\frac{1}{2}$′ lang ist?

477) Ein Haufen Sand hat die Gestalt eines Kegels. Wie viel Kubikfuß enthält derselbe, wenn der Umfang auf dem Boden 47,1′ beträgt und eine Linie vom Umfang nach der Spitze gemessen 25′ lang ist?

478) Ein Cylinder von 2,8′ Dicke ist 7′ hoch; wie viel beträgt der Abfall, wenn man daraus den größtmöglichen Kegel herstellt? $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$.

479) Der Umfang der Grundfläche eines Kegels beträgt 6,28′, die Seite ist 5,4′ lang; wie groß ist der Kubikinhalt?

480) Wie groß ist der Kubikinhalt eines Kegels, wenn der Umfang der Basis 2,512′ beträgt und eine Seite 2′ lang ist?

481) Wie groß ist der Inhalt eines Kegels von 7,5′ langer Seite, wenn der Umfang der Basis 12,56′ mißt?

482) Der Durchmesser der Grundfläche eines Kegels ist 10,5′, die Seite 18′ lang; wie groß ist der Kubikinhalt? $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$.

483) Ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten 1,8′ und 1,35′ lang sind, wurde um die größere Kathete als Axe gedreht; wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Kubikinhalt des hierdurch erzeugten Kegels?

484) Wenn man aber die Drehung in vorhergehender Aufgabe so vornimmt, daß die Hypotenuse zur Axe wird, so entsteht ein Doppelkegel. Bestimmt a) die Oberfläche, b) den Inhalt desselben!

Digitized by Google

485) Welchen Kubikinhalt hat ein Kegel, wenn die in eine Ebene ausgebreitete Mantelfläche desselben einen Sektor von 120^0 und 15″ langem Halbmesser bildet?

486) Der Kubikinhalt eines Kegels beträgt 397,3632$^{c'}$, die Höhe 12′; wie groß ist der Halbmesser der Grundfläche?

487) Der Durchmesser der Grundfläche eines Kegels mißt 6′ 4″, sein Kubikinhalt beträgt 160$^{c'}$ 768$^{c''}$; wie hoch ist der Kegel?

488) Ein kegelförmiger Behälter (Trichter) soll 10 bad. Maas fassen und $1^1/_2$ Fuß tief werden; welche Dimensionen erhält das Netz hierzu? (18 Maas = 1$^{c'}$).

489) Ein kegelförmiger Trichter soll 4 Maas fassen. Wie groß muß die Seite werden, wenn die Weite 8″ betragen soll?

490) Man hat einen Keller von 24′ Tiefe, 27′ Breite und 42,39′ Länge gegraben und die Erde auf einen Haufen geworfen, wodurch ein Kegel entstand, dessen Umfang am Boden 169,56′ betrug; wie hoch war dieser Haufen?

491) Die Oberfläche eines Kegels sei = O, der Halbmesser der Basis = r; welchen Ausdruck erhält man für dessen Kubikinhalt?

492) Der Durchmesser eines Kegels von 439,6 □′ Oberfläche mißt 8′; wie groß ist sein Kubikinhalt?

493) Man soll den Kubikinhalt eines Kegels in dem Inhalt des Mantels = M und der Grundfläche = g ausdrücken.

494) Die Oberfläche eines Kegels sei = O, die Mantelfläche = M; welchen Ausdruck erhält man für den Kubikinhalt dieses Kegels?

495) Die Grundfläche eines rechtwinkligen Kegels hat einen Durchmesser = d; wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Kubikinhalt desselben?

496) Aus einem Stück Blech, das einen Kreisquadranten von 1,4′ Halbmesser bildet, soll ein Trichter verfertigt werden; wie viel bad. Maas wird dieser fassen? $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$.

497) Wie groß ist die Oberfläche und der Kubikinhalt eines Kegels, dessen Seite gleich dem Durchmesser der Basis = a ist?

Digitized by Google

498) Es soll ein kegelförmiger Trichter verfertigt werden, dessen größte Weite gleich der Seite ist und der genau 27 bad. Maas faßt; welche Dimensionen erhält das Netz hierzu?

499) Wie verhalten sich die nach Aufg. 453 erzeugten Körper dem Inhalte nach?

500) Der Durchmesser der Grundfläche eines Kegels ist = d, die Höhe = h; man soll daraus ein rechteckiges Parallelepiped verfertigen, dessen Breite = b und dessen Dicke = a ist. In welcher Entfernung von der Spitze muß die zur Grundfläche parallele Ebene durchgelegt werden, damit die Ecken des Parallelepipeds in den Umfang des Durchschnittskreises fallen, und wie groß ist der Kubikinhalt des abzuschneidenden Kegels?

501) Ein Kegel dessen Grundfläche einen Radius von $2^1/_2{}'$ Länge hat und dessen Seite $6^1/_2{}'$ lang ist, soll parallel zur Basis halbirt werden; wie hoch wird der an letzterer liegende Theil, und wie groß ist der Halbmesser des Schnittkreises?

502) Setzet die Höhe eines Kegels = h, den Radius der Grundfläche = r und leitet für Aufg. 501 allgemeine Ausdrücke her!

503) Man soll durch einen Kegel, dessen Höhe = h ist, eine zur Basis parallele Ebene legen, so daß der an der Spitze liegende Theil $\frac{m}{n}$ des ganzen Kegels wird; in welcher Entfernung von der Spitze muß man die Ebene durchlegen?

504) Man soll den Kubikinhalt eines gleichseitigen Kegels in dessen Oberfläche O ausdrücken.

†505) Die Summe der Inhalte zweier Kegel A und B beträgt $22{,}765\,c'$. Kegel A ist 7′ und B 6′ hoch, der Durchmesser der Basis des erstern ist um 1 Fuß größer als der des andern; wie groß ist der Kubikinhalt eines jeden?

506) Die Durchmesser der Grundflächen zweier ähnlichen Kegel sind 1,5′ und 2′ lang, der Kubikinhalt des erstern beträgt $13{,}5\,c'$; wie groß ist der des andern?

507) Die Inhalte zweier ähnlichen Kegel sind $34\,c'$ und $272\,c'$, die Höhe des erstern mißt 8′; wie groß ist die Höhe des andern?

Digitized by Google

508) Ein gläserner Trichter faßt 24 bad. Maas, derselbe ist zur Hälfte der Höhe gefüllt; wie viel Flüssigkeit befindet sich darin?

509) Zwei ähnliche Kegel verhalten sich dem Inhalte nach wie a : b, die Höhe des erstern ist um d größer als die des andern; wie groß sind diese Höhen?

c) Ueber das Gewicht.

510) Der Halbmesser der Grundfläche eines Kegels mißt 1 Fuß, die Seite desselben ist 2,6′ lang; wie schwer ist derselbe, wenn das spec. Gew. = 3,5 ist und 1$^{c'}$ Wasser 44,3 ℔ wiegt?

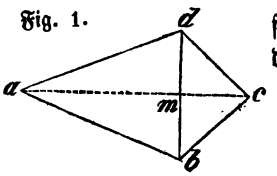
511) Ein eiserner Kegel von 100 ℔ Gewicht hat eine Basis von 0,4′ Halbmesser; wie hoch ist er? (spec. Gew. = 7,2).

512) Ein Kegel von Kupfer wiegt 50 ℔ und ist 0,5′ hoch; wie groß ist der Halbmesser der Basis? (sp. Gew. = 8,78).

513) Ein Kegel dessen Seite gleich dem Durchmesser ist, soll 300 ℔ wiegen, wie groß muß die Seite werden, wenn das spec. Gew. = 3,5 ist?

514) Ein Doppelkegel abcd (Fig. 1), dessen spec. Gew. = 11 ist, wiegt 89,53 ℔, die Entfernung ac ist = 1,6′; wie groß ist der Durchmesser bd?

Fig. 1.



515) Zwei Kegel sollen die gleiche Grundfläche vom Durchmesser d haben und zusammen P ℔ wiegen, ihre Höhen sollen sich verhalten wie m : n, wie groß müssen diese gemacht werden, wenn das spec. Gew. der Masse = p ist und 1$^{c'}$ Wasser w ℔ wiegt?

d) Ueber den schiefen Kegel.

516) Legt man durch die Achse eines schiefen Kegels mit kreisförmiger Basis eine Ebene, so ist der Schnitt ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck, dessen größte Seite 10′ lang ist; wie groß ist der Kubikinhalt dieses Kegels?

Digitized by Google

517) Der Durchmesser der kreisförmigen Basis eines schiefen Kegels ist 4′ lang; die größte Seite desselben mißt 12′ und die kürzeste 10′; wie groß ist sein Kubikinhalt?

518) Die Achse eines schiefen Kegels von 15′ Höhe mißt 17′; wie groß ist der Kubikinhalt desselben, wenn die größte Seite 18′ lang ist? $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$.

B. Berechnung des abgekürzten Kegels.

a) Ueber die Oberfläche.

519) Der Durchmesser der kleinern Grundfläche eines abgekürzten Kegels sei = d, die Seite = s und die Höhe = h; wie groß ist der Durchmesser D der größern Basis?

520) Der Umfang der größern Grundfläche eines abgekürzten Kegels von 10 Fuß Höhe beträgt 100,48 Fuß, die Seite mißt 13 Fuß; wie groß ist der Umfang der kleinern Grundfläche? ($\pi = 3{,}14$).

521) Die Umfänge der zwei Grundflächen eines abgekürzten Kegels seien P und p, die Länge der Seite = s; welchen Ausdruck erhält man für den Inhalt der Mantelfläche?

522) Wie groß ist der Inhalt des Mantels eines abgekürzten Kegels, wenn die Umfänge der beiden Grundflächen $68\frac{3}{4}$ Fuß und $185\frac{1}{2}$ Fuß betragen und die Seite $23\frac{1}{5}$ Fuß lang ist?

523) Die Durchmesser der beiden Grundflächen eines abgekürzten Kegels betragen 5 Fuß und 4 Fuß, die Seite ist 8 Fuß lang; wie groß ist der Inhalt des Mantels und die ganze Oberfläche?

524) Rechnet die Oberfläche eines abgekürzten Kegels von 12 Fuß langer Seite, wenn die Umfänge der zwei Kreise 25,12′ und 15,7′ betragen.

525) Bezeichnet man die Radien der beiden Grundflächen eines abgekürzten Kegels mit R und r, und die Seite mit s, so erhält man welche Formel für die Oberfläche desselben?

526) Die Radien der zwei Begrenzungskreise eines abgekürzten Kegels sind 12,5′ und 6′ lang, die Seite mißt 36′; wie groß ist die Mantel- und die Oberfläche?

Digitized by Google

527) Wie groß ist die Oberfläche eines abgekürzten Kegels von 2,4′ Höhe, wenn die Durchmesser der beiden Grundflächen 6′ und 4′ lang sind?

528) Der Inhalt des Mantels eines abgekürzten Kegels beträgt $1246\frac{1}{2}$□′, die Umfänge der beiden Grundflächen sind $40\frac{1}{2}$′ und $28\frac{3}{4}$′; wie groß ist die Seite des Kegels?

529) Die Radien der Grundflächen eines abgekürzten Kegels sind 1,25′ und 0,6′ lang, die Mantelfläche beträgt 29,045□′; wie groß ist a) die Seite, b) die Höhe des Kegels?

530) Die Oberfläche eines Kegels beträgt 96,712□′, die Durchmesser der Grundflächen sind 6′ und 2′ lang; wie groß ist a) die Seite, b) die Höhe des Kegels?

531) Die Radien der zwei Grundflächen eines abgekürzten Kegels seien R und r, seine Oberfläche = O; man soll eine Formel für die Seite des Kegels herleiten.

532) Suchet die Seite in Aufg. 530 nach der für Aufg. 531 erhaltenen Formel!

533) Man soll den Durchmesser der kleinern Grundfläche in dem der größern = D, der Seite = s und der Oberfläche = O ausdrücken.

†534) Die Oberfläche eines abgekürzten Kegels beträgt 43,96□′, die Mantelfläche 30,615□′ und die Seite mißt 3,9′; wie groß sind die Halbmesser der beiden Grundflächen?

535) Die Mantelfläche eines abgekürzten Kegels hat 44□′, die Radien der beiden Grundflächen differiren um 3′ und die Seite ist 4′ lang; wie groß sind die Radien? $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$.

536) Die Durchmesser der beiden Grundflächen und die Seite eines abgekürzten Kegels verhalten sich zu einander wie 5 : 3 : 4, die Oberfläche beträgt 307,72□′; wie groß sind jene Dimensionen?

†537) Die Oberfläche eines abgekürzten Kegels von 5′ langer Seite beträgt $39\frac{1}{4}$□′, die Summe der Durchmesser der beiden Grundflächen ist = 4′; wie groß ist jeder derselben?

538) Die Radien der beiden Grundflächen und die Höhe eines abgekürzten Kegels von 533,8□′ Oberfläche verhalten sich zu einander wie 2 : 7 : 12; wie groß sind diese Dimensionen?

Digitized by Google

†539) Ein abgekürzter Kegel hat 194,68□′ Oberfläche, die Summe der Radien der Grundflächen beträgt 6′ und die Seite ist um 3′ größer als der Halbmesser der größern Basis; wie groß sind diese Stücke?

b) Ueber den Kubikinhalt.

540) Bezeichnet man die Radien der beiden Grundflächen eines abgekürzten Kegels mit R und r, und dessen Höhe mit h, so ist der Kub. Inh. $= \frac{\pi h}{3}(R^2 + R.r + r^2)$.

Leitet diese Formel her!

541) Die Halbmesser der beiden Grundflächen eines abgekürzten Kegels sind 6′ und 5′, die senkrechte Entfernung derselben beträgt 9′; man soll den Kubikinhalt dieses Kegels a) unmittelbar, b) nach der in Aufg. 540 gegebenen Formel berechnen.

542) Ein 30′ langer Baumstamm ist an dem einen Ende 3′ und an dem andern 2,6′ dick; wie groß ist dessen Kubikinhalt?

543) Man soll den Kubikinhalt eines abgekürzten Kegels von 5,7′ Höhe berechnen, wenn die Halbmesser der beiden Kreise 1,4′ und 0,8′ lang sind.

544) Ein runder Baumstamm hat an dem untern Theile einen Umfang von 12,56′ und an dem obern Ende einen solchen von 9,42′, seine Länge beträgt 33′; wie groß ist der Kubikinhalt, und was kostet dieser Stamm, wenn für den Kubikfuß 24 Kreuzer bezahlt werden?

545) Ein Kessel ist oben 3′ 4″ und am Boden 2′ 8″ weit und 2′ 4″ tief; wie viel Maas Wasser faßt derselbe, wenn 18 Maas einen Kubikfuß geben?

546) Ein kupferner Kessel von 3′ Tiefe hat die Form eines abgekürzten Kegels und ist oben 3,4′ und unten 2,6′ weit; wie viel Kupferblech war dazu erforderlich (den Deckel nicht mitgerechnet), und wie viel Kubikschuh Wasser faßt der Kessel?

547) Mittelst eines Meßbandes wurden die Umfänge eines 20,4′ langen Baumstammes an den beiden Enden = 7,85′ und 6,28′ gefunden; wie groß ist a) der Kubikinhalt, b) was kostet

Digitized by Google

dieser Stamm, wenn der Kubikfuß zu 30 Kreuzer gerechnet wird?

548) Aus einem 36′ hohen Baumstamme, welcher an dem einen Ende 3′ 8″ und an dem andern 2′ 6″ dick ist, soll der größtmögliche Cylinder geschlagen werden; wie viel beträgt der Holzabfall?

549) Ein 12′ hoher Holzblock hat die Form eines abgekürzten Kegels; an dem einen Ende mißt der Umfang 11′, an dem andern 7′ $8\frac{1}{2}$″. Man soll daraus ein Parallelepiped von gleicher Höhe schlagen, welches das in die kleinere Basis beschriebene Quadrat zur Grundfläche hat; wie groß ist der Abfall?

550) Die Radien der Grundflächen eines abgekürzten Kegels sind 3,4′ und 1,4′ lang, die Seite mißt 5,2′, wie groß ist der Kubikinhalt?

551) Welchen allgemeinen Ausdruck erhält man für den Kubikinhalt eines abgekürzten Kegels, wenn die Radien der beiden Grundflächen mit R und r, und die Seite mit s bezeichnet werden?

552) Die Umfänge der zwei Grundflächen eines abgekürzten Kegels sind 7,85′ und 6,28′, die Seite mißt 5′; wie groß ist der Kubikinhalt?

553) Durch die Mitte der 18′ langen Höhe eines abgekürzten Kegels wurde parallel zu den Grundflächen eine Ebene gelegt; wie groß ist der Inhalt eines jeden der zwei Theile, wenn die Durchmesser an den beiden Enden 8′ und 6′ lang waren?

554) Die Höhe eines abgekürzten Kegels ist = h, die Radien der beiden Grundflächen sind R und r; wie groß werden die Inhalte der drei Theile, in welche dieser Körper durch zwei die Höhe in drei gleiche Theile theilende und zu den Basen parallele Ebenen getheilt wird?

555) Setzet in vorhergehender Aufgabe h = 9′, R = 8′ und r = 2′ und löset dieselbe a) unmittelbar, b) nach den dort erhaltenen Formeln?

556) Ein Gefäß, das die Form eines abgekürzten Kegels hat, faßt 957,7^{c}″ Wasser, oben ist es 8″ und unten 10″ weit; wie tief ist dasselbe?

Digitized by Google

†557) Der Kubikinhalt eines abgekürzten Kegels beträgt 1186,92$^{c\prime}$, die Höhe ist = 18′; wie groß ist der Radius der einen Basis, wenn der Halbmesser der andern 6′ mißt?

558) Der Kubikinhalt eines 6′ hohen abgekürzten Kegels beträgt 50$^{c\prime}$ 632$^1/_2$$^{c\prime\prime}$, der Umfang der kleinern Grundfläche mißt 7′ 8″ 5‴; wie groß ist der Umfang der andern Basis?

559) Der Kubikinhalt eines abgekürzten Kegels sei = k, die Höhe = h und der Halbmesser der größern Basis = R; wie groß ist der Radius der kleinern Grundfläche?

560) Bestimmet den Radius R der größern Basis eines abgekürzten Kegels, wenn der Inhalt = k, die Höhe = h und der Halbmesser der kleinern Grundfläche = r ist!

561) Der Halbmesser der größern Grundfläche eines abgekürzten Kegels sei = R, der der kleinern = r und die Höhe = h, man soll denselben durch einen zu den Basen parallelen Schnitt in zwei gleiche Theile theilen; in welchem Abstand von der größern Grundfläche muß der Schnitt durchgelegt werden, und wie groß wird der Halbmesser des Durchschnittskreises?

562) Nehmet in vorhergehender Aufgabe R = 3′, r = 1′ und h = 4′ und löset dieselbe a) unmittelbar, b) nach der erhaltenen Formel.

†563) Ein abgekürzter Kegel von 14′ Höhe hat einen Kubikinhalt von 924$^{c\prime}$, die Summe der Radien der beiden Grundflächen beträgt 9′; wie groß sind diese? $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$.

†564) Ein Gefäß von der Form eines abgekürzten Kegels soll 464$^3/_4$$^{c\prime\prime}$ fassen und oben 2″ weiter werden als unten; wie groß muß man die beiden Durchmesser nehmen, da die Höhe 12″ betragen soll?

565) Die Radien der beiden Grundflächen und die Höhe eines abgekürzten Kegels von 14$^{c\prime}$ 915$^{c\prime\prime}$ Inhalt verhalten sich zu einander wie 2 : 3 : 6; wie groß sind diese Dimensionen?

°566) Ein abgekürzter Kegel hat 615,44$^{c\prime}$ Inhalt, die Höhe ist um 2′ größer als der Durchmesser der größern Basis, und dieser übertrifft den Radius der kleinern Grundfläche um 7′; wie groß sind diese Stücke?

Digitized by Google

c) Ueber das Gewicht.

567) Welches Gewicht hat ein abgekürzter Kegel von Sandstein, wenn die Höhe 18′ und die Umfänge der beiden Grundflächen 47,1′ und 15,7′ betragen? (sp. Gew. = 2,5).

568) Ein gußeisernes Gewicht, das die Form eines abgekürzten Kegels hat, wiegt 90,35 ℔, die Durchmesser der beiden Basen sind 8″ und 6″ lang; wie hoch ist das Gewicht? (sp. Gew. = 7,2).

569) Ein Gefäß hat die Form eines abgekürzten Kegels und wiegt 4 ℔, die obere Weite beträgt 12″, die untere 10″ und die Tiefe 24″. Dasselbe wird zu $^3/_4$ der Tiefe mit Wasser gefüllt; wie viel wiegt das Gefäß sammt Wasser?

570) Ein Gefäß hat die Form eines abgekürzten Kegels und ist 12″ tief, oben 6″ und unten 10″ weit. Dasselbe wurde bis zur Mitte der Tiefe mit Wasser gefüllt und dann ein Körper der 6 ℔ wog, in dasselbe ganz eingetaucht; wie groß war das sp. Gewicht dieses Körpers, wenn das Wasser beim Eintauchen um 1″ stieg?

571) Ein Kegel von Holz, dessen sp. Gewicht = 0,6 ist, schwimmt vertikal im Wasser, daß die Spitze über den Wasserspiegel hervorragt. Der Durchmesser der Basis mißt 2′ und die Höhe 3′; bis zu welcher Stelle auf dem Mantel gemessen, sinkt der Körper ein?

572) Ein Gewicht von der Form eines abgekürzten Kegels wiegt 100 ℔ und ist oben 6″ und unten 8″ dick, man soll ein diesem ähnliches Gewicht verfertigen, das nur $12^1/_2$ ℔ schwer ist; welche Dimensionen muß dieses Gewicht erhalten, wenn das sp. Gew. der Masse = 8 ist?

§. 13. Aufgaben über die Berechnung der Kugel und der Kugeltheile.

A. Berechnung der ganzen Kugel.

a) Ueber die Oberfläche.

573) Wie groß ist die Oberfläche einer Kugel, wenn der Halbmesser mißt:

Digitized by Google

a) $4'$?
b) $2{,}8'$?
c) $3\frac{1}{2}''$?
d) $6'\ 7''\ 5'''$?
e) $4\frac{1}{2}^{\text{met.}}$?
f) $3^{\text{met.}}\ 5^{\text{d.m.}}\ 2^{\text{c.m.}}$?

574) Welche Oberfläche hat eine Kugel für den Durchmesser a) $3'\ 8''$; b) $4\frac{3}{4}'$? ($\pi = 3{,}1416$.)

575) Der Umfang des größten Kreises einer Kugel mißt $9{,}42'$; wie groß ist die Oberfläche derselben?

576) Rechnet die Oberfläche einer Kugel von $2'\ 8''$ langem Durchmesser für $\pi = \frac{22}{7}$.

577) Wie groß ist die ganze Oberfläche einer Halbkugel von $1{,}4'$ Durchmesser? $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$.

578) Wie groß ist die Oberfläche der Erde, wenn der Halbmesser 859,3 geographische Meilen beträgt?

579) Die Seite eines regulären Tetraeders ist $= s$; wie groß ist a) die Oberfläche der umgeschriebenen, b) die der eingeschriebenen Kugel?

580) Um wie viel differiren die Oberflächen einer Kugel und des eingeschriebenen Tetraeders, wenn der Durchmesser der erstern $2'$ lang ist?

581) Wie groß ist die Oberfläche einer um einen Würfel von $3^{c'}\ 375^{c''}$ Inhalt beschriebenen Kugel?

582) Die Kante eines Oktaeders sei $= s$; wie groß ist a) die Oberfläche der eingeschriebenen, b) die der umgeschriebenen Kugel?

583) Wie groß ist die Oberfläche einer Kugel, welche a) um, b) in ein Ikosaeder beschrieben ist, dessen Kante $= s$ sei?

584) Die Seite eines regulären Dodekaeders ist $= s$; man soll die Oberfläche a) der umgeschriebenen, b) der eingeschriebenen Kugel bestimmen.

585) Wie groß ist der Durchmesser einer Kugel, deren Oberfläche beträgt:

a) $12{,}56\,\square'$?
b) $15{,}7\,\square'$?
c) $78\frac{1}{2}\,\square'$?
d) $153{,}86\,\square^{\text{met.}}$?

586) Wie groß muß man den Halbmesser einer Kugel nehmen, damit sie dieselbe Oberfläche erhält wie zwei andere Kugeln

Digitized by Google

zusammen, von denen die eine einen Halbmesser von 4,5′ und die andere einen größten Umfang von 15,7′ hat?

587) Wie groß ist die Seite des in eine Kugel von $117^3/_4$□′ Oberfläche beschriebenen regelmäßigen Tetraeders?

588) Die Oberfläche einer Kugel beträgt 6,16□′; wie groß ist der Kubikinhalt des eingeschriebenen Würfels? $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$.

589) Welchen Kubikinhalt hat das um eine Kugel von 31,4□′ Oberfläche beschriebene Oktaeder?

590) Der Durchmesser einer Kugel ist um 2,14′ kleiner als der Umfang des größten Kreises; wie groß sind beide und die Oberfläche?

†591) Die Summe der Oberflächen zweier Kugeln beträgt 78,5□′, die Radien derselben differiren um 5″; wie groß ist die Oberfläche einer jeden?

592) Die Oberfläche einer Kugel ist um a größer als der Inhalt des größten Kreises; wie groß ist a) der Durchmesser, b) die Oberfläche dieser Kugel?

†593) Die Summe der Durchmesser zweier Kugeln ist = S, die ihrer Oberflächen = O; wie groß ist der Durchmesser einer jeden?

594) Nimmt man den Halbmesser einer Kugel um 5″ größer, so beträgt die Oberfläche 15,7□′ mehr; wie groß waren anfänglich der Halbmesser und die Oberfläche?

†595) Ein Würfel und eine Kugel haben die gleiche Oberfläche, der Durchmesser der Kugel ist um 8″ größer als die Seite des Würfels; wie groß sind diese Dimensionen?

b) Ueber den Kubikinhalt.

596) Wie groß ist der Kubikinhalt einer Kugel für den Halbmesser:

a) = 2,4′?	d) = 0,26′?
b) = 0,45′?	e) = 2′ 5″ 4‴?
c) = 2,25″?	f) = $1{,}42^{\text{met.}}$?

597) Wie groß ist der Kubikinhalt der Eisenmasse einer Hohlkugel, wenn der ganze Durchmesser 1′ 2″ lang ist und die Eisendicke 2″ beträgt?

Digitized by Google

598) Wie groß ist die Oberfläche und der Kubikinhalt einer Kugel, welche durch die Umdrehung eines Halbkreises um dessen Durchmesser von $3^3/_4'$ Länge entstanden ist? ($\pi = 3{,}1416$.)

599) Der Umfang des größten Kreises einer Kugel beträgt 1,413'; wie groß ist der Kubikinhalt derselben?

600) Die Oberfläche einer Kugel beträgt 6 □' 28 □''; wie groß ist der Kubikinhalt derselben?

601) Den Kubikinhalt einer Kugel in der Oberfläche O derselben auszudrücken!

602) Den Kubikinhalt einer Kugel von 221,76 □' Oberfläche nach der für Aufg. 601 erhaltenen Formel zu bestimmen. $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$.

603) Wie groß ist der Kubikinhalt unserer Erde, wenn der Durchmesser 1718,6 geogr. Meilen lang ist?

604) Der Inhalt des größten Kreises einer Kugel beträgt $78^1/_2$ □''; wie groß ist der Kubikinhalt derselben?

605) Wie verhalten sich die Inhalte eines Würfels und einer Kugel zu einander, wenn beide Körper die gleiche Oberfläche haben?

606) Wie viel bad. Maas faßt ein halbkugelförmiger Kessel, wenn der Durchmesser im Lichten 4' beträgt und 18 Maas 1^c' geben?

607) Eine Kugel hat einen Durchmesser = a; in welchem Verhältniß steht sie mit 4 andern, deren Durchmesser doppelt, drei-, vier- und n mal so groß sind?

608) Die Diagonale eines Würfels mißt 12''; wie groß ist der Kubikinhalt der die Seitenflächen berührenden Kugel?

609) Der Halbmesser einer Kugel ist 5'' lang; wie viel ist ihr Inhalt größer als der des eingeschriebenen regulären Tetraeders? ($\pi = 3{,}1416$.)

610) Aus einer Kugel von 3,14 □' Oberfläche wird das eingeschriebene reguläre Oktaeder verfertigt; wie viel beträgt der Abfall?

611) Wie groß ist der Unterschied einer Kugel und des eingeschriebenen Ikosaeders von 8'' langer Kante?

Digitized by Google

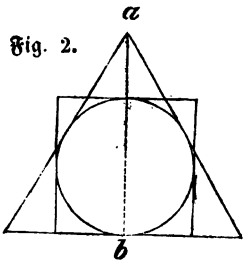
612) Man soll den Unterschied der Inhalte eines Dodekaeders und der umschriebenen Kugel bestimmen, wenn der Halbmesser der letztern 1′ lang ist.

613) Um wie viel ist der Kubikinhalt eines gleichseitigen Kegels von 2′ langer Seite größer als der Inhalt einer Kugel, welche so in den Kegel beschrieben ist, daß sie die Mantel- und Grundfläche berührt?

614) Eine Kugel ist so in einen 12″ hohen senkrechten Kegel beschrieben, daß sie die Basis und die Mantelfläche berührt; wie groß ist der Kubikinhalt eines jeden dieser Körper, wenn der Durchmesser der Kugel 6″ beträgt?

615) Beschreibt man um einen Kreis ein Quadrat und ein gleichseitiges Dreieck wie in Fig. 2 und denkt sich diese drei Flächen um die Mittellinie ab gedreht, so entsteht eine Kugel, ein Cylinder und ein Kegel;

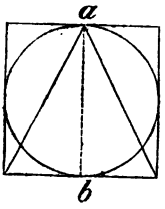
Fig. 2.



a) in welchem Verhältniß stehen die Mantelfläche des Cylinders, die des Kegels und die Kugeloberfläche?
b) wie verhalten sich die Oberflächen?
c) wie verhalten sich die Kubikinhalte dieser Körper?

616) Beantwortet die in Aufg. 615 gestellten Fragen für den Fall, daß das Quadrat wie dort um den Kreis beschrieben ist, das Dreieck aber auf die in Fig. 3 dargestellte Weise angenommen wird.

Fig. 3.



617) Die Radien zweier Kugeln differiren um 1′, ihre Oberflächen um 62,8 □′; wie groß ist der Kubikinhalt einer jeden dieser zwei Kugeln?

618) Wie groß ist der Durchmesser einer Kugel deren Kubikinhalt beträgt:

Digitized by Google

a) $904^{8}/_{25}{}^{c'}$? d) $24^{c'}\ 416^{16}/_{25}{}^{c''}$?
b) $113{,}04^{c''}$? e) $3{,}05208^{\text{c.met.}}$?
c) $381^{1}/_{2}{}^{c'}$? f) $14{,}13^{\text{c.dm.}}$?

619) Welchen Durchmesser hat der Mond, da er ungefähr 50mal kleiner ist als unsere Erde, welche einen Halbmesser von 859,3 geogr. Meilen Länge hat?

620) Wie groß muß der Durchmesser eines halbkugelförmigen Kessels gemacht werden, wenn derselbe eine bad. Ohm fassen soll? (1 Ohm = 100 Maas; 18 Maas = $1^{c'}$).

621) Ein Würfel und eine Kugel haben den gleichen Kubikinhalt; wie verhalten sich die Oberflächen dieser Körper?

622) Die Durchmesser dreier Kugeln sind d, d' und d''; wie groß ist der Durchmesser einer Kugel, deren Inhalt gleich der Summe der Inhalte jener drei ist?

623) Aus zwei eisernen Kugeln von 6'' und 12'' Durchmesser wird eine Kugel gegossen; wie groß wird deren Halbmesser?

624) Der Kubikinhalt einer Kugel beträgt $4^{c'}\ 851^{c''}$; wie groß ist die Oberfläche derselben? $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$.

625) Wie groß muß der Halbmesser einer Kugel gemacht werden, damit diese denselben Inhalt hat, wie ein Tetraeder von 4' Höhe?

626) Die Inhalte zweier Kugeln verhalten sich wie m : n, der Durchmesser der erstern Kugel ist = D; wie groß ist der der andern?

627) Wie verhalten sich die Oberflächen zweier Kugeln, deren Inhalte sich wie m : n verhalten?

628) Wie verhalten sich die Inhalte I und i zweier Kugeln, deren Oberflächen sich wie m : n verhalten?

†629) Die Summe der Inhalte zweier Kugeln beträgt $1^{c'}\ 172^{c''}$, die ihrer Radien 10''; wie groß ist der Durchmesser und der Inhalt einer jeden?

630) Die Oberflächen zweier Kugeln differiren um 16,94□', ihre Inhalte verhalten sich wie 216 : 125; wie groß sind die Durchmesser beider Kugeln? $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$.

Digitized by Google

†631) Wird der Halbmesser einer Kugel um 3″ größer angenommen, so wird der Kubikinhalt um 2$^{c'}$ 148$^{c''}$ größer; wie groß ist der Durchmesser im ersten Fall?

632) Die Oberfläche einer Hohlkugel beträgt 6,28□′, der Kubikinhalt des hohlen Raumes 904,32$^{c''}$; wie stark ist die Wand?

†633) Der Kubikinhalt einer Hohlkugel beträgt 9,944$^{c'}$, die Durchmesser derselben und des hohlen Raumes differiren um 1′; wie groß sind diese?

c) Ueber das Gewicht.

634) Wie viel wiegt eine Bleikugel von 1,4′ Durchmesser? (sp. Gew. = 11,3).

635) Wie groß ist das Gewicht einer eisernen Kugel, deren größter Kreis einen Umfang von 7,85′ hat?

636) Der äußere Durchmesser einer eisernen Hohlkugel beträgt 1,4′, der Halbmesser des hohlen Raumes 0,6′; wie viel wiegt dieselbe?

637) Eine Glaskugel hat einen äußeren Durchmesser von 2′ Länge, die Glasdicke beträgt 3‴; wie viel wiegt diese, wenn sie mit Wasser gefüllt ist? (sp. Gew. des Glases = 2,5).

638) Wie groß ist der Durchmesser einer 48pfündigen Kugel von Eisen? (sp. Gew. = 7,2).

639) Aus einer Kugel von Blei, welche 316½ ℔ wiegt, sollen kleinere für einen Büchsenlauf von 5 Linien Weite gegossen werden; wie viel solcher Kugeln werden erhalten? (sp. Gew. des Blei = 11,44).

640) Eine massive Kugel von Messing wiegt 2½ ℔; wie groß ist der Halbmesser derselben? (sp. Gew. = 8,44).

641) Wie viel Bleikugeln von 3 Linien Durchmesser gehen auf 1 ℔? (sp. Gew. 11,38).

642) Der Durchmesser des hohlen Raumes einer gußeisernen Hohlkugel beträgt 1,6′; das Gewicht 772,29 ℔; wie dick ist die Eisenmasse? (sp. Gew. = 7).

643) Man soll aus einer Legirung deren spec. Gew. = 8 ist, eine Hohlkugel von 50 ℔ Gewicht verfertigen; wie dick wird

Digitized by Google

dieselbe gemacht werden müssen, da der Durchmesser der ganzen Kugel nur 8″ lang werden darf?

644) Zwei Kugeln wiegen zusammen 28231¾ ℔, das spec. Gew. der einen ist = 4, das der andern = 5 und der Halbmesser der erstern ist doppelt so groß als der der andern, wie groß ist a) der Durchmesser, b) das Gewicht einer jeden?

645) Wie groß ist der äußere Halbmesser einer Hohlkugel von 37,388 ℔ Gewicht, wenn das spec. Gew. 7 beträgt und der Durchmesser der Höhlung 3″ mißt?

646) Eine Kugel von 200 ℔ Gewicht besteht aus einer Legirung zweier Metalle A und B und hat einen Durchmesser von 10″ Länge; wie viel von jedem Metall ist darin, wenn das spec. Gew. von A = 7 und das von B = 8 ist?

647) Man soll das spec. Gew. einer Kugel bestimmen, welche 203,48 ℔ wiegt, wenn der Halbmesser 5″ lang ist?

648) Aus 4 eisernen Kugeln deren Durchmesser 2″, 3″, 4″ und 5″ lang sind, sollen 3 andere gegossen werden, deren Gewichte sich wie 1 : 8 : 27 verhalten; wie groß werden die Durchmesser derselben gemacht werden müssen? (sp. Gew. = 7,2).

649) Man soll aus einem Würfel von Blei, dessen Kante 5″ lang ist, Schrote verfertigen, von welchen 100 Stück auf ein Loth gehen; wie viel solcher erhält man, wenn das spec. Gew. = 11 ist und der Abgang 6% beträgt, und wie groß ist der Durchmesser dieser Schrote?

650) Eine Hohlkugel von Kupfer soll im Wasser schweben (d. h. gleiches Gewicht mit dem Wasser haben); welche Dicke muß das Kupfer erhalten, wenn der Durchmesser 2 Fuß betragen soll? (sp. Gew. = 8,8).

651) Eine mit Wasser gefüllte Hohlkugel wiegt 998 ℔; wie dick ist die Wand, wenn der Durchmesser der ganzen Kugel 2′ mißt und das spec. Gew. der Masse = 8 ist?

B. Berechnung der Kugeltheile.

1) Berechnung der Kugelhaube.

652) Wie groß ist der Inhalt der sphärischen Fläche (Haube) eines Kugelsektors, wenn der Halbmesser der Kugel 4,5′ lang ist und die Höhe der Haube 2′ mißt?

Digitized by Google

653) Eine Kugel wurde durch eine Ebene geschnitten, so daß der Durchschnittskreis 0,8′ Halbmesser hatte; wie groß ist der Inhalt der kleinern darüber liegenden Haube, wenn der Durchmesser der Kugel 3,2′ beträgt?

654) Setze in vorhergehender Aufgabe den Radius der Kugel = R und den des Durchschnittskreises = r und leite für den Inhalt der Haube einen allgemeinen Ausdruck her!

655) Löset Aufg. 653 nach der für Aufg. 654 erhaltenen Formel.

656) In einem Abstande = a vom Mittelpunkt einer Kugel wurde durch diese eine Ebene gelegt; wie groß ist der Inhalt der darüber liegenden Haube, wenn der Radius des Durchschnittskreises = r ist?

657) Setzet in vorhergehender Aufgabe a = 1,5′ und r = 3,6′ und berechnet die kleinere Haube 1) unmittelbar; 2) nach der dafür erhaltenen Formel.

658) Wie groß ist der Halbmesser einer Kugel, wenn die zu einer Höhe von 1,4′ gehörige Haube 21,98 □′ Inhalt hat?

659) Eine Kugel hat 2,6′ Halbmesser; in welcher Entfernung von dem Mittelpunkt muß man eine Ebene durch dieselbe legen, um eine Haube von 26,13 □′ Inhalt zu erhalten, und wie groß wird der Radius des Durchschnittskreises?

†660) Die Oberfläche einer Haube beträgt 9,61 □′, ihre Höhe wird von dem Durchmesser des Begrenzungskreises um 2,1′ übertroffen; wie groß sind diese Dimensionen und der Halbmesser der zugehörigen Kugel?

661) Durch eine Kugel wurde eine Ebene gelegt; so daß die Entfernung derselben vom Mittelpunkt gleich dem Halbmesser des Durchschnittskreises wurde, wie groß war dieser, wenn die Haube 14,71 □′ Inhalt hatte?

662) Der Inhalt einer Haube beträgt 18,84 □′, die Höhe derselben ist um 2′ kleiner als der Halbmesser der Kugel; wie groß sind diese Stücke und der Radius des Durchschnittskreises?

663) Der Durchmesser des Begrenzungskreises einer Haube von 104,5 □′ Inhalt ist eben so groß wie der Halbmesser der zugehörigen Kugel; wie groß sind beide?

Digitized by Google

2) Berechnung des Kugelsektors.

664) Wie groß ist die ganze Oberfläche eines Kugelsektors, wenn der Halbmesser der Kugel = 2,6′ und die Höhe der zugehörigen Haube = 1,6′ ist?

665) Setzet in vorhergehender Aufgabe den Halbmesser der Kugel = R und die Höhe der Haube = h und leitet für die Oberfläche des Sektors einen allgemeinen Ausdruck her?

666) Welche Formel erhält man für die Oberfläche des Kugelsektors, welcher der in Aufg. 654 gegebenen Haube entspricht?

667) Setzet in vorhergehender Aufgabe R = 1,4′, r = 8″ und berechnet die Oberfläche des Sektors a) unmittelbar, b) nach der erhaltenen Formel!

668) Der Begrenzungskreis einer Haube hat einen Durchmesser von 8″, die Höhe der Haube mißt 2″; wie groß ist die Oberfläche des entsprechenden Kugelsektors?

669) Die Oberfläche eines Kugelsektors beträgt 28,56 □′, der Inhalt der zugehörigen Haube 11,304 □′, wie groß ist der Durchmesser der Kugel?

670) Wie groß ist der Kubikinhalt des Sektors, welcher der in Aufg. 652 gegebenen Haube entspricht?

671) Der Halbmesser einer Kugel ist = R, der Radius des Begrenzungskreises einer Haube derselben = r; welchen Ausdruck erhält man für den Kubikinhalt des der Haube entsprechenden Sektors?

672) In vorhergehender Aufgabe sei R = 1,3′, r = 1,2′; man soll den Kubikinhalt des Sektors a) unmittelbar, b) nach der dafür erhaltenen Formel bestimmen.

673) Eine Formel für den Kubikinhalt des der Haube in Aufg. 656 entsprechenden Sektors herzuleiten.

674) Setzet in vorhergehender Aufgabe a = 2,4′, r = 1′ und löset dieselbe 1) unmittelbar, 2) nach der erhaltenen Formel.

675) Die Oberfläche einer Kugel beträgt 50,24 □′; welchen Kubikinhalt hat ein Sektor derselben, wenn dessen Haube 1 Fuß Höhe hat?

Digitized by Google

676) Der Kubikinhalt eines Sektors ist = K, der Durchmesser der Kugel = D; wie groß ist die Höhe der Haube des Sektors?

677) Welche Höhe hat die Haube eines Kugelsektors von 848$^{c''}$ Inhalt, wenn der Halbmesser der Kugel 9'' lang ist?

678) Man soll den Durchmesser einer Kugel bestimmen, wenn der Kubikinhalt eines Sektors derselben 7,85$^{c'}$ beträgt und die diesem entsprechende Haube 6'' Höhe hat.

679) Der Kubikinhalt einer Kugel beträgt 1149,763$^{c'}$, der eines Sektors derselben 44,222$^{c'}$; wie groß ist der Halbmesser des Begrenzungskreises der entsprechenden Haube?

3) Berechnung des Kugelsegments.

680) Wie groß ist die ganze Oberfläche eines Segments von 5'' Höhe, wenn der Halbmesser der Kugel 1 Fuß lang ist?

681) Der Halbmesser eines Begrenzungskreises eines Segments ist = r, der der Kugel = R; wie groß ist die ganze Oberfläche des Segments?

682) Die Höhe eines Segments ist = 1,8', der Durchmesser des Begrenzungskreises = 4,8'; wie groß ist die ganze Oberfläche des Segments?

683) Wie groß ist die ganze Oberfläche und der Kubikinhalt eines Segments von 0,9' Höhe, wenn der Halbmesser des Begrenzungskreises = 1,2' ist?

684) Setzet in vorhergehender Aufgabe die Höhe = h und den Halbmesser des Begrenzungskreises = r und leitet für die Oberfläche und den Kubikinhalt allgemeine Ausdrücke her!

685) Wendet die für Aufg. 684 erhaltenen Formeln zur Lösung der Aufg. 683 an!

686) Der Halbmesser einer Kugel sei = R, die Höhe eines Segments derselben = h; welche Formel erhält man für den Kubikinhalt dieses Segments?

687) Wie groß ist der Kubikinhalt eines Segments, wenn der Durchmesser der Kugel 3' und die Höhe des Segments 6'' mißt?

688) Eine Kugel von $2\frac{1}{2}$' Durchmesser wird durch eine Ebene in 2 Theile getheilt; wie groß sind die Inhalte dieser

Digitized by Google

Theile, wenn der Halbmesser des Durchschnittskreises 1 Fuß mißt?

689) Der Radius einer Kugel ist = R, ein Segment derselben ist von einem Kreis begrenzt, dessen Halbmesser = r ist; wie groß ist der Inhalt dieses Segments?

690) Löset Aufg. 688 auch nach der für Aufg. 689 erhaltenen Formel!

691) Eine Kugel wird in einem Abstande = a vom Mittelpunkte von einer Ebene durchschnitten, der Halbmesser des Durchschnittskreises ist = r; wie groß ist der Inhalt des Segments?

692) Nehmet in vorhergehender Aufgabe a = 6″, r = 4″ und bestimmt den Kubikinhalt des Segments 1) unmittelbar, 2) nach der erhaltenen Formel.

693) Der Inhalt eines Segments beträgt 7,235 c′, seine Höhe 1,2′; wie groß ist der Halbmesser der zugehörigen Kugel?

694) Die Höhe eines Kugelsegments von 6,28 c′ Inhalt ist gleich dem Halbmesser des Begrenzungskreises; wie groß sind diese Dimensionen?

695) Man soll ein Gefäß von der Form eines Kugelsegments verfertigen, das einen Kubikfuß Wasser faßt und dessen Tiefe gleich dem vierten Theil der größten Weite ist; wie tief und weit muß dasselbe gemacht werden, und wie groß ist der Halbmesser der zugehörigen Kugel?

°696) Wie groß muß der Durchmesser einer Kugel von Holz gemacht werden, damit sie im Wasser so schwimmt, daß noch 8″ über den Wasserspiegel hervorragen, wenn das spec. Gew. des Holzes = 0,6 ist?

°697) Wie tief sinkt eine hölzerne Kugel von 2′ Durchmesser im Wasser ein, wenn das spec. Gewicht des Holzes = 0,7 ist?

4) Berechnung des Kugelgürtels und der körperlichen Zone.

698) Die Höhe einer körperlichen Kugelzone beträgt 1,5′; wie groß ist der Inhalt der sphärischen Fläche (Gürtel) und der Kubikinhalt der körperlichen Zone, wenn der Halbmesser der

Digitized by Google

Kugel 2,4′ mißt und der Abstand der größern Basis vom Mittelpunkt der Kugel = 0,4′ ist?

699) In vorhergehender Aufgabe sei die Dicke der körperlichen Zone = d, der Halbmesser der Kugel = R, und die Entfernung der größern Grundfläche vom Kugelmittelpunkt = a; man soll für den Inhalt des Gürtels und den Kubikinhalt der Zone allgemeine Ausdrücke herleiten.

700) Durch eine Kugel, deren Durchmesser 3′ mißt, wurde in einer Entfernung von 5″ vom Mittelpunkt eine Ebene gelegt; wie groß ist der Inhalt der zwischen dem Durchschnittskreis und dem damit parallel gehenden größten Kreise liegenden körperlichen Zone?

701) Drücket die für Aufg. 699 erhaltene Formel für den in Aufg. 700 gegebenen Fall aus und wendet sie dann zur Lösung dieser Aufgabe an!

702) Der Durchmesser einer Kugel mißt 4′, 5″ und 1′ 5″ von der Oberfläche entfernt wurden zwei parallele Ebenen durch die Kugel gelegt; wie groß ist der Kubikinhalt der zwischen den Ebenen liegenden körperlichen Zone?

703) 8″ und 1,8′ von einem Punkte der Oberfläche einer Kugel entfernt, werden zwei parallele Ebenen durch diese gelegt; wie groß ist der Kubikinhalt der zwischen beiden liegenden körperlichen Zone, wenn der Halbmesser der Kugel 2,4′ lang ist?

704) Bezeichnet in vorhergehender Aufgabe die beiden Entfernungen von der Oberfläche mit H und h und den Halbmesser der Kugel mit R und leitet für den Kubikinhalt der Zone einen allgemeinen Ausdruck her!

705) Wendet die für Aufg. 704 erhaltene Formel zur Lösung der Aufg. 703 an.

706) Der Radius einer Kugel ist 2,4′ lang, zwei durch dieselbe, auf einer Seite des Mittelpunkts, gelegte parallele Ebenen schneiden sie nach Kreisen deren Durchmesser 4′ und 2′ messen; wie groß ist die ganze Oberfläche der zwischen den Ebenen liegenden körperlichen Zone und der Kubikinhalt derselben?

707) Die Radien der zwei Begrenzungskreise einer körper-

Digitized by Google

lichen Zone sind 2′ und 3′, die Höhe der Zone = 2′; wie groß ist der Kubikinhalt derselben?

708) Die Dicke einer körperlichen Zone sei = d, die Radien der Begrenzungskreise = r und r′; wie groß ist der Kubikinhalt der Zone?

709) Setzet in vorhergehender Aufgabe $d = 1^3/_4'$, $r = 1'$ und $r' = 1^1/_2'$, und suchet den Kubikinhalt a) unmittelbar, b) nach der erhaltenen Formel. $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$.

710) Der Kubikinhalt einer Kugelzone beträgt $6^{c'}$, der Halbmesser des einen Begrenzungskreises ist = 2′, und die Höhe der Zone = $^3/_5'$; wie groß ist der Radius des andern Begrenzungskreises?

711) Die beiden Begrenzungskreise einer körperlichen Zone von 1,8′ Dicke und $17{,}183^{c'}$ Inhalt differiren um 1 Fuß; wie groß sind beide?

712) Der Kubikinhalt einer körperlichen Zone beträgt $4^{c'}$ $974^{c''}$, der Radius der Kugel ist 1′ 5″ lang, und die Dicke der Zone mißt 9″; wie groß ist die Entfernung der größern Grundfläche vom Mittelpunkte der Kugel?

Digitized by Google

Resultate

zu den

Berechnungsaufgaben

aus der

körperlichen Geometrie

Digitized by Google

Digitized by Google

Abschnitt I.

Aufgaben über das Körpermaß, das Gewicht und den Kubikinhalt der Körper im Allgemeinen.

§. 1. Aufgaben über Reduktion verschiedener Körpermaße.

1) a) $9000^{c''}$. b) $125546^{c''}$. c) $30047^{c''}$.
d) $8040^{c''}$. e) $427005^{c''}$. f) $302108^{c''}$.

2) a) $5184^{c''}$; b) $43546^{c''}$; c) $1320200^{c''}$; d) $8668^{c''}$.

3) a) $48000000^{c'''}$; b) $37548000^{c'''}$; c) $6024376^{c'''}$;
d) $884000^{c'''}$; e) $7364^{c'''}$; f) $8005007^{c'''}$.

4) a) $20480256^{c'''}$; b) $8965484^{c'''}$; c) $128917^{c'''}$.

5) a) $48{,}547^{c'}$. g) $0{,}084^{c'}$. n) $0{,}04700525^{c'}$.
b) $6{,}074^{c'}$. h) $0{,}0088^{c'}$. o) $43{,}074008^{c'}$.
c) $37{,}524816^{c'}$. i) $0{,}019048^{c'}$. p) $7{,}009008^{c'}$.
d) $4{,}716^{c.m.}$ k) $7{,}015^{c.m.}$ q) $0{,}016047^{c.m.}$
e) $0{,}97875^{c'}$. l) $8{,}012015^{c'}$. r) $50{,}0000045^{c'}$.
f) $6{,}084594^{c'}$. m) $0{,}000427^{c'}$. s) $468{,}0090076^{c'}$.

6) a) $768^{c'}\ 832^{c''}$. g) $5^{c''}\ 768^{c'''}$. n) $802^{c.cm.}\ 500^{c.mm.}$
b) $405^{c'}\ 85^{c''}$. h) $465^{c.dm.}$ o) $500^{c'}\ 720^{c''}$.
c) $125^{c'}\ 7^{c''}$. i) $24^{c'}\ 600^{c''}$. p) $8^{c'}\ 30^{c''}\ 640^{c'''}$.
d) $48^{c.m.}\ 720^{c.dm.}$ k) $7^{c'}48^{c''}320^{c'''}$. q) $4^{c'}\ 30^{c''}$.
e) $400^{c'}\ 800^{c''}$. l) $850^{c'''}$. r) $5^{c.m.}\ 724^{c.dm.}\ 30^{c.cm.}$
f) $86^{c0}\ 45^{c'}$. m) $3^{c'}\ 600^{c'''}$. s) $7^{c.m.}\ 86^{c.dm.}\ 50^{c.cm.}$

7) a) $945^{c''}\ 373^{31}/_{125}{}^{c'''}$; b) $1512^{c''}$; c) $675^{c''}$.

8) a) $333^{1}/_{3}{}^{c''}$; b) $750^{c''}$.

9) a) $2{,}592^{c.met.}$; b) $5{,}05764^{c.m.}$; c) $19{,}332142128^{c.m.}$

10) a) $2{,}411448^{c.m.}$; b) $0{,}796087^{c.m.}$; c) $0{,}2357345^{c.m.}$

11) a) $18000^{c'}$; b) $2850^{c'}$; c) $48^{c'}$.

Digitized by Google

12) a) 43,1739368$^{c\prime}$; b) 7,654953$^{c\prime}$.

13) a) 170$^{c\prime}$ 344$^{c\prime\prime}$ 485$^{c\prime\prime\prime}$; b) 148$^{c\prime}$ 1327$^{19}/_{20}$$^{c\prime\prime}$; c) 195$^{c\prime}$ 596$^{c\prime\prime}$ 985$^{c\prime\prime\prime}$.

14) a) 25 Lit.; b) 1 Hektolit. 25 Lit.

15) a) 828 Maas = 8 Ohm 2 Stütz. 8 Maas; b) 153 Maas; c) 2,2545 Maas; d) 12 Maas; e) 666$^{2}/_{3}$ Maas.

16) a) 1) 60 bad. M., 2) 63,5982 öster. M., 3) 78$^{2}/_{5}$ pr. Q.
b) 1) 144 " " , 2) 152,63568 " " , 3) 188,64 "

17) a) 2$^{1}/_{2}$$^{c\prime}$; b) 3,8$^{c\prime}$; c) 42,45$^{c\prime}$.

18) a) 6$^{1}/_{2}$ bad. $^{c\prime}$; b) 2,37486$^{c\prime}$; c) 16,221$^{c\prime}$;
d) 797,517$^{c\prime}$; e) 106,9 bad. $^{c\prime}$.

19) 255$^{c\prime}$.

20) Er hat 1055 Malt. 7 Sest. Frucht.

§. 2. Aufgaben über das Gewicht und den Kubikinhalt der Körper überhaupt.

21) a) 2592 ℔; b) 827 ℔ 17$^{3}/_{5}$ Loth; c) 1 ℔ 28$^{6}/_{125}$ Loth. d) 379 ℔ 11$^{1}/_{2}$ Loth; e) 81 ℔; f) 393 ℔ 12$^{3}/_{25}$ Loth.

22) a) 1,5$^{c\prime}$; b) $^{5}/_{8}$$^{c\prime}$ oder 625$^{c\prime\prime}$; c) 43,2$^{c\prime}$.

23) 28050 preuß. ℔ oder 255 Ctr. (à 110 ℔).

24) 6 bayr. $^{c\prime}$ oder 5,52468 bad. $^{c\prime}$.

25) a) 32327,64864 preuß. ℔; b) 60480 Kilogr.;
c) 27000 bayr. ℔.

26) Gewicht = 92 Ctr. 17$^{4}/_{5}$ ℔.

27) Gewicht = 73 Ctr. 29$^{21}/_{50}$ ℔.

28) Gewicht = 8921,2 preuß. ℔.

29) Gewicht der Pyramide = 1113 Ctr. 75 ℔.

30) Gewicht des Stammes = 39 Ctr. 20$^{2}/_{5}$ ℔.

31) Gewicht = 3216$^{9}/_{50}$ ℔.

32) Gewicht der Röhre = 1009,8 preuß. ℔.

33) Kubikinhalt = 4$^{c\prime}$.

34) Kubikinhalt = 4,3 würtemb. $^{c\prime}$.

35) Kubikinhalt = 526$^{c\prime\prime}$.

36) Kubikinhalt = 6$^{c\prime\prime}$ 283$^{c\prime\prime\prime}$.

Digitized by Google

37) Gewicht = $59^2/_5$ ℔.

38) Gewicht = 629 ℔ = 6 Ctr. 29 ℔.

39) Kubikinhalt = 6,8206 bad. $^{c'}$.

40) Spec. Gewicht = 7,2.

41) Gewicht der Legirung = 4671 ℔.

42) Gewicht des Zinns = 39,42 ℔.

43) Volumen von A = $^1/_2{}^{c'}$, Volumen von B = $^1/_4{}^{c'}$.

44) a) Gewicht des Kupfers = 1 ℔ 20,5... Loth,
" " Zinns = 1 ℔ 17,8... Loth;
b) Inhalt des Kupfers = 0,003458$^{c'}$,
" " Zinns = 0,00395$^{c'}$.

45) Volumen von $A = \frac{P - p.s'.k}{p(s - s')}$

" " $B = \frac{P - p.s.k}{p(s' - s)}$

46) a) Inhalt des Stabes = 0,01843$^{c'}$,
b) Gewicht " " = 7,74281 ℔.

47) Inhalt von $A = \frac{P(s' - S)}{S.p(s' - s)}$

" " $B = \frac{P(S - s)}{S.p(s' - s)}$

48) a) Inhalt des Kupfers = $1^1/_3{}^{c'}$,
" " Zinns = $^2/_3{}^{c'}$;
b) Gewicht des Kupfers = 633,6 ℔,
" " Zinns = 262,8 ℔.

49) Spec. Gew. $= \frac{s'k' + s''k''}{k}$

50) a) Gew. des Silbers = 0,4526 ℔ = 14,4832 Loth,
" " Goldes = 0,6724 ℔ = 21,5168 "
b) Inhalt des Silbers = 798$^{c''}$
" " Goldes = 648$^{c''}$

Digitized by Google

Abschnitt II.

Aufgaben über die Berechnung der eckigen Körper.

§. 3. Aufgaben über die Berechnung des Prisma.

a) Ueber die Oberfläche.

51) Oberfläche $= 52^1/_2 \square'$.

52) Oberfläche $= 277{,}8215 \square'$.

53) Oberfläche $= 245^1/_5 \square'$.

54) Preis des Anstrichs $= 17$ fl. 6 kr.
Oberfläche $= 539{,}30515 \square'$

55) Oberfläche $= 133{,}92 \square'$.

56) Inhalt der Basis $= 12^1/_4 \square'$.

57) Höhe $= 25'$.

58) Basisseite $= 3'$, Höhe $= 15'$.

59) Seiten der Grundfläche $= 3'$ und $4^1/_2'$, Höhe $= 22^1/_2'$.

60) Seite der Basis $= 6'$.

61) Seite der Basis $= \frac{-2a + \sqrt{2(3O + 2a^2)}}{6}$

Höhe $= \frac{4a + \sqrt{2(3O + 2a^2)}}{6}$

62) Diagonale der Basis $= 3{,}896'$, Höhe $= 23{,}896'$.

63) Die eine Seite $= 4'$, die andere $= 6'$ und die Höhe $= 30'$.

64) Die Höhe des einen $= 5^{met.}$, die des andern $= 10^{met.}$

b) Ueber den Kubikinhalt.

65) Kubikinhalt $= 63{,}936^{c'}$.

66) Kubikinhalt $= 107008^{c''} = 61^{25}/_{27}{}^{c'}$.

67) Kubikinhalt $= 1968^{c'}$.

68) Es sind $5160^{c'}$ auszuheben.

69) Der Stamm kostet 88 fl.

70) 1131 Fuhren.

71) Inhalt $=$ a.b.c.

Digitized by Google

72) Der Stamm liefert $3^1/_8$ Klafter.

73) 232,3 Fuhren.

74) Man hat 750 Arbeiter anzustellen.

75) Oberfläche = 792 □′; Preis des Anstrichs = 26 fl. 24 kr.; Preis der Aufführung = 57 fl. 36 kr.

76) Der Behälter faßt 1701 Maas.

77) Man braucht 10111 Backsteine und diese kosten 202 fl. 13 kr.

78) Anzahl der Backsteine = 17472 Stück; Preis dieser = $349^{11}/_{25}$ fl.

79) Kubikinhalt = 7880 c′.

80) In 3 Stunden 36 Minuten.

81) 453 Malter 6 Sester.

82) 7231,68 Meßlein = 72 Malt. 3 Sstr. 1,68 Mßl.

83) Nach 20 Stunden 9 Min. $52^{16}/_{27}$ Sek.

84) Kubikinhalt = 35,073 c′.

85) Kubikinhalt = 67,34016 c′.

86) Kubikinhalt = 214,272 c′.

87) Kubikinhalt = 17,01 c′.

88) Kubikinhalt = 3,24 c′.

89) Kubikinhalt = 173,4858 c′.

90) Kubikinhalt = 57,728 c′.

91) Kubikinhalt = 421,93325 c′.

92) Höhe = $17^1/_2$′.

93) Die Seite wird = 2,39′.

94) Basisseite = 28″ $8^2/_5$‴.

95) Länge der Mauer = 72′.

96) Dicke der Mauer = 2′.

97) Die Größe des erforderlichen Blechs = 2,3808 □′.

98) Die Länge = $12^1/_2$′.

99) Länge = Breite = 5′, die Höhe = $2^1/_2$′.

100) Kubikinhalt = 1120 c′.

101) Kubikinhalt = 192 c′.

Digitized by Google

102) Die Seiten sind: 3′, 4,5′ und 10,5′; der Kubikinhalt beträgt 141,75 c′.

103) Oberfläche = 432 □′.

104) Oberfläche = 134,8 □′.

105) Breite = 3′; Dicke = $1\frac{1}{2}$′.

106) Die Seiten sind $4\frac{1}{2}$′ und $6\frac{1}{2}$′ lang.

107) Inhalt der Höhlung = (l—2d)(b—2d)(h—δ).

108) Länge = $m\sqrt[3]{\frac{K}{mnp}}$, Breite = $n\sqrt[3]{\frac{K}{mnp}}$, Höhe = $p\sqrt[3]{\frac{K}{mnp}}$.

109) Das eine Gefäß faßt 2,67, das andere 6,33 Maas.

110) Kante = $a\sqrt[3]{\frac{n}{m}}$.

111) Die Inhalte betragen 1344 c′ und 4536 c′.

112) Die homologen Kanten messen 8′ und 6′.

c) Ueber das Gewicht.

113) Gewicht = 783,513 ℔ = 783 ℔ $16\frac{2}{5}$ Loth.

114) Gewicht des Backsteins = 10 ℔ $26\frac{2}{5}$ Loth.

115) Gewicht der Eisenstange = 43,02028 ℔.

116) Gewicht der Luft = 1300,8 ℔.

117) Gewicht = 1571,47 ℔.

118) Luftdruck = 28274,4 ℔ oder nahezu $282\frac{3}{4}$ Ctr.

119) Gewicht der Stäbe = 529,1495 ℔; Preis derselben = 79 fl. 22 kr.

120) Gewicht des Prisma = 26,33637 ℔.

121) Preis der Stäbe 73 fl. 47 kr.

122) Gewicht des Stammes = 3994 ℔.

123) Gewicht des Prisma = 2268 ℔.

124) Gewicht der Säule = 28876,246 ℔.

125) Seite der Grundfläche = 0,08′ = 8‴.

126) Seite der Basis = 1,98′.

Digitized by Google

127) Seite der Grundfläche = 0,25′; Höhe = 6′.

128) Seiten = 0,083′ und 0,043′.

129) Seite der Grundfläche = 0,364′.

130) Das Parallelepiped sinkt 1,95′ tief ein.

131) Tiefe des Einsinkens = 2′ 6″.

132) Tiefe des Einsinkens = 0,379′; Anzahl der Backsteine = 222 Stück.

133) Gewicht der Stäbe = 34,992 ℔ und 4,374 ℔.

134) Kanten = 1′ 5″ und 1′ 2″.

135) Gewicht des Holzes = 2073,6 ℔, Gewicht des Metalls = 3240 ℔.

136) Länge = 3,6152′; Breite = 1,205′; Höhe = 0,964′.

§. 4. Aufgaben über die Berechnung des Würfels.

a) Ueber Oberfläche und Kubikinhalt.

137) a) Oberfl. = 216□′; Kubikinh. = 216c′.
b) " = 201,84□′; " = 195,112c′.
c) " = 40,56□′; " = 17,576c′.
d) " = 426,3894□′; " = 599,077107c′.
e) " = 1,215□′; " = 0,091125c′.
f) " = 12,2694□′; " = 2,924207c′.

138) a) Oberfl. = 25,9584□′; Kubikinh. = 8,998912c′.
b) " = 525696□″ = 25□′ 50□″ 96□‴; Kubikinhalt = 25934336c‴ = 8c′ 1184c″ 512c‴.

139) Oberfläche = $6a^2$; Kubikinhalt = a^3.

140) Oberfl. = 56,9184□met.; Kubikinh. = 29,218112c.met.

141) Preis des Anstrichs = 12 fl. 2 kr., Kubikinhalt = $614\frac{1}{8}$c′.

142) Oberfläche = $73\frac{1}{2}$□′; Kubikinhalt = $42\frac{7}{8}$c′.

143) Differenz der Oberflächen = 275,625□′.
" " Inhalte = 337,640625c′.

144) Kubikinhalt = 48,228544c′.

145) Kubikinhalt = 47c′ 1383c″ 1440c‴.

146) Oberfläche = 17,28□′; Kubikinhalt = 4,88736c′.

Digitized by Google

147) Oberfläche $= 72\,\square'$; Kubikinhalt $= 41{,}569^{c'}$.

148) Oberfläche $= 2D^2$; Kubikinhalt $= \frac{D^3}{9}\sqrt{3}$.

149) a) Kante $= 21'$; Kubikinh. $= 9261^{c'}$.
b) " $= 2{,}8'$; " $= 21{,}952^{c'}$.
c) " $= 7{,}38'$; " $= 401{,}947272^{c'}$.
d) " $= 4{,}05^{met.}$; " $= 66{,}430125^{c.met.}$

150) Kubikinhalt $= \frac{O}{6}\sqrt{\frac{O}{6}}$.

151) Diagonale $= 6{,}062'$; Kubikinhalt $= 42{,}875^{c'}$.

152) Kubikinhalt $= 0{,}512^{c'}$.

153) Kubikinhalt $= 37^{c'}\ 64^{c''}$.

154) 512 Würfel.

155) 9,216 Maas.

156) Kubikinhalt des einen $= 8^{c'}$, des andern $= 125^{c'}$.

157) Kubikinhalt $= \left(\frac{S+d}{3}\right)^3$ und $\left(\frac{S-d}{3}\right)^3$.

158) Im ersten Falle ist der Inhalt $= 15\frac{5}{8}{}^{c'}$, im zweiten $= 64^{c'}$.

159) Inhalte $= 8^{c'}$ und $15{,}625^{c'}$.

160) Kante des einen $= \frac{1}{2}\left(k+\sqrt{\frac{O-3k^2}{3}}\right)$, die des andern $= \frac{1}{2}\left(k-\sqrt{\frac{O-3k^2}{3}}\right)$.

161) Kubikinhalt $= 20{,}391167^{c'}$.

162) Kubikinhalt $= \left[\frac{d}{2}(1+\sqrt{3})\right]^3 = 2{,}54889.d^3$.

163) Kubikinhalt $= \left[\frac{S}{2}(-1+\sqrt{3})\right]^3 = 0{,}049027896.S^3$.

164) Umgeschr.: eingeschr. $= 4 : \sqrt{2}$.

165)
a) Seite $= 1\frac{1}{2}'$. d) Seite $= 5{,}08'$. g) Seite $= 0{,}7005'$.
b) " $= 3\frac{1}{2}$. e) " $= 6'\ 3''$. h) " $= 2{,}9^{met.}$
c) " $= 6{,}29'$. f) " $= 0{,}84988'$. i) " $= 2{,}49^{met.}$

166) Seite $= 1076{,}9''' = 7'\ 5''\ 8\frac{9}{10}'''$.

Digitized by Google

167) Seite = 1,77′.

168) Kante = 1,133′.

169) Um 1,595′ größer.

170) Seite = 0,605′; Inhalt des erforderlichen Blechs = 1,8301 □′.

171) Oberfläche = $6\sqrt[3]{C^2}$.

172) Diagonale = 4,8497′.

173) Diagonale = $\sqrt[3]{3C\sqrt{3}}$.

174) Die Seiten sind: 0,5′; 1′; 1,5′ und 2′.

175) Anfängliche Seite = 4′.

176) Kanten = 6′ und 4′, also die Oberflächen = 216 □′ und 96 □′.

b) Ueber das Gewicht.

177) Gewicht des Würfels = 22 Ctr. 78 1/8 ℔.

178) Gewicht = 2515 ℔.

179) Gewicht = 1166 2/5 ℔.

180) 5,023 Würfel.

181) Gewicht des Ganzen = 86,0436 ℔.

182) Seite = 0,801′.

183) Seite = 0,773′ = 9″ 3 39/125‴.

184) Spec. Gewicht = 7,5.

185) Seite = 2,5′; Diagonale = 4,33′.

186) Seite = 0,57′; Gewicht = 73,4832 ℔.

187) Seite eines jeden = 2″.

188) Seite = 0,41′.

189) Dicke der Wand = 0,01′.

190) Tiefe des Einsinkens = 1 3/4′.

191) Tiefe des Einsinkens = 0,5209′.

192) 146 Würfel.

193) Die Seiten sind: 1/2′, 1′, 1′ und 2′.

194) Seiten = 1,5′ und 1,75′.

195) Kante = 2′.

Digitized by Google

§. 5. Aufgaben über die Berechnung der Pyramide.

A. Berechnung der vollständigen Pyramide.

a) Ueber die Oberfläche.

196) Oberfläche $= 46\frac{1}{4}\square'$.

197) Oberfläche $= 23{,}98708\square'$.

198) Der Anstrich kostet 6 fl. 11 kr.

199) Oberfläche $= 12{,}067434\square'$.

200) Oberfläche $= 27{,}712\square'$.

201) Oberfläche $= 242{,}76\square'$.

202) Oberfläche $= 55{,}65103\square'$.

203) Oberfläche $= \frac{a}{4}\left[a\sqrt{3} + 3\sqrt{(4b^2 - a^2)}\right]$.

204) Oberfläche $= 138{,}24\square'$.

205) Oberfläche $= 160{,}389\square'$.

206) Oberfläche $= a\left[a + \sqrt{(4h^2 - a^2)}\right]$.

207) Höhe der Pyramide $= 9{,}92'$.

208) Seite der Grundfläche $= 4'$.

209) Die Höhe ist entweder $= 7{,}77'$ oder $= 2{,}29'$.
Wie läßt sich dieses Doppelresultat erklären?

210) Seite der Basis $=$
$$\frac{O}{2}\sqrt{\frac{2}{O + 2h^2}} = \frac{O}{2(O + 2h^2)}\sqrt{2(O + 2h^2)}$$

211) Höhe der Pyramide $= \frac{1}{2s}\sqrt{\left(O(O - 2s^2)\right)}$

212) Kante $= \sqrt{\frac{O}{1 + \sqrt{3}}}$

213) Jede Kante ist $= 5'$.

214) Seite der Basis $= 10'$; Höhe der Pyramide $= 20'$.

215) a) Seite der Basis $= 20'$; b) jede Seitenkante $= 20{,}6155'$.

216) Seite der Basis $= 12'$; Seitenkante $= 10'$.

217) Seite der Grundfläche $= 8'$.

218) Oberfläche $= 18\square'$.

Digitized by Google

219) Gleichliegende Kante $= K\sqrt{\frac{O'}{O}}$

220) Oberfl. des einen $= 115^7/_8\,\square'$, die des andern $= 16^7/_8\,\square'$.

221) Die Kanten sind $= 24'$ und $22'$.

b) Ueber den Kubikinhalt.

222) Kubikinhalt $= 71{,}57^{c'}$.

223) Kubikinhalt $= 70^{c'}\ 1115^1/_3{}^{c''}$.

224) Kubikinhalt $= 15^{c'}\ 341^{c''}$.

225) Kubikinhalt $= 389{,}7^{c'}$.

226) Kubikinhalt $= \frac{a^2.h}{3}$

227) Kubikinhalt $= 53{,}3504^{c'}$.

228) Kubikinhalt $= 19{,}032324^{c'}$.

229) Kubikinhalt $= \frac{a^2}{12}\sqrt{(3b^2-a^2)}$

230) Kubikinhalt $= 9{,}093936^{c'}$.

231) Kubikinhalt $= 1{,}82214^{c'}$.

232) Kubikinhalt $= 25{,}455204^{c'}$.

233) Kubikinhalt $= \frac{3a^2}{2}\sqrt{3(b^2-a^2)}$

234) Kubikinhalt $= 10{,}752^{c'}$.

235) Kubikinhalt $= 20{,}66875^{c'}$.

236) Kubikinhalt $= 2058^{c'}$.

237) Kubikinhalt $= 4{,}29868^{c'}$.

238) Kubikinhalt $= \frac{a}{6}\sqrt{O(O-2a^2)}$

239) Höhe der Pyramide $= 37{,}18'$.

240) Seite der Grundfläche $13{,}85'$.

241) Seite der Grundfläche $= 4{,}312'$.

242) Seite der Basis $= 8''$.

243) Seite der Basis $= 2'$; Höhe der Pyram. $= 5{,}8309'$.

244) Jede Seite der Grundfl. $= 4'$; jede Seitenkante $= 8'$.

Digitized by Google

245) Jede Kante $= 2'$.

246) Basisseite $= 2{,}4'$; Höhe $= 9{,}6'$.

247) Seite der Basis $= 3{,}3'$; Höhe $18{,}3'$.

248) Seite der Basis $= 6'$.

249) Entfernung von der Spitze $= \frac{h}{2}\sqrt[3]{4}$.

250) Abstand von der Spitze $= 4{,}6279'$.

251) Kubikinhalt $= 157{,}464^{c'}$.

252) Kante $= 1{,}8'$.

253) Kubikinhalt $= \frac{a^2h^3}{3\left(b^2-\frac{a^2}{2}\right)} = \frac{2a^2h^3}{3(2b^2-a^2)}$

254) Kubikinhalt $= 1009{,}9726^{c'}$.

255) Die Kanten sind $1'\ 6''$ und $2'\ 7''$ lang.

c) Ueber das Gewicht.

256) Gewicht der Pyramide $=$ 264 Ctr. 60 ℔.

257) Gewicht $= 147995201\frac{1}{4}$ Ctr.

258) Gewicht des Grabsteins $=$ 3373 ℔ 21 Loth.

259) Höhe der Pyramide $= 2{,}34'$.

260) a) 32340 preuß. ℔; b) 21707 bayr. ℔; c) 24598 würtemb. ℔.

261) Seite der Basis $= 1{,}343'$ oder $1'\ 4''\ 1'''$.

262) Höhe der Pyramide $= 1{,}975'$.

263) Höhe der Pyramide $= 5{,}63'$.

264) Jede Kante $= 3{,}28'$.

265) Die eine ist $2\frac{1}{2}'$, die andere $7\frac{1}{2}'$ hoch.

B. Berechnung der abgekürzten Pyramide.

a) Ueber einige allgemeine Bestimmungen.

266) Inhalt der Grundfläche $= \frac{G.s^2}{S^2}$

267) Inhalt der Durchschnittsfläche $= \frac{G.h'^2}{H^2}$

268) Die entsprechende Seite $= S\sqrt{\frac{g}{G}}$

Digitized by Google

269) Inhalt der Schnittfläche = 1,9044 □′.

270) Entfernung von der Basis = 9,494′.

271) a) Höhe der Ergänzungspyramide = $\frac{H.s}{S}$

b) " " abgekürzten Pyramide = $\frac{H(S-s)}{S}$

272) Höhe der Pyramide = 31′.

273) Inhalt der Durchschnittsfläche = 3,2776 □′.

274) Höhe der vollständigen Pyramide = $\frac{h\sqrt{G}}{\sqrt{G}-\sqrt{g}}$

275) Inhalt der Durchschnittsfläche = $\frac{1}{4}(G+g+2\sqrt{G.g})$

276) Inhalt der Schnittfläche = 5,0625 □′.

b) Ueber die Oberfläche.

277) Inhalt des Mantels = $\frac{n.h}{2}(S+s)$

278) Inhalt des Mantels = 158,1 □′.

279) Oberfläche = 538,49 □′.

280) Oberfläche = $S^2+s^2+(S+s)\sqrt{(S-s)^2+4h^2}$

281) Oberfläche = 181,824 □′.

282) Höhe des Körpers = 8′.

283) Die Seiten der Grundflächen sind 1,5′ und 4,5′, die Höhe = 12′.

284) Seite der andern Grundfläche = 1,6826′.

285) Die Seiten sind 5′ und 8′ lang.

c) Ueber den Kubikinhalt.

286) Kubikinhalt = $\frac{1}{3}(G.H-g.h)$.

287) Kubikinhalt = 216,79 c′.

288) Inhalt der Schnittfläche = $\frac{1}{H^2}\sqrt{[GH(GH-3k)^2]}$

290) Kubikinhalt = 183 c′.

291) Kubikinhalt = 107,3 c′.

292) Kubikinhalt = 208,215 c′.

293) Kubikinhalt = 58,24 c′; Preis des Stammes = 52 fl. 40 kr.

Digitized by Google

294) Kubikinhalt $= \frac{h}{3}(S^2+s^2+S.s)$

295) Kubikinhalt $= 3{,}584^{c'}$.

296) 935,6564 Quadratruthen.

297) Kubikinhalt $= 63^{c'}\ 484^1/_8{}^{c''}$.

298) Der Behälter faßt 4941 Maas.

299) Kubikinhalt $= 1364{,}352^{c'}$.

300) Kubikinhalt $=$

$$(S^2+s^2+S.s)\frac{h\sqrt{3}}{12} = 0{,}14433\,h(S^2+s^2+S.s)$$

301) Höhe der Pyramide $= 9{,}12'$.

302) Höhe des Körpers $= 4{,}2'$.

303) Entfernung $= \frac{h}{S-s}\left(S-\sqrt[3]{\frac{S^3+s^3}{2}}\right)$

304) In einer Entfernung von 7,245′.

305) Inhalt der abgekürzten Pyramide $= 12{,}515^{c'}$.

306) Seite der größern Basis $= 6'$.

307) Seite der andern Basis $= -\frac{S}{2}+\sqrt{3\left(\frac{k}{h}-\frac{S^2}{4}\right)}$

308) Inhalt der größern Grundfläche $=$

$$\frac{6k-gh-\sqrt{3gh(4k-gh)}}{2h}$$

309) Kleinere Basis $= \frac{6k-G.h-\sqrt{3Gh(4k-G.h)}}{2h}$

310) Inhalt der Basis $= 144\,\square'$.

311) Die Seiten der Grundflächen sind 3′ und 5′ lang.

312) Inhalt der Schnittfläche $=$

$$\sqrt[3]{\left[G\sqrt{G}-\frac{n}{m}(G\sqrt{G}-g\sqrt{g})\right]^2}$$

Entfernung dieser von der größern Grundfläche $=$

$$\frac{h}{\sqrt{G}-\sqrt{g}}\left[\sqrt{G}-\sqrt[3]{(G\sqrt{G}-\frac{n}{m}(G\sqrt{G}-g\sqrt{g}))}\right]$$

313) Inhalt der Schnittfläche $= 5{,}407\,\square'$; Abstand dieser von der Basis $= 1{,}4'$.

Digitized by Google

d) Ueber das Gewicht.

314) Gewicht = 217 ℔ 5 Loth.

315) Gewicht = 30 Ctr. 31 ℔.

316) Seite der größern Grundfläche = 6″.

317) Spec. Gew. = 5.

318) Seite der größern Basis = 3′, die der kleinern = 2′ und die Höhe = 6′.

319) Höhe = 4,6′ und 9,2′.

§. 6. Aufgaben über die Berechnung des regulären Tetraeders.

a) Ueber die Oberfläche.

320) Oberfläche = 10,825 □′.

321) Oberfläche = $s^2\sqrt{3}$.

322) Kante = 1,5′.

323) Oberfläche = $\frac{3h^2}{2}\sqrt{3}$.

324) Oberfläche = 58,617375 □′.

325) Oberfläche = 100,805 □′.

326) Bei dem einen: Seite = 1,1469′ und Oberfläche = 2,2782 □′; bei dem andern: Seite = 2,9469′ und Oberfläche = 15,0417 □′.

b) Ueber den Kubikinhalt und das Gewicht.

328) Kubikinhalt = 5,498409 c′.

329) Oberfläche = 27,712 □′.

330) Kubikinhalt = 38,020864 c′.

331) Kubikinhalt = $\frac{h^3}{8}\sqrt{3}$.

332) Kante = 13,22′; Kubikinhalt = 272,285 c′.

333) Die Kante des einen ist 2′, die des andern 3′ lang.

334) Kante = 6′.

335) Die Kante des einen = 1,2′; die des andern = 1,8′.

Digitized by Google

§. 7. Aufgaben über die Berechnung des regulären Oktaeders.

a) Ueber die Oberfläche.

336) Oberfläche = 8,86784 □′.

337) Oberfläche = $2s^2\sqrt{3}$.

338) Kante = 2,5′.

339) Oberfläche = 62,352 □′.

b) Ueber den Kubikinhalt.

340) Kubikinhalt = 1,590975 c′.

341) Kubikinhalt = $\frac{s^3}{3}\sqrt{2}$.

342) Kante = 3′.

343) Kante = 1,37′.

344) Kante = 3′, Kubikinhalt = 12,7278 c′.

§. 8. Aufgaben über die Berechnung des regulären Dodekaeders.

346) Oberfläche = 5,16 □′; Kubikinhalt = 0,957875 c′.

347) Kante = 5′; Kubikinhalt = 957,875 c′.

348) Kante = 1,2′; Oberfläche = 29,7216 □′.

§. 9. Aufgaben über die Berechnung des regulären Ikosaeders.

349) Oberfläche = 183,2456 □′.

350) Oberfläche = $5s^2\sqrt{3}$.

351) Kante = 1,5′.

353) Kante = 6′.

354) Die Kanten sind 1′ und 2′ lang.

§. 10. Aufgaben über das schief abgeschnittene dreiseitige Prisma.

356) Kubikinhalt = 84,8 c′.

357) Kubikinhalt = 32,42304 c′.

358) Kubikinhalt = 26588 c′.

Digitized by Google

359) Inhalt des Durchschnitts = $3^3/_4$ □′.

360) Die parallelen Kanten sind: 8,4′; 10,8′ und 16,8′.

361) Die parallelen Kanten sind: 5′; 5,6′ und 6,2′.

Abschnitt III.

Aufgaben über die Berechnung der runden Körper.

---

§. 11. Aufgaben über die Berechnung des Cylinders.

A. Berechnung des vollen Cylinders.

a) Ueber die Oberfläche.

362) Mantel = 45,528 □′.

363) Mantel = 141,3 □′; Oberfläche = 151,1125 □′.

364) Krumme Oberfläche = 248,688 □′.

365) Mantel = $93^1/_2$ □′; Oberfläche = $112^3/_4$ □′.

366) Preis des Anstrichs = 4 fl. 42 kr.; Oberfläche = 151 □′ $11^1/_4$ □″.

367) 377,585 □′ Blech.

368) Um 25,61 □′ größer.

369) Höhe des Cylinders = 25′.

370) Durchmesser = 2,1′.

371) Durchmesser = $2^1/_2$′.

372) Durchmesser = 5′.

373) Durchmesser = $2^1/_2$′; Höhe = 15′.

374) Umfang = 12,56′; Höhe = 33′.

375) Entweder: Halbmesser = 0,65′ und Höhe = 8,96′,
oder: „ = 0,37′ „ „ = 16,52′.

376) Umfang = 11′.

377) 18,27 □′ und 5,73 □′ Blech.

378) Das eine wird 4,5′ hoch und 1,32′ weit, das andere 3,5′ hoch und 1,026′ weit.

Digitized by Google

b) Ueber den Kubikinhalt.

379) Kubikinhalt = 162 c′.

380) Kubikinhalt = 84,78 c′.

381) Oberfläche = 240,21 □′; Kubikinhalt = 251,2 c′.

382) Kubikinhalt = 763,02 c′.

383) Kubikinhalt = 873,43025 c′.

384) Abfall = 43,2 c′.

385) Kubikinhalt = 893,2 c′.

386) Kubikinhalt = $\frac{P^2 h}{4\pi}$

387) Preis = 47 fl. 9¾ kr.

388) Holzabfall = 27,2168 c′.

389) Der Stamm kostet 39 fl. 17 kr.

390) 137,3436 Maas.

391) 264mal.

392) 20 Kreuzer (nahezu).

393) 2712,96 Maas.

394) Höhe = 21⅓′.

395) Durchmesser = 3,748; Umfang = 11,779′.

396) Durchmesser = 6,818′; Umfang = 21,408′.

397) Höhe des Wasserstandes = 5″ 3,3‴.

398) Weite = 2″ 2,2‴.

399) 4,3042 □′ Blech.

400) Höhe des Sesters = 7″.

401) Halbmesser = 0,242′, das nöthige Blech = 1,7049□′.

402) Entfernung des Wasserspiegels vom Boden = 0,974′.

403) Abstand des Wasserspiegels = 1,284′.

404) Kubikinhalt = $\frac{M^2}{4\pi h}$

405) Kubikinhalt = $\frac{d}{8}(2O - \pi d^2)$

406) Oberfläche = $6\pi r^2$; Kubikinhalt = $2\pi r^3$.

407) Umfang = 4⅝′; Holzabfall = 19,26 c′.

Digitized by Google

408) Durchmesser $= 7^1/_2''$; Höhe $= 1'\ 7^1/_2''$.

409) Kubikinhalt $= \frac{O}{3}\sqrt{\frac{O}{6\pi}}$

410) Kubikinhalt $= \frac{P}{8\pi^2}(2\pi O - P^2)$

411) Durchmesser $= 2'$ und die Höhe $= 8'$, oder Durchmesser $= 4{,}74'$ und die Höhe $= 1{,}42'$.

412) Oberfläche $= 2\left(\frac{K}{h} + \sqrt{\pi K h}\right)$

413) Durchmesser $= \frac{4K}{M}$; Höhe $= \frac{M^2}{4\pi K}$

414) Durchmesser $=$ Höhe $= \sqrt[3]{\frac{4K}{\pi}}$; Oberfläche $= 6\pi\sqrt[3]{\left(\frac{K}{2\pi}\right)^2} = 3\sqrt[3]{2\pi K^2}$

415) 113,04 Maas.

416) Kubikinhalt $= 31{,}4^{c'}$.

417) Durchmesser $= -h + \sqrt{\left(\frac{2O}{\pi} + h^2\right)}$

Kubikinhalt $= \frac{h}{2}\left[\pi h^2 + O - h\sqrt{\pi(2O + \pi h^2)}\right]$

418) Durchmesser $= 2^1/_2'$; Höhe $= 21'$.

419) Das eine $1{,}354^{c'}$, das andere $2{,}646^{c'}$.

420) Das eine ist $1^1/_2'$, das andere $2'$ tief.

c) Ueber das Gewicht.

421) Gewicht der Marmorsäule $= 117^1/_5$ Ctr.

422) Gewicht des Mühlsteins $= 1804{,}1184$ ℔.

423) Höhe $= 9''\ 1'''$.

424) Dicke der Stäbe $= 3{,}88'''$.

425) Durchmesser $= 4{,}72''$.

426) Der innere Durchmesser $= 0{,}64'''$.

427) $0{,}6116'$, $0{,}6838'$ und $0{,}749'$ lang.

428) Durchmesser $= 1{,}023'$.

429) Um $0{,}127'$.

Digitized by Google

430) Durchmesser = 1′, Länge = 5′, oder auch: Durchmesser = 3,1622′, Länge = 0,5′.

431) Durchm. = Höhe = 0,524′; Gew. = 53,7166 ℔.

432) Die eine Walze ist 1,86′, die andere 2,557′ lang.

433) Länge = 2′ und 3′, die entsprechende Dicke = 1,279′ und 1,919′.

B. Berechnung des hohlen Cylinders.

434) Kubikinhalt = 15,2604 c′.

435) Die Kosten der Leitung betragen = 5183 fl.

436) Kubikinhalt der Eisenmasse = 7 c′ 65 c″.

437) Länge der Leitung = 2800′.

438) Radius des hohlen Raumes = $\sqrt{\left(R^2 - \frac{K}{\pi L}\right)}$

C. Berechnung des schief abgeschnittenen Cylinders.

439) a) Mantel = $\pi d\left(\frac{H+h}{2}\right)$

b) Kubikinhalt = $\frac{\pi d^2}{8}(H+h)$

440) Kubikinhalt = 102,872 c′.

441) Kubikinhalt = 25,12 c′.

442) Die Inhalte der Theile sind: 314 c″ und 5,966 c′.

443) Kubikinhalt dieses Theils = 2,378 c′.

444) Durchmesser = 7″.

§ 12. Aufgaben über die Berechnung des Kegels.

A. Berechnung des vollständigen Kegels.

a) Ueber die Oberfläche.

445) Inhalt des Mantels = 96,875 □′ = $96\frac{7}{8}$ □′.

446) Oberfläche = $\pi r(r+s)$

447) Inhalt des Mantels = 1,4946 □′; Oberfläche = 1,8576 □′.

448) Oberfläche = 87 □′ $13\frac{1}{2}$ □″.

449) Oberfläche = 59 □′ 66 □″.

Digitized by Google

450) Oberfläche $= 383^5/_8 \square'$.

451) Oberfläche $= \frac{3\pi s^2}{4}$

452) Mantel $= 153{,}3462 \square'$; Oberfläche $= 181{,}6062 \square'$.

453) Oberfläche des Kegels: Oberfläche des Cylinders $= b+\sqrt{(4a^2+b^2)} : 2(2a+b)$.

454) Oberfläche $= \pi r\left(r+\sqrt{(r^2+h^2)}\right)$

455) Oberfläche $= 38{,}2568 \square'$.

456) Oberfläche $= g+\sqrt{g(g+\pi h^2)}$

457) Oberfläche $= \pi\left(s^2-h^2+s\sqrt{(s^2-h^2)}\right)$

458) Seite $= 15'$; Höhe $= 14{,}85'$.

459) a) Durchmesser $= 16'$; b) Höhe $= 15'$.

460) a) Seite $= 8'\ 5''$; b) Durchmesser $= 8'$.

461) a) Durchmesser $= -s+\sqrt{\frac{\pi s^2+4O}{\pi}}$

b) Höhe $= \sqrt{\frac{s(\pi s+\sqrt{\pi(\pi s^2+4O)})-2O}{2\pi}}$

462) Durchmesser $= 4'$; Höhe $= 3^3/_4'$.

463) Halbmesser $= O\sqrt{\frac{1}{\pi(\pi h^2+O)}}$

464) Halbmesser $6'$.

465) Durchmesser $= 2\sqrt{\frac{O}{3\pi}}$

466) Höhe $=$ Durchmesser $= \sqrt{\frac{4O}{\pi(1+\sqrt{5})}} =$

$\sqrt{\frac{O}{\pi}}(\sqrt{5}-1)$

467) Durchmesser $= 2{,}8'$; Höhe $= 11{,}91'$.

468) Durchmesser der Basis $= 4'$.

469) Durchmesser $= 4'$; Seite $= 10'$.

470) a) Höhe $= 2'\ 4''$; b) Durchmesser $= 1'\ 4''$.

Digitized by Google

471) Durchmesser $= \sqrt{\frac{O}{\pi}\cdot\frac{m}{n}\left(-\frac{m}{n}+\sqrt{\left(\frac{m}{n}\right)^2+4}\right)}$;

Höhe $= \sqrt{\frac{O}{\pi}\cdot\frac{n}{m}\left(-\frac{m}{n}+\sqrt{\left(\frac{m}{n}\right)^2+4}\right)}$

472) Durchmesser $= 1'$; Seite $= 8'$.

b) Ueber den Kubikinhalt.

473) Kubikinhalt $= 16^{c'}$.

474) Kubikinhalt $= 11^{c'}\ 775^{c''}$.

475) Kubikinhalt $= 0{,}40192^{c'}$.

476) Kubikinhalt $= 14{,}13^{c'}$.

477) $1403{,}58^{c'}$ Sand.

478) Abfall $= 28{,}7466^{c'}$.

479) Kubikinhalt $= 5{,}547333^{c'}$.

480) Kubikinhalt $= 328^{c''}\ 67^1/_5{}^{c'''}$.

481) Kubikinhalt $= 30{,}26123^{c'}$.

482) Kubikinhalt $= 497{,}140875^{c'}$.

483) a) Oberfläche $= 15{,}2604\,\square'$; b) Kubikinhalt $= 3{,}43359^{c'}$.

484) a) Oberfläche $= 10{,}6822\,\square'$; b) Kubikinhalt $= 2{,}746872^{c'}$.

485) Kubikinhalt $= 1{,}11^{c'}$.

486) Halbmesser der Grundfläche $= 5{,}62'$.

487) Höhe des Kegels $= 15'$.

488) Bogen des Netzsektors $= 3'\ 7''\ 3'''$, der zugehörige Radius $= 1'\ 6''\ 1^3/_{10}{}'''$; Centriewinkel $= 132^0\ 33'\ 41''$.

489) Seite $= 1{,}385'$.

490) Höhe des Haufens $= 36'$.

491) Kubikinhalt $= \frac{r}{3}\sqrt{O(O-2\pi r^2)}$

492) Kubikinhalt $= 514{,}8^{c'}$.

493) Kubikinhalt $= \frac{g}{3}\sqrt{\frac{(M+g)(M-g)}{\pi g}}$

Digitized by Google

494) Kubikinhalt $= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{O(O-M)(2M-O)}{\pi}}$

495) Kubikinhalt $= \frac{\pi d^3}{24}$

496) 3,13 Maas.

497) Oberfläche $= \frac{3\pi a^2}{4}$; Kubikinhalt $= \frac{\pi a^2}{24}\sqrt{3}$.

498) Radius des Netzes $= 1{,}8776'$; Centriewinkel $= 180^0$.

499) Cylinder : Kegel $= 3 : 1$.

500) Entfernung $= \frac{h}{d}\sqrt{(a^2+b^2)}$

Kubikinhalt des Abschnitts $= \frac{\pi h}{12d}(a^2+b^2)\sqrt{(a^2+b^2)}$

501) Höhe des Theiles $= 1{,}2384'$; Halbmesser des Schnittes $= 1{,}984'$.

502) Höhe $= \frac{h}{2}(2-\sqrt[3]{4})$; Radius des Schnittes $= \frac{r}{2}\sqrt[3]{4}$.

503) Entfernung von der Spitze $= h\sqrt[3]{\frac{m}{n}}$

504) Kubikinhalt $= \frac{O}{3}\sqrt{\frac{O}{\pi}}$

505) Kubikinhalt von A $= 16{,}485^{c'}$, der von B $= 6{,}28^{c'}$.

506) Kubikinhalt des andern $= 32^{c'}$.

507) Höhe des andern $= 16'$.

508) 3 Maas.

509) Die Höhen sind: $\frac{d\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$ und $\frac{d\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$

c) Ueber das Gewicht.

510) Gewicht $= 389{,}4856$ ℔.

511) Höhe $= 1{,}535'$.

512) Halbmesser der Basis $= 4{,}48''$.

513) Durchmesser $=$ Seite $= 1{,}91'$.

514) Durchmesser bd $= 0{,}6' = 6''$.

515) Die Höhen sind: $\frac{12mP}{\pi w p d^2(m+n)}$ und $\frac{12nP}{\pi w p d^2(m+n)}$

Digitized by Google

516) Kubikinhalt = 92,51 c′.

517) Kubikinhalt = 39,2165 c′.

518) Kubikinhalt = 59,142 c′.

B. Berechnung des abgekürzten Kegels.

a) Ueber die Oberfläche.

519) Durchmesser $D = d + 2\sqrt{(s^2 - h^2)}$.

520) Umfang der kleinen Grundfläche = 48,3145′.

521) Mantelfläche $= \frac{P+p}{2} \cdot s$

522) Inhalt des Mantels = 2949,3 □′.

523) Mantel = 113,04 □′; Oberfläche = 145,225 □′.

524) Oberfläche = 314,785 □′.

525) Oberfläche $= \pi\left(R^2 + r^2 + (R+r)s\right)$

526) Mantel = 2091,24 □′, Oberfläche = 2694,905 □′.

527) Oberfläche = 81,64 □′.

528) Seite des Kegels = 36′.

529) a) Seite = 5′; b) Höhe = 4,957′.

530) a) Seite = 5,2′; b) Höhe = 4,8′.

531) Seite $= \frac{O - \pi(R^2 + r^2)}{\pi(R+r)}$

532) Seite = 5,2′.

533) Durchmesser $= -s + \sqrt{\left(s^2 + \frac{4O}{\pi} - D^2 - 2Ds\right)}$

534) Die Halbmesser sind 2′ und 0,5′ lang.

535) Radien = 5′ und 2′.

536) Größerer Durchmesser = 10′; klein. Durchm. = 6′; Seite = 8′.

537) Der eine = 3′, der andere = 1′.

538) Der größere Halbm. = 7′, der kleinere = 2′ und die Seite = 13′.

539) Der größere Halbm. = 4′, der klein. = 2′ und die Seite = 7′.

Digitized by Google

b) Ueber den Kubikinhalt.

541) Kubikinhalt = 857,22 c′.

542) Kubikinhalt = 184 c′ 946 c″.

543) Kubikinhalt = 22,19352 c′.

544) Kubikinh. = 319,495 c′; Preis d. Stammes = 127 fl. 47 kr.

545) Der Kessel faßt $326^{9}/_{10}$ Maas.

546) Man braucht 33,8115 □′ Blech und der Kessel faßt 384 Maas.

547) a) Kubikinhalt = 81,4045 c′; Preis = 40 fl. 42 kr.

548) Abfall = 101,736 c′.

549) Abfall = 48,06 c′.

550) Kubikinhalt = 91,83872 c′.

551) Kubikinhalt $= \frac{\pi}{3}(R^2+r^2+Rr)\sqrt{(s^2-(R-r)^2)}$

552) Kubikinhalt = 19,924 c′.

553) Kubikinhalt des an der kleinern Basis liegenden Theiles = 299,085 c′, der des andern = 397,995 c′.

554) Die Inhalte der 3 Theile sind, von der größern Basis an gerechnet, nach der Reihe:

$$\frac{\pi h}{81}(19R^2+r^2+7R.r);\quad \frac{\pi h}{81}(7(R^2+r^2)+13R.r) \text{ und}$$

$$\frac{\pi h}{81}(R^2+19r^2+7R.r)$$

555) Die Inhalte sind: 464,72 c′; 238,64 c′ und 87,92 c′.

556) Tiefe = 1′ 5″.

557) Halbmesser der andern Basis = 3′.

558) Umfang = 12,56′.

559) Radius $r = -\frac{R}{2}+\sqrt{\left(\frac{3k}{\pi h}-\frac{3R^2}{4}\right)}$

560) Radius $R = -\frac{r}{2}+\sqrt{\left(\frac{3k}{\pi h}-\frac{3r^2}{4}\right)}$

561) Halbmesser des Durchschnittskreises $= \sqrt[3]{\frac{R^3+r^3}{2}}$

Entfernung desselben von der Basis $= \frac{h}{R-r}\left(R-\sqrt[3]{\frac{R^3+r^3}{2}}\right)$

Digitized by Google

562) Halbmesser = 2,41′; Entfernung = 1,18′.

563) R = 6′, r = 3′.

564) D = 8″, d = 6″.

565) Die Radien sind: 1,5′ und 1′; die Höhe = 3′.

566) Die Radien = 5′ und 3′; die Höhe = 12′.

c) Ueber das Gewicht.

567) Gewicht = 206651¼ ℔.

568) Höhe = 6″.

569) Gewicht = 92,3195 ℔.

570) Spec. Gewicht = 2,3.

571) 0,832′ tief von der größern Basis aus auf dem Mantel gemessen.

572) Die Radien müssen 2″ und 1½″, die Höhe 2,98″ lang gemacht werden.

§. 13. Aufgaben über die Berechnung der Kugel und der Kugeltheile.

A. Berechnung der ganzen Kugel.

a) Ueber die Oberfläche.

573) Die Oberfläche wird:

für a) = 200,96□′. für d) = 572,265□′.
„ b) = 98,4704□′. „ e) = 254,34□$^{met.}$
„ c) = 1,5386□′. „ f) = 155,623424□$^{met.}$

574) a) Oberfläche = 45,3647□′; b) = 70,88235□′.

575) Oberfläche = 28,26□′.

576) Oberfläche = 24,64□′.

577) Oberfläche = 4,62□′.

578) Oberfl. der Erde = 9274259,9 Quadratmeilen.

579) a) Oberfl. der umgeschr. Kugel = $\frac{3}{2}\pi s^2$; b) der eingeschr. = $\frac{1}{6}\pi s^2$.

580) Differenz = 7,942□′.

Digitized by Google

581) Oberfläche = 21,1937 □′.

582) a) Oberfl. der umschriebenen Kugel = $2\pi s^2$; b) der eingeschriebenen = $\frac{2}{3}\pi s^2$.

583) a) Oberfläche der umschriebenen Kugel = $\frac{\pi s^2}{2}(5+\sqrt{5})$ = 11,3605.s^2.

b) Oberfl. d. eingeschr. Kugel = $\frac{\pi s^2}{6}(7+3\sqrt{5})$ = 7,174.s^2.

584) a) Oberfl. d. umschr. Kugel = $\frac{\pi s^2}{2}(9+3\sqrt{5})$ = 24,662.s^2.

b) Oberfl. d. eingeschr. K. = $\frac{\pi s^2}{10}(25+11\sqrt{5})$ = 15,573.s^2.

585) Der Durchmesser ist:

für a) = 2′. für c) = 5′.
„ b) = 2,236′. „ d) = 7met.

586) Halbmesser = 5,14′.

587) Seite = 5′.

588) Kubikinhalt des Würfels = 0,527997c′.

589) Seite = 3,872′.

590) Durchmesser = 1′; Umfang = 3,14′; Oberfläche = 3,14 □′.

591) Oberfl. der einen = 28,26 □′, der andern = 113,04 □′.

592) a) Durchmesser = $2\sqrt{\frac{a}{3\pi}}$; b) Oberfläche = $\frac{4a}{3}$.

593) Die Durchmesser sind: $\frac{S}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{2O-\pi S^2}{\pi}\right)}$ und $\frac{S}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{2O-\pi S^2}{\pi}\right)}$

594) Halbmesser = 1′; Oberfläche = 12,56 □′.

595) Seite des Würfels = 2,09′; Durchm. d. Kugel = 2,89′.

6) Ueber den Kubikinhalt.

596) Der Kubikinhalt wird:

für a) = 57,87648c′. für d) = 73,58485c′.
„ b) = 381,51c′′. „ e) = 68,607174c′.
„ c) = 47,688c′′. „ f) = 11,987632c. met.

Digitized by Google

597) Kubikinhalt = $636^{c''}\ 374^{c'''}$.

598) Oberfl. = 44,17875 □′; Kubikinhalt = $27{,}611718^{c'}$.

599) Kubikinhalt = $47^{c''}\ 688^{c'''}$.

600) Kubikinhalt = $1{,}47998^{c'}$.

601) Kubikinhalt = $\frac{O}{6}\sqrt{\frac{O}{\pi}}$.

602) Kubikinhalt = $310{,}464^{c'}$.

603) Kubikinhalt der Erde = 2656457181,37 Kubikmeilen.

604) Kubikinhalt = $523^1/_3{}^{c''}$.

605) Würfel: Kugel = $\pi\sqrt{6} : 6\sqrt{\pi}$.

606) Der Kessel faßt 301,43 Maas.

607) Die Kugeln verhalten sich wie $1 : 8 : 27 : 64 : n^3$.

608) Kubikinhalt = $41{,}568^{c''}$.

609) Um $459{,}4^{c''}$ größer.

610) Abfall = $357^{c''}$.

611) Unterschied = $0{,}7208^{c'}$.

612) Unterschied = $1{,}40908^{c'}$.

613) Um $1{,}0071^{c'}$ größer.

614) Kubikinhalt des Kegels = $225{,}798^{c''}$.

615) a) Im Verhältniß von 2 : 3 : 2.
b) " " " 6 : 9 : 4.
c) " " " 6 : 9 : 4.

616) a) wie $2 : \sqrt{5} : 2$.
b) wie $6 : 1+2\sqrt{5} : 4$.
c) wie 3 : 1 : 2.

617) Kubinkinhalt der größern Kugel = $113{,}04^{c'}$, der der kleinern = $33{,}493^{c'}$.

618) Der Durchmesser ist:

für a) = 12′.	für d) = 3,6′.
" b) = 6″.	" e) = $1{,}8^{met.}$
" c) = 9′.	" f) = $0{,}3^{met.}$

619) Durchmesser des Mondes = 466,5 Meilen.

620) Durchmesser = $2'\ 7''\ 6'''$.

621) Wie $6 : \sqrt[3]{36\pi}$ oder = $\sqrt[3]{6\pi^2} : \pi$.

Digitized by Google

622) Durchmesser $= \sqrt[3]{(d^3+d'^3+d''^3)}$.

623) Halbmesser $= 0{,}62' = 6'\ 2''$.

624) Oberfläche $= 13{,}86\,\square'$.

625) Halbmesser $= 1{,}49'$.

626) Durchmesser der andern Kugel $= D\sqrt[3]{\frac{n}{m}}$.

627) Wie $\sqrt[3]{m^2} : \sqrt[3]{n^2}$.

628) Wie $m\sqrt{m} : n\sqrt{n}$.

629) Bei der einen ist der Durchmesser $= 1'\ 2''$ und der Inhalt $= 904{,}3\,\square''$, bei der andern ist der Durchmesser $= 8''$ und der Inhalt $= 267{,}9\,\square''$.

630) Die Durchmesser sind $4'\ 2''$ und $3'\ 5''$ lang.

631) Durchmesser $= 1'\ 2''$.

632) Wandstärke $= 4''$.

633) Die Durchmesser sind $3'$ und $2'$ lang.

c) Ueber das Gewicht.

634) Gewicht der Kugel $= 876{,}263$ ℔.

635) Gewicht $= 31$ Ctr. $79^1/_5$ ℔.

636) Gewicht $= 206{,}727$ ℔.

637) Gewicht $= 255{,}694$ ℔.

638) Durchmesser $= 6''\ 1'''$.

639) Man erhält 7832 kleinere Kugeln.

640) Halbmesser $= 1''\ ^9/_{10}'''$.

641) 460 Bleikugeln.

642) Dicke der Eisenmasse $= 2''$.

643) Dicke der Hohlkugel $= 1^1/_2'''$.

644) a) Die Durchmesser $= 3'$ und $6'$; b) die Gewichte $= 3815$ ℔ und $24416{,}64$ ℔.

645) Halbmesser $= 3''$.

646) Von A $= 182{,}56$ ℔, von B $= 17{,}44$ ℔.

647) Spec. Gewicht $= 7{,}2$.

648) Die Durchmesser sind: $0{,}1839'$; $0{,}3678'$; $0{,}5517'$.

Digitized by Google

649) 223344 Stück; Durchmesser eines Korns = 1‴.

650) Wanddicke = 7,9‴.

651) Dicke der Wand = 2″.

B. Berechnung der Kugeltheile.

1) Berechnung der Kugelhaube.

652) Inhalt der Haube = 56,52 □′.

653) Inhalt der Haube = 2,16 □′.

654) Haube $= 2\pi R\left(R - \sqrt{(R^2 - r^2)}\right)$.

655) Haube = 2,16 □′.

656) Haube $= 2\pi\left(a^2 + r^2 - a\sqrt{(a^2 + r^2)}\right)$.

657) Haube = 77,3136 □′.

658) Halbmesser = $2\frac{1}{2}$′.

659) Abstand der Schnittfläche vom Mittelpunkte = 1′; Radius des Schnitts = 2,4′.

660) Höhe der Haube = 9″; Durchmesser des Begrenzungskreises = 3′; Halbmesser der Kugel = 1′ 7″.

661) Halbmesser des Durchschnittes = 2′.

662) Halbmesser der Kugel = 3′; Höhe der Haube = 1′.

663) Jeder = 11,14′.

2) Berechnung des Kugelsektors.

664) Oberfläche des Sektors = 45,7184 □′.

665) Oberfläche $= \pi R\left(2h + \sqrt{h(2R - h)}\right)$.

666) Oberfläche $= \pi R\left[r + 2\left(R - \sqrt{(R^2 - r^2)}\right)\right]$.

667) Oberfläche = 5,72447 □′.

668) Oberfläche = 1,256 □′.

669) Durchmesser der Kugel = 3′.

670) Kubikinhalt = 84,78 ☐′.

671) Kubikinhalt $= \frac{2\pi R^2}{3}\left(R - \sqrt{(R^2 - r^2)}\right)$.

Digitized by Google

672) Kubikinhalt $= 2{,}830186^{c\prime}$.

673) Kubikinhalt $= \frac{2\pi}{3}\left[(a^2+r^2)\left(\sqrt{(a^2+r^2)}-a\right)\right]$.

674) Kubikinhalt $= 2{,}830186^{c\prime}$.

675) Kubikinhalt $= 8{,}37333^{c\prime}$.

676) Höhe der Haube $= \frac{6K}{\pi D^2}$.

677) Höhe $= 5''$.

678) Durchmesser $= 5'$.

679) Halbmesser $= 2{,}5'$.

3) Berechnung des Kugelsegmentes.

680) Oberfläche $= 5{,}495\,\square'$.

681) Oberfläche $= \pi\left[r^2+2R\left(R-\sqrt{(R^2-r^2)}\right)\right]$.

682) Oberfläche $= 46{,}3464\,\square'$.

683) Oberfläche $= 11{,}5866\,\square'$; Kubikinhalt $= 2{,}41623^{c\prime}$.

684) Oberfläche $= \pi(h^2+2r^2)$; Kubikinh. $= \frac{\pi h}{6}(h^2+3r^2)$.

685) Oberfläche $= 11{,}5866\,\square'$; Kubikinh. $= 2{,}41623^{c\prime}$.

686) Kubikinhalt des Segments $= \frac{\pi h^2}{3}(3R-h)$.

687) Kubikinhalt $= 1{,}46952^{c\prime}$.

688) Die Inh. beider Theile sind $0{,}850416^{c\prime}$ und $7{,}326664^{c\prime}$.

689) Kubikinhalt $= \frac{\pi}{3}\left[2R^3-(2R^2+r^2)\sqrt{(R^2-r^2)}\right]$.

690) Siehe Nr. 688.

691) Kubikinhalt $= \frac{\pi}{3}\left[2(a^2+r^2)\sqrt{(a^2+r^2)}-a(2a^2+3r^2)\right]$

692) Kubikinhalt $= 0{,}031341^{c\prime}$.

693) Halbmesser der Kugel $= 2'$.

694) Halbmesser $=$ Höhe $= 1{,}442'$.

695) Tiefe $= 5{,}28''$; Weite $= 1{,}056'$; Durchm. $= 1{,}32'$.

696) Durchmesser $= 1{,}848'$.

697) Tiefe des Einsinkens $= 1{,}27'$.

Digitized by Google

4) Berechnung des Kugelgürtels und der körperlichen Zone.

698) Sphär. Fläche = 22,608 □′; körperl. Zone = 20,0175 c′.

699) Gürtel = $2\pi R.d$; Kubikinhalt der Zone = $\pi d\left[R^2 - a^2 - ad - \frac{d^2}{3}\right]$.

700) Kubikinhalt der Zone = 3,4016 c′.

701) Kubikinhalt = $\pi d\left(R^2 - \frac{d^2}{3}\right)$.

702) Kubikinhalt = 9,158333 c′.

703) Kubikinhalt = 14,0254 c′.

704) Kubikinhalt = $\pi\left[R(H^2 - h^2) - \frac{H^3 - h^3}{3}\right]$.

705) Siehe Nr. 703.

706) Oberfläche = 28,5865 □′; Kubikinh. = 7,0454 c′.

707) Kubikinhalt = 45,006 c′.

708) Kubikinhalt = $\frac{\pi d}{6}\left[3(r^2 + r'^2) + d^2\right]$.

709) Kubikinhalt = 11,7447 c′.

710) Radius des andern Begrenzungskreises = 1,499′ oder nahezu = 1,5′.

711) Die Radien sind: 1′ und 2′.

712) Entfernung der größern Grundfl. vom Mittelp. = 2″.

Digitized by Google

Anhang.

I. Tafel der specifischen Gewichte einiger Körper.

1. Feste Körper.

Benennung der Körper.	Specifisches Gewicht.	Benennung der Körper.	Specifisches Gewicht.
Ahornholz, trocken . .	0,65	Kupfer, gegossen . .	8,78
Apfelbaumholz, trocken	0,75	— Draht . . .	8,87
Basalt	2,86	Lindenholz, trocken .	0,55
Bausteine, im Mittel .	2,50	Marmor	2,7 — 2,83
Birnbaumholz, trocken	0,73	Messing	8,44
Blei, gepreßt . . .	11,38	Nußbaumholz, trocken	0,66
Buchenholz, trocken .	0,73	Pappelbaumholz, dgl.	0,40
Eichenholz, Sommereiche, trocken . .	0,65	Platin	21,45
		Quarz	2,65
Eichenholz, Steineiche, trocken	0,70	Quecksilber, gefroren .	15,61
		Roßkastanienholz, trocken	0,55
Eis	0,91	Rothtanne	0,48
Eisen, geschmiedet . .	7,78	Sand	1,4—1,7
— gegossen . . .	7,20	Sandstein	2,0—2,7
— Stabeisen . .	7,84	Silber, gehämmert .	10,51
Elfenbein	1,82	— gegossen . .	10,47
Erde*), festgestampft, frisch	2,06	Stahl, ungehärtet . .	7,83
— = trocken	1,93	— gehärtet . .	7,81
Glas, grünes . . .	2,81	— Gußstahl . .	7,92
— Spiegelglas . .	2,3—2,5	Steinkohle	1,2—1,5
Gold, gehämmert . .	19,36	Ulme (Rüster), trocken	0,56
— gegossen . . .	19,25	Waizen	1,34
Granit	2,54—3	Weide, Saal-, . . .	0,53
Gyps	1,87—2,96	Ziegel, gebrannter . .	1,4—2,2
Kalkstein, dichter . .	2,70	Zink, gehämmert . .	7,86
Kiesel, gemeiner . .	2,60	— gegossen . . .	7,21
Korkholz	0,24	Zinn, gewalzt . . .	7,47
Kreide	2,30	— gegossen . . .	7,29
Kupfer, gehämmert .	9,00	Zucker, weißer . . .	1,61

*) Die mittlere Dichtigkeit unseres Erdkörpers ist 5,48 mal größer als die des Wassers.

Digitized by Google

2. Tropfbar flüssige Körper.

Benennung der Körper.	Specifisches Gewicht.	Benennung der Körper.	Specifisches Gewicht.
Alkohol, absoluter . .	0,792	Oel, Terpentin-, . .	0,79—0,87
Bier	1,034	Queckfilber	13,597
Meerwaffer	1,027	Säure, Eſſig-, conc., .	1,079
Milch	1,041	— Salz-, . . .	1,192
Oel, Baum-, . . .	0,920	— Salpeter-, . .	1,522
— Lein-, ...	0,940	— Schwefel-, conc.	1,850
— Mohn-, . . .	0,929	Wein	0,9—1,05
— Rüb-, ...	0,914	Waſſer, chemiſch rein .	1,000

3. Gasförmige Körper und Dämpfe.

Benennung der Körper.	Specifisches Gewicht.	Benennung der Körper.	Specifisches Gewicht.
Atmoſphäriſche Luft*)	1,000	Sauerſtoff	1,103
Chlor	2,440	Stickſtoff	0,976
Kohlenſäure	1,524	Waſſerdampf . . .	0,623
Queckſilberdampf . .	6,976	Waſſerſtoff	0,068

*) Die atmoſphäriſche Luft iſt 770 mal leichter als deſtillirtes Waſſer.

Digitized by Google

II. Tabelle zur Vergleichung von Kubikfußen unter einander und mit dem Kubikmeter.

Kubik-Meter *).	Pariser Kubik-F.	England, Rußland. Kubik-F.	Preußen, Dänemark, Rheinl. Kubik-F.	Bayern. Kubik-F.	Hannover. Kubik-F.	Sachsen. Kubik-F.	Braunschweig. Kubik-F.	Hessen-Kassel. Kubik-F.	Würtemberg. Kubik-F.	Baden, Nassau, Schweiz. Kubik-F.	Oesterreich. Kubik-F.	Hessen-Darmstadt. Kubik-F.	Frankfurt. Kubik-F.
1	29,17385	35,31658	32,34587	40,22350	40,12627	44,03176	43,03380	41,99374	42,52752	37,03704	31,65785	64,000000	43,42633
0,034277	1	1,21058	1,108728	1,378752	1,375419	1,509288	1,475081	1,439431	1,457727	1,269529	1,085145	2,193745	1,486968
0,028315	0,826067	1	0,915884	1,138941	1,136188	1,246773	1,218515	1,189066	1,204180	1,048715	0,896402	1,812180	1,228335
0,030916	0,901934	1,091842	1	1,243543	1,240538	1,361279	1,330426	1,298272	1,314774	1,145031	0,978730	1,983175	1,341137
0,024861	0,725294	0,878009	0,804154	1	0,997583	1,094678	1,069867	1,044010	1,057281	0,920781	0,787049	1,591108	1,078486
0,024921	0,727051	0,880136	0,806102	1,002423	1	1,097330	1,072459	1,046540	1,059842	0,923012	0,788956	1,594963	1,081105
0,022711	0,662564	0,802071	0,734603	0,913511	0,911303	1	0,977335	0,953715	0,965837	0,841144	0,718977	1,453496	0,985211
0,023237	0,677929	0,820671	0,751639	0,934695	0,932436	1,023190	1	0,975832	0,988235	0,860650	0,735651	1,487202	1,008058
0,023813	0,694719	0,840996	0,770255	0,957845	0,955530	1,048531	1,024767	1	1,012711	0,881966	0,753871	1,524035	1,033026
0,023514	0,685999	0,830440	0,760587	0,945823	0,943537	1,035371	1,011905	0,987449	1	0,870896	0,744408	1,504909	1,020058
0,027000	0,787694	0,953548	0,873339	1,086034	1,083409	1,188857	1,161913	1,133831	1,148243	1	0,854762	1,728000	1,171262
0,031588	0,921536	1,115571	1,021733	1,270570	1,267499	1,390864	1,359341	1,326488	1,343349	1,169916	1	2,021615	1,370228
0,015625	0,455841	0,551822	0,505404	0,628493	0,626973	0,687996	0,672403	0,656153	0,664492	0,578704	0,494653	1	0,678537
0,023052	0,672510	0,814110	0,745630	0,927224	0,924983	1,015011	0,992232	0,968031	0,980335	0,853770	0,729770	1,473760	1

*) Der Kubikmeter bildet die Einheit des französischen Holzmaßes und wird dann Stère genannt.
1 Kubikdecimeter = 0,001 Kubikmeter bildet unter dem Namen Liter (Litre) die Einheit des franz. Hohlmaßes. — 100 Liter = 1 Hektoliter.

Digitized by Google

III. Tabelle zur Vergleichung verschiedener Gewichte.

Frankreich. Kilogramm *).	Sachsen, Baden, Hessen-Darmstadt, Schweiz. Zollpfund.	England. Pfund. Avoir du poids Pfund.	Preußen, Hannover, Kurhessen, Braunschweig, Weimar. Pfund.	Bayern. Pfund.	Oesterreich. Pfund.	Dänemark, Norwegen. Pfund.	Schweden. Schalpfund.
1	2,000000	2,204597	2,138072	1,785714	1,785675	2,002768	2,351063
0,500000	1	1,102299	1,069036	0,892857	0,892838	1,001384	1,175532
0,453597	0,907195	1	0,969824	0,809996	0,809978	0,908451	1,066437
0,467711	0,935422	1,031114	1	0,835198	0,835180	0,936716	1,099618
0,560000	1,120000	1,234574	1,197321	1	0,999978	1,121550	1,316595
0,560012	1,120024	1,234601	1,197347	1,000022	1	1,121574	1,316624
0,499309	0,998618	1,100775	1,067559	0,891623	0,891604	1	1,173907
0,425339	0,850679	0,937702	0,909406	0,759535	0,759518	0,851856	1

*) 1 Kilogramm = dem Gewichte von 1 Liter Wasser = 1000 Gramme.

Digitized by Google

IV. Tabelle zur Vergleichung verschiedener Hohlmaaße.

Frankreich. 1 Liter.	England. 1 Gallon.	Preußen. 1 Quart.	Bayern. 1Maaskanne.	Hannover. 1 Stübchen.	Sachsen. 1 Dresdener Kanne.	Braunschweig. 1 Quartier.	Würtemberg. 1 Helleichenmaas.	Baden. Schweiz. 1 Maas.	Schweden. 1 Kanne.	Oesterreich. 1 Maas.	Rußland. 1 Stoof.
1	0,22009	0,87333	0,93543	0,25680	1,06776	1,06741	0,54435	0,66666	0,38208	0,70664	0,81369
4,54345	1	3,96797	4,25008	1,16679	4,85134	4,84975	2,47324	3,02897	1,73600	3,21062	3,69698
1,14503	0,25201	1	1,07109	0,29405	1,22262	1,22222	0,62330	0,76335	0,43750	0,80913	0,93170
1,06902	0,23528	0,93362	1	0,27453	1,14146	1,14109	0,58192	0,71268	0,40846	0,75542	0,86986
3,89395	0,85704	3,40074	3,64252	1	4,15783	4,15646	2,11968	2,59597	1,48784	2,75165	3,16849
0,93653	0,20612	0,81791	0,87606	0,24051	1	0,99967	0,50980	0,62435	0,35784	0,66180	0,76205
0,93684	0,20619	0,81818	0,87635	0,24058	1,00032	1	0,50997	0,62456	0,35795	0,66201	0,76230
1,83704	0,40432	1,60436	1,71842	0,47176	1,96153	1,96088	1	1,22469	0,70191	1,29814	1,49479
1,50000	0,33014	1,31000	1,40314	0,38521	1,60164	1,60112	0,81652	1	0,57313	1,05997	1,22054
2,61718	0,57603	2,28569	2,44819	0,67211	2,79454	2,79362	1,42467	1,74479	1	1,84943	2,12959
1,41513	0,31146	1,23588	1,32375	0,36341	1,51102	1,51053	0,77032	0,94342	0,54070	1	1,15148
1,22896	0,27049	1,07330	1,14960	0,31560	1,31224	1,31181	0,66898	0,81930	0,46957	0,86844	1

Digitized by Google

Gedruckt bei E. Polz in Leipzig.

Digitized by Google

Andeutungen

zu den

Auflösungen der Berechnungsaufgaben

aus der

ebenen und körperlichen Geometrie

von

Carl Spitz,
Lehrer an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe.

Mit 55 in den Text gedruckten Figuren.

Leipzig und Heidelberg,
C. F. Winter'sche Verlagsbuchhandlung.
1855.

Digitized by Google

Gedruckt bei E. Polz in Leipzig.

Digitized by Google

14 Sep. 23. EHW

Vorwort.

Vorliegendes Bändchen enthält kurze Andeutungen zu den Auflösungen sämmtlicher geometrischen Berechnungsaufgaben, welche von Unterzeichnetem in zwei Theilen erschienen sind, und hat vorzüglich die Bestimmung dem Lernenden, welcher diese Aufgabensammlung beim Selbstunterrichte benutzt, in zweifelhaften Fällen behilflich zu sein.

Von der Auflösung einer Aufgabe wurde immer nur so viel mitgetheilt, als eben geschehen durfte, ohne der eignen Geistesthätigkeit des Studirenden zu schaden. Dieses glaubte ich am besten dadurch zu erreichen, daß ich jedem Abschnitte die Lehrsätze voranstellte, über welche darin Aufgaben enthalten sind, um dann auf diese verweisen zu können. Hierdurch wurde noch der weitere Vortheil erzielt, daß diese Aufgabensammlung neben jedem Lehrbuche über Geometrie gebraucht werden kann, und daß das Volumen des Buches ein möglichst kleines wurde.

Auffallend mag es erscheinen, daß ich nicht, wie das gewöhnlich geschieht, die Resultate den Andeutungen, sondern den Aufgaben selbst, beigefügt habe. Zu dieser Trennung veranlaßten mich aber zwei Gründe. Erstens sollte durch diese Anordnung die Anschaffung der Aufgaben nebst den Resultaten erleichtert werden, da, meiner Ansicht nach, ohne letztere eine Aufgabensammlung ihren Zweck nicht

Digitized by Google

erfüllt; denn für den Lehrer haben sie den Nutzen bedeutender Zeitersparniß und der eifrige Schüler wird, indem er sich bestrebt zu dem angegebenen Resultate zu gelangen, sich immer mehr und mehr Fertigkeit in mathematischen Operationen erwerben nnd so zuletzt mit den geometrischen Wahrheiten und deren Anwendung ganz vertraut werden.

Zweitens geschah die Trennung der Andeutungen und Resultate auch, um die Aufgabensammlung für den Gebrauch beim Selbststudium möglichst zweckmäßig einzurichten. Sachverständige werden mit mir der Ansicht sein, daß durch Verschmelzung der Resultate und Andeutungen der Zweck nicht in so weit erreicht worden wäre, als bei der getroffenen Anordnung; denn eine bekannte Thatsache ist, daß der Lernende bei Auflösung einer vorgelegten Aufgabe zwar das erste Mal gern seine eigenen Kräfte versucht, dann das gefundene Resultat mit dem gegebenen vergleicht, aber nun, wenn beide nicht übereinstimmen, bei einer unmittelbaren Aufeinanderfolge der Andeutung und des Resultates leicht verleitet wird, jene mit seinem eigenen Produkte zu vergleichen, ohne auf's Neue seine Kräfte anzustrengen.

Carlsruhe, im Juni 1855.

Carl Spitz.

Digitized by Google

Inhalt.

Erste Abtheilung.

Seite

Andeutungen zu den Auflösungen der Berechnungsaufgaben aus der ebenen Geometrie 1

Abschnitt I.

Aufgaben über gerade Linien und Winkel im Allgemeinen §. 1—2. . . 3

Abschnitt II.

Aufgaben über die Winkel in eckigen Figuren §. 3—6. 5

Abschnitt III.

Aufgaben über die Berechnung der eckigen Figuren, welche ohne Anwendung des pythag. Lehrsatzes gelöst werden können §. 7—13. . . . 7

Abschnitt IV.

Aufgaben über die Berechnung der eckigen Figuren als Anwendung des pythag. Lehrsatzes und der daraus abgeleiteten Sätze §. 14—22. . 13

Abschnitt V.

Aufgaben über die Winkel im Kreise §. 22. 34

Abschnitt VI.

Aufgaben über die Aehnlichkeit der eckigen Figuren §. 23—24. . . . 35

Abschnitt VII.

Aufgaben über die Theilung der Flächen §. 25—28. 42

Abschnitt VIII.

Aufgaben über die Proportionallinien im Kreise §. 28—30. 58

Digitized by Google

Abschnitt IX.

Seite
Aufgaben über die Berechnung der regelmäßigen Vielecke §. 31—44. . 61

Abschnitt X.

Aufgaben über die Berechnung des Kreises und seiner Theile §. 45—54. 69

Zweite Abtheilung.

Andeutungen zu den Auflösungen der Berechnungsaufgaben aus der körperlichen Geometrie 77

Abschnitt I.

Aufgaben über das Körpermaß, das Gewicht und den Kubikinhalt der Körper im Allgemeinen §. 1—2. 79

Abschnitt II.

Aufgaben über die Berechnung der eckigen Körper §. 3—10. . . . 81

Abschnitt III.

Aufgaben über die Berechnung der runden Körper §. 11—13. . . . 109

Digitized by Google

Erste Abtheilung.

Andeutungen

zu den

Auflösungen der Berechnungsaufgaben

aus der

ebenen Geometrie.

Digitized by Google

Digitized by Google

Abschnitt I.

Aufgaben über gerade Linien und Winkel im Allgemeinen.

§. 1. Aufgaben über die gerade Linie.

1) bis 8) Die Auflösung dieser acht Aufgaben ergibt sich leicht aus der im Anhange der Aufgaben befindlichen Tab. I. und den Resultaten zu diesen Aufgaben.

9) Da 10 bad. Fuß = 3 Meter sind, so führt eine einfache Zweisatzrechnung zum Resultate. Man hat z. B. für h)

$$\left.\begin{array}{l} 10 \text{ bad. Fuß} = 3^{\text{met.}} \\ 75{,}8 \;\; " \quad\; " = x \;\; " \end{array}\right\} \; x = \frac{3 \cdot 75{,}8}{10} = 22{,}74^{\text{met.}}$$

10) Vergl. die Andeut. 9. — Für c) hat man z. B.:

$$\left.\begin{array}{l} 3 \text{ Meter} = 10 \text{ bad. Fuß} \\ 12{,}57 \;\; " = x \;\; " \quad " \end{array}\right\} \; x = \frac{10 \cdot 12{,}57}{3} \text{ u. s. w.}$$

11) a) $\left.\begin{array}{l} 10'' \text{ zehnth.} = 12'' \text{ zwölfth.} \\ 8'' \quad " \quad = x \quad " \end{array}\right\} \; x = \frac{12 \cdot 8}{10} = 9^3/_5''.$

b) $\left.\begin{array}{l} 100''' \text{ zehnth.} = 144''' \text{ zwölfth.} \\ 56''' \quad " \quad = x \quad " \end{array}\right\} \; x = \frac{144 \cdot 56}{100}$ u. s. w.

Die Auflösung der übrigen Aufgaben geschieht auf dieselbe Weise.

12) Vergl. die Andeut. zu Aufg. 11.

17) Verwandle beide Längen in Linien und dividire alsdann.

20) Bezeichne die Länge der einen Linie mit x, so ist die der andern = 2x; also z. B. für b) $3x = 5{,}43'$, $x = \frac{5{,}43}{3} = 1{,}81'$.

21) Bezeichnet x die Länge der Linie c, so muß

$$x + x + 2 + x + 6 = 29{,}6$$

sein. Bestimme hieraus x u. s. w.

22) Setze die Länge der Linie a = x u. s. w.

23) Die Länge der Linie b sei = x u. s. w.

24) Verfahre nach den vorhergehenden Andeutungen.

Digitized by Google

§. 2. Aufgaben über Winkel.

25) und 26) sind leicht nach den bei den Aufgaben angegebenen Anmerkungen * und ** zu lösen.

27) Da 90^0 Sexages. $= 100^0$ Centes., so geschieht die Aufl. durch einfache Zweisatzrechnung. Enthält der Winkel auch Minuten, so verwandle für beide Systeme den rechten und den gegebenen Winkel in solche. Für b) erhält man z. B.:

$$\left.\begin{array}{r} 5400' \text{ Ser.} = 10000' \text{ Cent.} \\ (40^0 42' =)\ 2442' \ \text{“} = x \ \text{“} \end{array}\right\} x = \frac{10000 \cdot 2442}{5400} \text{ u. s. w.}$$

Anmerk. Kürzer auch: 27′ Ser. = 50′ Cent. ꝛc. ꝛc.

Hat ein Winkel noch Sekunden, so drücke man diesen und den rechten Winkel darin aus. Für e) folgt z. B.:

$$324000'' \text{ Ser.} = 1000000'' \text{ Cent.}$$
$$211000'' \text{ Ser.} = x \ \text{“} \text{ u. s. w.}$$

Anmerk. Kürzer: 81″ Ser. = 250″ Cent. ꝛc. ꝛc.

28) Vergl. die Andeut. zur vorhergehenden Aufgabe. Erscheint das Resultat in Minuten oder Sekunden, so verwandle man diese in Grade u. s. f.

29) Addire beide Werthe!

30) und 31) Der Complementwinkel ergänzt den gegebenen Winkel zu einem R $\measuredangle$.

32) Der Supplementwinkel ergänzt den gegebenen Winkel zu 2R.

33) Nach den Lehrsätzen: Nebenwinkel betragen zusammen 2R und Scheitelwinkel sind einander gleich.

34) Nach den Sätzen über Gegenwinkel, Wechselwinkel u. s. w.

37) Der eine Winkel habe x^0, so hat der andere für a) $2x^0$, für b) $3x^0$, für c) $4x^0$ u. s. w. (vergl. Andeut. 20 u. f.).

38) Bestimme durch Subtraktion die Summe der beiden gleichen Winkel für jeden der gegebenen Fälle und hieraus durch Halbirung die Größe eines derselben.

39) Vergl. die Andeut. 38.

41) und 42) Vergl. die Andeut. zu 21, 22 u. f.

Digitized by Google

Abschnitt II.

Aufgaben über die Winkel in eckigen Figuren.

Lehrsätze.

1) Der Außenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden innern gegenüberliegenden Winkel.
2) Die Summe der drei Winkel eines Dreiecks beträgt immer 2R.
3) Die zwei an der ungleichen Seite eines gleichschenkligen Dreiecks liegenden Winkel sind einander gleich.
4) Die Summe der Umfangswinkel eines Vielecks beträgt immer doppelt so viele Rechte als das Vieleck Seiten hat weniger 4 Rechten.
5) Die Summe der Außenwinkel eines Vielecks beträgt immer 4R.
6) In jedem Parallelogramm sind die gegenüberliegenden Seiten und Winkel einander gleich.

§. 3. Winkel im Dreieck überhaupt.

43) und **44)** Vergl. Lehrs. 1.

45) und **46)** Ziehe die Summe der beiden gegebenen Winkel (nach Lehrs. 2) von 2R ab.

47) Benutze Lehrs. 2 und den Satz, daß Nebenwinkel zusammen 2R betragen.

48) $\measuredangle$ b = $\measuredangle$ c sei = x, so ist $\measuredangle$ a = 2x; also nach Lehrs. 2: $2x + x + x = 2R$ u. s. w.

49) a) $x + 3x + 4x = 2R$. Hieraus folgt $x = 22^1/_2{}^0$; also sind die Winkel: $22^1/_2{}^0$, $3.22^1/_2{}^0$ und $4.22^1/_2{}^0$.

Aehnlich ist bei b) und c) zu verfahren.

50) Der eine innere $\measuredangle$ sei = x, so ist der andere = $x + 28^0\,36'$; also nach Lehrs. 1: $2x + 28^0\,36' = 124^0\,48'$ u. s. w.

51) Nach Lehrs. 2 (vergl. Andeut. 50).

52) Die zwei Winkel seien x und y; bilde zwei Gleichungen, bestimme daraus x und y und dann nach Lehrs. 2 den dritten Winkel.

§. 4. Winkel im gleichschenkligen Dreieck.

53) Suche nach Lehrs. 2 die Summe der zwei an der ungleichen Seite liegenden Winkel und dann nach Lehrs. 3 jeden einzelnen derselben.

Digitized by Google

54) Benutze Lehrs. 3 und dann Lehrs. 2.

55) Suche den Nebenwinkel des Außenwinkels (vergl. Andeut. 33) und verfahre dann wie bei 53.

56) Rechne den Nebenwinkel des Außenwinkels und verfahre dann wie bei Aufg. 54.

57) Bestimme zuerst den anliegenden Außenwinkel, so ist jeder der zwei andern die halbe Ergänzung desselben zu 4R; oder: Rechne nach Aufg. 53 die Winkel an der ungleichen Seite und hieraus die anliegenden Außenwinkel (nach Andeut. 33).

58) Drücke die 2 an der ungleichen Seite liegenden Winkel in dem Winkel am Scheitel aus, und wende dann Lehrs. 2 an.

59) Ein Winkel an der ungleichen Seite sei $= x$, so ist der am Scheitel $= 6x$, also $6x + 2x = 2R$ (nach Lehrs. 2) ꝛc. ꝛc.

60) Ein Winkel an der ungleichen Seite wird (nach Lehrs. 2 und 3) $= 2R - 114^0$ u. s. w.

§. 5. Winkel im rechtwinkligen Dreieck.

61) Die Summe der beiden spitzen Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks ist nach Lehrs. 2 = einem Rechten.

62) Nach Lehrs. 3 und Andeut. 61.

63) Vergl. die Andeut. 61 und 49.

64) Der eine Winkel sei x, so ist der andere $= x + 18^0\,24'$, also nach Andeut. 61: $x + x + 18^0\,24' = 90^0$ u. s. w.

65) Ist der kleinere $\measuredangle = x$, so ist der andere $x + 12^0\,48'$ u. s. w. nach 64.

§. 6. Winkel im Viereck und Vieleck.

66) Die Winkel im Viereck betragen zusammen 4R.

67) a) Wende Lehrs. 5 an. — b) Rechne den anliegenden Winkel und hieraus nach 66 die Summe der 3 andern.

68) Vergl. die Andeut. 49 und 66.

69) Vergl. Lehrs. 6 und Andeut. 66.

70) Die zwei an einer Seite eines Parallelogramms liegenden Winkel betragen nach Lehrs. 4 und 6 zusammen 2R.

Digitized by Google

71) Man erhält nach Lehrsatz 4 für a) die Summe
$= 2.5R - 4R = 6R.$
Aehnlich sind die Resultate der übrigen Aufgaben zu bestimmen.

72) und 74) Suche wie in 71 zuerst die Summe aller Umfangswinkel und hieraus die Größe eines einzelnen.

73) und 75) Da die Außenwinkel eines regelmäßigen Vielecks einander gleich sind, so läßt sich nach Lehrs. 5 jeder einzelne leicht bestimmen.

76) a) Bezeichnet man die Anzahl der Seiten mit n, so ist nach Lehrs. 4 $\frac{2nR-4R}{n} = 144^0$, und hieraus $2nR - 144n = 4R$,
oder $n = \frac{4R}{2R-144} = 10.$
Auf gleiche Weise werden die übrigen Resultate bestimmt.

77) Vergl. Lehrs. 5 und Andeut. 73.

78) Vergl. die Andeut. zu Aufg. 76.

79) Nach Lehrs. 5 ($4R = 400^0$).

Abschnitt III.

Aufgaben über die Berechnung der eckigen Figuren, welche ohne Anwendung des pythagoräischen Lehrsatzes gelöst werden können.

Lehrsätze.

1) Der Inhalt eines jeden Parallelogramms ist gleich dem Produkte aus Grundlinie und Höhe.
2) Parallelogramme, sowie Dreiecke von gleicher Grundlinie verhalten sich wie ihre Höhen, und umgekehrt.
3) Der Inhalt eines Quadrats ist gleich der zweiten Potenz einer Seite desselben.
4) Der Inhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkte aus Grundlinie und Höhe.
5) Die Diagonale eines Parallelogramms theilt dasselbe in zwei congruenet Dreiecke.
6) In jedem Parallelogramm halbiren sich die Diagonalen gegenseitig und im Quadrat und in der Raute stehen sie außerdem senkrecht auf einander.

Digitized by Google

7) Der Inhalt eines Paralleltrapezes ist gleich der halben Summe der zwei parallelen Seiten multiplicirt mit ihrem senkrechten Abstande.

8) Der Inhalt eines Vierecks ist gleich dem Produkte aus einer Diagonale und der halben Summe der zwei von den gegenüberliegenden Endpunkten auf sie gefällten Perpendikel.

§. 7. Aufgaben über das Flächenmaß im Allgemeinen.

80) bis 85) Nach dem Decimalsystem ist $1\square' = 100\square''$ à $100\square'''$, ferner hat 1 bad. Morgen = 4 Viertel à $100\square^0$ à $100\square'$. — Nach dem Duodecimalsystem ist $1\square' = 144\square''$ à $144\square'''$ u. s. w.

86) und 87) Da 100 bad. Quadr.-Fuß = 9 Quadr.-Meter, so ergeben sich die Resultate durch einfache Zweisatzrechnungen.

88) und 89) a) $144\square''$ zwölfth. = $100\square''$ zehntheilig; b) $1728\square'''$ zwölftheilig = $1000\square'''$ zehntheilig.

90) bis 93) erfordern nur einfache arithmet. Operationen.

§. 8. Aufgaben über das Rechteck.

94) Die Auflös. geschieht nach Lehrs. 1.

95) Dividire mit dem Inhalt einer Platte (Lehrs. 1) in den Inhalt des zu belegenden Bodens.

96) Bestimme nach Lehrs. 1 wie viel Quadr.-Fuß der Boden des Saales beträgt und rechne hieraus die Kosten.

97) Vergl. Andeut. 95.

98) Vergl. Andeut. 96.

99) Ziehe den Inhalt der beiden Wege von dem Inhalt des Gartens ab; berücksichtige aber die, beiden Wegen zukommende, Durchkreuzungsfläche.

100) Es sind zwei Rechtecke von $4\frac{1}{2}'$ Länge und $2\frac{3}{4}'$ Breite, zwei von $3\frac{1}{4}'$ Länge und $2\frac{3}{4}'$ Breite und ein Rechteck von $4\frac{1}{2}'$ Länge und $3\frac{1}{4}'$ Breite zu beschlagen.

101) Vergl. Andeut. 99.

102) Ist nach vorherg. Andeut. zu lösen.

103) bis 105) Nach Lehrs. 1 erhält man bei gegebenem Inhalte eines Parallelogramms die eine Dimension, wenn man mit der andern in den Inhalt dividirt.

Digitized by Google

106) Dividirt man mit dem Preise einer Quadratruthe in die ganze Summe, so findet man den Inhalt des Ackers in Quadr.-Ruthen. Verfahre dann nach Andeut. 103.

107) Suche nach Lehrs. 1 den Inhalt des ersten Rechtecks und dann nach 103 die Breite des letztern.

108) Bezeichnet man die Höhe mit x, so ist die Grundlinie $= 2x$ und der Umfang $= 6x$; also $6x = 24{,}54$. Bestimme hieraus die Höhe x, dann die Grundlinie und endlich nach Lehrsatz 1 den Inhalt.

109) Verfahre ähnlich wie bei 108.

110) Die beiden anliegenden Seiten seien x und y, so ergeben sich die Gleichungen:

$$\text{I. } x + y = 8{,}2. \qquad \text{II. } x - y = 1{,}4.$$

Bestimme hieraus x und y und dann nach Lehrs. 1 den Inhalt.

111) Bezeichnet man eine Seite mit x, so ist die andere $= x + 6$, also $x + x + 6 = 48{,}6$. Suche hieraus x u. s. w.

112) Die Breite sei $= x$, so ist die Länge $= x + 3{,}2$; folglich nach Lehrs. 1:

$$x\,(x + 3{,}2) = 46{,}44 \text{ oder:}$$
$$x^2 + 3{,}2x = 46{,}44 \text{ u. s. w.}$$

113) Bezeichnet man die Grundlinie mit x, so ist die Höhe $= \frac{x + 13 - 2x}{2} = \frac{13 - x}{2}$; folglich nach Lehrs. 1:

$$x\,\frac{(13 - x)}{2} = 20{,}88.$$

Man erhält hieraus $x = 5{,}8'$ oder $= 7{,}2'$; für den ersten Werth wird die Höhe $= 3{,}6'$ und für letztern $= 2{,}9'$. Beide Resultate entsprechen der Bedingung, denn in beiden Fällen wird der Inhalt $= 20{,}88\,\square'$.

114) Ist die Höhe des kleinern Rechtecks $= x$, so muß sich nach Lehrsatz 2 verhalten: $45{,}15 : 30{,}10 = x + 4{,}8 : x$. Bestimme hieraus die Höhen und dann nach Andeut. 103 die Grundlinie.

§. 9. Aufgaben über das Quadrat.

115) Verfahre nach Lehrs. 3.

116) Suche den Inhalt des Gartens nach Lehrs. 3 und hieraus den Preis desselben.

Digitized by Google

117) Vergl. die Andeut. zu Aufg. 95.

118) Bestimme die Seite und hieraus nach Lehrs. 3 den Inhalt.

119) Nach Lehrs. 3 wird die Seite gefunden, wenn man aus dem Inhalte die Quadratwurzel zieht.

120) Verwandle die Angabe in Quadr.-Zoll, ziehe daraus die Quadratwurzel, so findet man die Seite in Zoll u. s. w.

121) a) Wie $\sqrt{144} : \sqrt{361}$ u. s. w.

122) Ziehe nach Andeut. 119 die Quadratwurzel aus der Summe der Inhalte der drei Quadrate.

123) Bestimme nach Lehrs. 1 den Inhalt des Rechtecks und verfahre dann nach Andeut. 119.

124) a) Seite $= \sqrt{2a^2}$ u. s. w.

125) Vergl. Andeut. 119.

126) Dividire mit dem Preis einer Quadratruthe in den des ganzen Platzes, um den Inhalt zu erhalten ꝛc.

127) Vergl. Andeut. 123.

128) Die Seiten der Quadrate seien x und y, so erhält man folgende zwei Gleichungen:

$$\text{I.} \quad x^2 - y^2 = 80$$
$$\text{II.} \quad (x+3)^2 - (y+3)^2 = 104.$$

Subtrahire I. von II. nachdem diese geordnet ist, bestimme aus der neuen Gleichung den Werth von x und substituire diesen in I.

129) Setzt man die Seite des einen Quadrats $= x$, so ist die des andern $= x + 12$; folglich: $(x+12)^2 - x^2 = 240$ u. s. w.

130) Sind die Seiten der Quadrate x und y, so erhält man:

$$\text{I.} \quad x^2 + y^2 = 900$$
$$\text{II.} \quad x^2 - y^2 = 252.$$

Addire beide Gleichungen u. s. w.

131) Die Seite des kleinern Quadrats sei $= x$, so ist die des andern $= 3x$; also: $x^2 + 9x^2 = 160$ u. s. w.

132) Vergl. 129.

133) Vergl. 130.

§. 10. Aufgaben über die schiefwinkligen Parallelogramme.

134) bis 136) löse nach Lehrs. 1.

137) bis 140) Vergl. die Andeut. zu 103.

Digitized by Google

141) Rechne den Inhalt des Parallelogramms und hieraus nach Andeut. 119 die Seite des Quadrats.

142) Vergl. die Andeut. 96.

143) Bezeichnet man die Höhe mit x, so folgt nach Lehrs. 1 die Gleichung: $(x + 8)\, x = 384$ oder $x^2 + 8x = 384$. Entwickle hieraus x u. s. w.

144) und 145) löse nach Lehrs. 2. (Vergl. die Andeut. 114.)

§. 11. Aufgaben über das Dreieck.

146) bis 149) Verfahre nach Lehrs. 4.

150) Bezeichnet man die Grundlinie mit G, die Höhe mit H und den Inhalt mit J, so ist nach Lehrs. 4: $\frac{G \cdot H}{2} = J$, also $G = \frac{2J}{H}$ u. s. w.

151) Aus Andeut. 150 folgt $H = \frac{2J}{G}$.

154) und 155) Vergl. die Lehrs. 5 und 6.

156) Rechne den Inhalt des Quadrats nach Lehrs. 3 und dann nach Andeut. 151 die Höhe des Dreiecks.

157) Nach Lehrs. 4 suche den Inhalt für jeden der zwei Fälle.

158) Vergl. die Andeut. zu 151.

159) Die Grundlinie sei $= x$, so ist die Höhe $2\frac{1}{2}\, x$; also nach Lehrs. 4: $2\frac{1}{2}\, x \cdot \frac{x}{2} = 67{,}2$. Bestimme hieraus die Grundlinie x u. s. w.

160) Die Höhe sei $= x$, so ist die Grundlinie $= x + 16$; folglich $x + x + 16 = 80$; woraus $x = 32$, also die Grundlinie $= 48$ u. s. w.

161) Die Grundlinie sei $= x$, so erhält man folgende Gleichung: $\frac{(x+6)(x+8)}{2} - \frac{x(x+2)}{2} = 48$ u. s. w.

162) Die Grundlinie sei $= x$, so ist die Höhe $= x + 8$, und man erhält die Gleichung: $\frac{x(x+8)}{2} = 44{,}02\ \square'$ u. s. w.

Digitized by Google

163) Bezeichnet man die Länge der Grundlinie mit x, so ist die Höhe $= \frac{3x}{2}$. Nach der Bedingung ist demnach

$$\frac{3x}{2} \cdot \frac{x}{2} = 10 \cdot \frac{3x}{2} \text{ u. s. w.}$$

§. 12. Aufgaben über das Paralleltrapez.

164) bis 166) löse nach Lehrs. 7.

167) a) Der senkrechte Abstand sei $= x$, so ist nach Lehrs. 7 $\frac{(6{,}4 + 8{,}2)\,x}{2} = 39{,}42$ u. s. w. — Aehnlich geschieht die Auflösung für b.

168) Bilde nach Lehrs. 7, wie in 167, eine Gleichung und entwickle hieraus die Parallelseite.

169) Setze die halbe Summe der zwei parallelen Seiten (d. i. die Mittellinie) $= x$, so folgt: $25{,}4 \cdot x = 510{,}54$ u. s. w.

170) Die eine Parallelseite sei $= x$, so ist die andere $= x + 8$ u. s. w. nach Lehrs. 7.

171) Die beiden parallelen Seiten sind zusammen $= 64'$. Man erhält demnach: Inhalt $= \frac{64 \cdot 30{,}4}{2} = 972{,}8\,\square'$.

172) Die Höhe sei $= 2x$, so folgt nach Lehrsatz 7:

$$\frac{(3x + 5x)\,2x}{2} = 1270{,}08 \text{ u. s. w.}$$

173) Verfahre ähnlich wie in der vorhergehenden Aufgabe.

174) Die kleinere der zwei Parallelseiten sei $= x$, so ist die andere $= x + 6$ und die Höhe $= x - 8{,}4$. Hieraus folgt nach Lehrs. 7 die Gleichung: $\frac{(2x+6)\,(x-8{,}4)}{2} = 757{,}12\,\square'$, oder $x^2 - 5{,}4x = 782{,}32$ u. s. w.

175) Verfahre ähnlich wie in vorhergehender Aufgabe.

§. 13. Aufgaben über das Trapez und die unregelmäßigen Vielecke.

176) Verfahre nach Lehrs. 8. Für a ist z. B. der Inhalt $= \frac{32 + 18}{2} + 24$ u. s. w.

Digitized by Google

177) Aus Lehrs. 8 folgt:

$$\text{Diagonale} = \frac{2 \cdot 152{,}52}{8{,}2 + 10{,}4} \text{ u. s. w.}$$

178) Setze diesen Perpendikel $= x$ und bilde nach Lehrs. 8 eine Gleichung.

179) Der eine Perpendikel sei x, so ist der andere $= x + 6$ und man erhält nach Lehrs. 8: $(x + 3)\ 25 = 275$ u. s. w.

180) Der kleinere Perpendikel sei $= 3x$, so ist:

$$\frac{3x + 5x}{2} \cdot 6x = 69{,}36 \square^0 \text{ (Lehrs. 8) u. s. w.}$$

181) Jede der 3 Linien sei $= x$ u. s. w. nach Lehrs. 8.

182) Bezeichnet man die Diagonale mit x, so sind die beiden Perpendikel $= x - 10$ und $x - 22$ und man erhält nach Lehrs. 8: $(x - 16)\ x = 2436$ u. s. w.

Anmerk. Ist der kleinere Höhenperpendikel $= x$, so ist der andere $= x + 12$ und die Diagonale $= x + 22$, folglich:

$$(x + 6)\ (x + 22) = 2436 \square' \text{ u. s. w.}$$

183) Der kleinere Höhenperpendikel sei $= x$, so ist der andere $= x + 4$ und die Diagonale $= 2x - 2$. Man erhält hiernach die Gleichung: $(x + 2)\ (2x - 2) = 164 + x\ (x + 4)$ oder: $x^2 - 2x = 168$. — Bestimme hieraus x u. s. w.

184) und 185) Rechne den Inhalt eines jeden Dreiecks mit Hülfe des Lehrs. 4, so ist die Summe aller Inhalte $=$ dem Inhalte des Vielecks.

Abschnitt IV.

Aufgaben über die Berechnung der eckigen Figuren als Anwendung des pythagoräischen Lehrsatzes und der daraus abgeleiteten Sätze.

Lehrsätze.

1) Das Quadrat über der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich der Summe der Quadrate über den beiden Katheten.

2) In jedem Dreieck ist das Quadrat einer Seite, die einem spitzen Winkel gegenüberliegt, gleich der Summe der Quadrate der zwei andern Seiten, weniger dem doppelten Rechteck gebildet aus einer dieser Seiten und

Digitized by Google

demjenigen durch die zugehörige Höhe gebildeten Abschnitte, welcher nicht an der ersten Seite liegt.

3) In jedem stumpfwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Seite, welche dem stumpfen Winkel gegenüberliegt, gleich der Summe der Quadrate der zwei andern Seiten, mehr dem doppelten Rechteck gebildet aus einer dieser Seiten und der Verlängerung derselben bis zur zugehörigen Höhe.

§. 14. Aufgaben über das rechtwinklige Dreieck.

186) Ist die Hypotenuse $= x$, so folgt nach Lehrs. 1 für a) $x^2 = 48^2 + 64^2 = 6400$, also $x = \sqrt{6400} = 80'$. Ebenso werden die übrigen Aufgaben gelöst.

187) Wie in vorhergehender Aufgabe ist: $x^2 = m^2 + n^2$ ꝛc. ꝛc.

188) a) Nach Lehrs. 1 ist, wenn man die Kathete mit x bezeichnet: $108^2 + x^2 = 135^2$, also

$$x^2 = 135^2 - 108^2 \text{ u. s. w.}$$

Auf ähnliche Weise erhält man die Resultate für die übrigen Aufgaben.

189) Nach Andeut. 188 wird $x^2 = a^2 - b^2$ ꝛc. ꝛc.

190) Die Höhe bildet die Kathete im rechtwinkligen Dreieck (vergl. 188).

191) und **192)** Suche zuerst die andere Kathete (vergl. 188) und dann den Inhalt.

193) Bestimme zuerst die andere Kathete (vergl. 150 und 151) und dann nach Lehrs. 1 die Hypotenuse.

194) Die kleinere Kathete sei $= x$, so ist die andere $= 3x$; folglich nach Lehrs. 1: $x^2 + (3x)^2 = 20^2$ u. s. w.

195) Die Kathete sei $= x$, so ist die Hypotenuse $= x + 6{,}4$; folglich: $x^2 + 12{,}8^2 = (x + 6{,}4)^2$ (Lehrs. 1) u. s. w.

196) Die Katheten seien x und $x + 5{,}3$, so ist:

$$x^2 + (x + 5{,}3)^2 = 26{,}5^2 \text{ u. s. w.}$$

197) Die kleinere Kathete sei $= x$, so ist die andere $= x + 7{,}2$ und die Hypotenuse $= x + 14{,}4$; also nach Lehrs. 1:

$$x^2 + (x + 7{,}2)^2 = (x + 14{,}4)^2 \text{ u. s. w.}$$

198) Ist die kleinere Kathete $= x$, so ist die andere $= x + 8$ und die Hypotenuse $= 1{,}4\,(2x + 8)$. — Bilde hieraus nach Lehrs. 1 eine Gleichung u. s. w.

Digitized by Google

199) Setze die eine Kathete $= x$, drücke die andern Seiten hierin aus, wie dies in vorhergehenden Aufgaben gezeigt wurde, bilde nach Lehrs. 1 eine Gleichung und bestimme hieraus die fehlenden Stücke.

200) Die Summe beider Katheten beträgt noch 35′, ist die eine also $= x$, so ist die andere $= 35 - x$ u. s. w.

201) Erste Auflösung. Bezeichnet man die eine Kathete mit x, so ist die andere $= \frac{2 \cdot 311{,}9046}{x}$ (vergl Andeut. 151 und 152). Bilde hieraus eine Gleichung u. s. w. Man erhält eine Gleichung vom vierten Grad, welche sich jedoch als quadratische auflösen läßt, indem man $x^2 = y$ setzt.

Zweite Auflösung. Setzt man die Katheten $= x$ und y, so erhält man die zwei Gleichungen:

$$\text{I.} \quad \frac{x \cdot y}{2} = 311{,}9046 \text{ (Absch. III. Lehrs. 4).}$$

$$\text{II.} \quad x^2 + y^2 = 36{,}5^2.$$

Substituirt man den Werth von y aus I. in II., so ergibt sich dieselbe Gleichung, wie bei der ersten Auflösung.

202) Erste Auflösung. Setzt man die eine Kathete $= x$, so ist die andere $= x + 62$ und es ergibt sich folgende Gleichung: $\frac{x\,(x + 62)}{2} = 23064$, woraus x, also auch die andern Seiten bestimmt werden können.

Zweite Auflösung. Bezeichnet man die eine Kathete mit x, die andere mit y, so folgt:

$$\text{I.} \quad x - y = 62$$
$$\text{II.} \quad xy = 46128.$$

Erhebt man I in's Quadrat und zählt II . 4 zu, so ergibt sich $x^2 + 2xy + y^2 = 188356$, oder wenn auf beiden Seiten die Quadratwurzel ausgezogen wird:

$$\text{III} \quad x + y = 434$$

I + III gibt $2x = 496$

$x = 248$, also

$y = 186$ u. s. w.

Digitized by Google

203) Iſt die eine Kathete $= x$, ſo erhält man die Gleichung:
$x^2 + (259 - x)^2 = (296 - x)^2$ oder
$x^2 + 74x = 20535$ u. ſ. w.

204) Bezeichnet man die eine Kathete mit x, ſo iſt die andere $= s - x$ und die Hypotenuſe $= x + d$; folglich
$(x + d)^2 = x^2 + (s - x)^2$, woraus
$x = d + s - \sqrt{(2d^2 + 2ds)}$; alſo iſt die andere Kathete $= s - x = -d + \sqrt{(2d^2 + 2ds)}$ und der Inhalt $= \frac{x(s-x)}{2} = \frac{1}{2}\left[d + s - \sqrt{(2d^2 + 2ds)}\right]\left[-d + \sqrt{(2d^2 + 2ds)}\right] = \frac{1}{2}\left[(2d+s)\sqrt{(d+s)2d} - (d+s)3d\right]$.

205) Die eine Kathete ſei $= x$, ſo iſt die andere $= s - x$ und die Hypot. $= S - x$, folglich: $(S - x)^2 = (s - x)^2 + x^2$ und hieraus $x = s - S + \sqrt{(2S^2 - 2Ss)}$. Demnach wird der Inhalt $= \frac{x(s-x)}{2} = \frac{1}{2}\left[3S(s-S) + (2S-s)\sqrt{2S(S-s)}\right]$

§. 15. Aufgaben über das gleichſchenklige Dreieck.

206) Die zur ungleichen Seite gehörige Höhe halbirt dieſe, alſo bilden die Höhe, der Schenkel und die halbe Grundlinie ein rechtwinkliges Dreieck. Beſtimme hierin die letztere (nach Lehrſ. 1) und dann den Inhalt des Dreiecks nach Abſch. III. Lehrſ. 4.

207) Bezeichnet man die halbe Grundlinie mit x, ſo iſt $x = \sqrt{(s^2 - h^2)}$, alſo der Inhalt $= h\sqrt{(s^2 - h^2)}$.

208) Beſtimme die Höhe des Dreiecks und dann den Inhalt. (Vergl. Andeut. 206.)

209) Die Höhe iſt $= \sqrt{\left(s^2 - \left(\frac{g}{2}\right)^2\right)}$, alſo der Inhalt $= \frac{g}{2}\sqrt{\left(s^2 - \frac{g^2}{4}\right)}$ oder $= \frac{g}{4}\sqrt{(4s^2 - g^2)}$.

210) Die Grundlinie iſt noch 9′ lang. Verfahre nun nach 208 und 209.

Digitized by Google

211) Ist die Grundlinie = x, so ist jeder Schenkel $= \frac{40{,}48 - x}{2}$, folglich: $\left(\frac{40{,}48 - x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 10{,}12^2$ u. s. w.

212) Jeder Schenkel ist = 15,7′. Verfahre nun nach der Andeut. zu 208.

213) Die Grundlinie sei = x, so ist die Höhe $= \frac{2 \cdot 20{,}28}{x}$ (vergl. Andeut. 151), folglich:

$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{40{,}56}{x}\right)^2 = 6{,}5^2$ oder $x^4 - 169x^2 = -6580{,}4544$.

Setzt man $x^2 = y$, so entsteht eine quadratische Gleichung; bestimme darin y und hieraus $x = \sqrt{y}$.

214) Die Grundlinie ist $= \frac{2 \cdot 593{,}0508}{28{,}12}$ (vergl. And. 150); der Schenkel ist nun leicht nach dem pythag. Lehrs. zu bestimmen.

215) Länge des Schenkels (nach Andeut. 150) $= \frac{2 \cdot 294{,}32}{20{,}8}$. Wird nun die ungleiche Seite mit x bezeichnet, so ist die zugehörige Höhe (nach Andeut. 151) $= \frac{2 \cdot 294{,}32}{x}$. Bilde nach dem pythag. Lehrsatze eine Gleichung u. s. w.

Anmerk. Man könnte auch die ungleiche Seite mit x und die zugehörige Höhe mit y bezeichnen, dann 2 Gleichungen bilden u. s. w.

216) Die Grundlinie sei = x, so ist der Schenkel = 18,7 — x, also: $(18{,}7 - x)^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 6{,}8^2$ (Lehrs. 1). Bestimme hieraus x und dann den Inhalt.

217) Der Schenkel sei = x, so ist die Höhe = 22,5 — x, und $x^2 = \left(\frac{15}{2}\right)^2 + (22{,}5 - x)^2$ u. s. w.

218) Setze die Höhe = x, so ist die Grundl. = x + 16,2, also nach dem pythag. Lehrs. $x^2 + (x + 16{,}2)^2 = 40{,}5^2$ u. s. w.

219) Ist die Höhe = x, so ist die Grundl. = 54 — x und der Schenkel = 48,6 — x; folglich:

$$x^2 + \left(\frac{54 - x}{2}\right)^2 = (48{,}6 - x)^2 \text{ u. s. w.}$$

Digitized by Google

220) Ist die eine Kathete = x, so ist auch die andere = x, also $x^2 + x^2 = 8{,}4^2$ u. s. w.

221) Die Hypotenuse ist = der doppelten Höhe = 8,4'. Verfahre nun wie bei 220.

222) Ist eine Kathete = x, so ist die Hypotenuse = 15,8 — 2x; also $(15{,}8 - 2x)^2 = x^2 + x^2$ u. s. w.

223) Ist die Kathete = x, so folgt: $\frac{x^2}{2} = 270{,}0488$ (Abschn. III. Lehrs. 4). Bestimme hieraus x und dann die Hypotenuse nach Lehrs. 1.

224) Suche wie bei 222 die Hypotenuse, so ist die Höhe halb so groß.

225) Vergl. die Andeut. zu 223 und 221.

226) Eine Kathete sei = x, so ist die Hypotenuse = x + 15; also $x^2 + x^2 = (x + 15)^2$ u. s. w.

227) Die Höhe sei = x, so ist die Kathete = 7,17 — x und die Hypotenuse = 2x; also $2(7{,}17 - x)^2 = (2x)^2$ u. s. w.

§. 16. Aufgaben über das gleichseitige Dreieck.

228) und 229) Berechne die Höhe nach dem pythag. Lehrs. aus dem Dreieck, welche diese mit der einen Seite und mit der Hälfte der andern Seite bildet, und dann den Inhalt (vergl. 230).

230) Bezeichnet h die Höhe, so ist diese = $\sqrt{s^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3s^2}{4}} = \frac{s}{2}\sqrt{3}$; also der Inhalt =

$$\frac{h \cdot s}{2} = \frac{s}{2} \cdot \frac{s}{2}\sqrt{3} = \frac{s^2}{4}\sqrt{3}.$$

231) Inhalt $= \frac{12^2}{4}\sqrt{3}$ u. s. w.

232) Die Seite sei = x, so folgt: $x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 8{,}5^2$ u. s. w.

233) Ist die Seite = x, so folgt:

$x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = h^2$ oder $x = \frac{2h}{3}\sqrt{3}$; also der Inhalt

$$= \frac{h \cdot x}{2} = \frac{h^2}{3}\sqrt{3}.$$

Digitized by Google

234) Inhalt $= \frac{2,4^2}{3}\sqrt{3}$ u. s. w.

235) Nach 230 folgt: $5,00548 = \frac{s^2}{4}\sqrt{3}$; bestimme aus dieser Gleichung die Seite s und dann die Höhe.

236) Erste Auflösung. Die Seite sei $= x$, so ist die Höhe $= x - 4$, folglich $x^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + (x-4)^2$, oder $x^2 - 32x = -64$ u. s. w.

Zweite Auflösung. Der Inhalt ist $= \frac{x(x-4)}{2}$, aber nach 230 auch $= \frac{x^2}{4}\sqrt{3}$; also $\frac{x(x-4)}{2} = \frac{x^2}{4}\sqrt{3}$ u. s. w.

237) Die Seite sei $= x$, so ist die Höhe $= 29,85 - x$. Verfahre nun ähnlich wie bei vorhergehender Aufgabe.

238) Die Höhe ist nach Andeut. $230 = \frac{s}{2}\sqrt{3}$ (wenn s die Seite bezeichnet); folglich verhält sich Seite : Höhe $= s : \frac{s}{2}\sqrt{3}$ oder $= 1 : 0,866025$.

239) Der nfache Inhalt beträgt nach 230 $\frac{n.s^2}{4}\sqrt{3}$; folglich ist $\frac{x^2}{4}\sqrt{3} = \frac{n.s^2}{4}\sqrt{3}$ oder $x = s\sqrt{n}$.

240) Wird ähnlich wie vorherg. Aufgabe gelöst.

§. 17. Aufgaben über das ungleichseitige Dreieck.

241) Die Höhe wird $= \sqrt{(65^2 - 39^2)}$, also der Inhalt $= \frac{88}{2}\sqrt{(65^2 - 39^2)}$ u. s. w.

242) Rechne in dem rechtwinkligen Dreieck adc (Fig. 1) die Kathete cd und dann aus cd und ab den Inhalt nach Abschn. 3 Lehrs. 4.

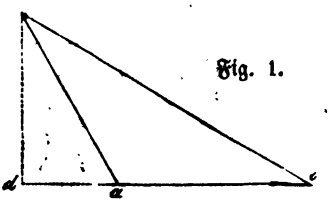


Fig. 1.

Digitized by Google

243) Bestimme zuerst in dem rechtwinkligen △ acd (Fig. 1) die Kathete ad und dann im △ bcd die Kathete bd, so ist $ab = bd - ad$ und der Inhalt $= \frac{ab \cdot cd}{2}$ u. s. w.

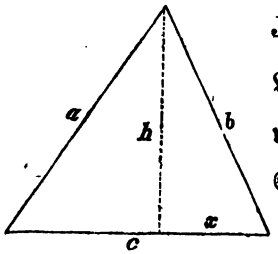
244) Nach Lehrs. 2 ist, wenn man den an der Seite 3,2 liegenden Abschn. mit x bezeichnet: $2{,}5^2 = 3{,}2^2 + 4{,}8^2 - 2 \cdot 4{,}8 \cdot x$, Bestimme hieraus x und dann den andern Abschnitt $= 4{,}8 - x$.

245) Verfahre wie bei vorherg. Aufgabe nach Lehrs. 2.

246) Rechne nach Andeut. 244 einen Abschnitt einer der drei Seiten, so bestimmt dieser und die anliegende Seite mit der Höhe, welche den Abschnitt bildet, ein rechtwinkliges Dreieck. Bestimme hierin nach dem pythag. Lehrsatze diese Höhe und dann den Inhalt des Dreiecks.

247) Beobachtet man bei der Auflösung den in vorhergehender Andeut. gezeigten Gang, so erhält man (Fig. 2):

Fig. 2.



$J = \frac{c \cdot h}{2} = \frac{c}{2}\sqrt{(b^2 - x^2)}$. Nach Lehrs. 2 ist aber: $a^2 = b^2 + c^2 - 2c \cdot x$, und hieraus $x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$.

Substituirt man diesen Werth in obigen Ausdruck für J, so folgt:

$$J = \frac{c}{2}\sqrt{\left[b^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)^2\right]} =$$

$$\frac{c}{2}\sqrt{\frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4c^2}} = \frac{1}{4}\sqrt{(2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}$$

Wenn man nun die Differenz der beiden Quadrate unter dem Wurzelzeichen in das Rechteck gebildet aus der Summe und dem Unterschiede der Seiten dieser Quadrate zerlegt, so erhält man:

$$J = \frac{1}{4}\sqrt{(2bc + b^2 + c^2 - a^2)\,(2bc - b^2 - c^2 + a^2)} \text{ oder}$$

$$J = \frac{1}{4}\sqrt{\left((b + c)^2 - a^2\right)\left(a^2 - (b - c)^2\right)}$$

Digitized by Google

Zerlegt man abermals diese zwei Faktoren, deren jeder aus der Differenz zweier Quadrate besteht, in Summe mal Unterschied der Seiten dieser Quadrate, so folgt:

$$J = \tfrac{1}{4}\sqrt{(b+c+a)\,(b+c-a)\,(a+b-c)\,(a-b+c)}$$

Setzt man nun $b+c+a$ d. i. die Summe der 3 Seiten $= S$, so ist $b + c - a = b + c + a - 2a = S - 2a$, $a + b - c = S - 2c$ und $a - b + c = S - 2b$, und obige Formel verwandelt sich daher in:

$J = \tfrac{1}{2}\sqrt{S(S-2a)(S-2c)(S-2b)}$, oder wenn man 4 als 16 unter das Wurzelzeichen bringt:

$$J = \sqrt{\frac{S}{2}\left(\frac{S}{2}-a\right)\left(\frac{S}{2}-b\right)\left(\frac{S}{2}-c\right)}\text{*)}.$$

248) Setze in 247 für $\frac{S}{2} = \frac{10{,}2 + 13{,}6 + 17}{2} = 20{,}4$, also $J = \sqrt{20{,}4 \cdot 10{,}2 \cdot 6{,}8 \cdot 3{,}4}$ u. s. w.

249) $\frac{S}{2} = \frac{8{,}43 + 5{,}67 + 6{,}3}{2}$ u. s. w.

250) Bestimme nach 247 den Inhalt des Feldes und daraus die erforderliche Menge Waizen.

251) Nach 247.

252) und 253) Rechne nach dem pythag. Lehrsatze jeden der zwei auf der dritten Seite gebildeten Abschnitte, daraus die dritte Seite und dann den Inhalt des Dreiecks.

254) Der an 50,8 liegende Abschnitt der Grundlinie ist $= \sqrt{(50{,}8^2 - 30{,}48^2)} = 40{,}64$, also der andere, wenn x die dritte Seite bezeichnet, $= x + 25{,}4 - 40{,}64 = x - 15{,}24$; demnach ist $x^2 = 30{,}48^2 + (x - 15{,}24)^2$, woraus x bestimmt werden kann u. s. w.

---

*) Durch Anwendung dieser Formel lassen sich oft weitläufige Rechnungen umgehen und da in der Folge häufig darauf verwiesen wird, so ist jedem Studirenden anzurathen, dieselbe dem Gedächtnisse wohl einzuprägen.

Digitized by Google

255) Erste Auflösung. Die zur Höhe 3′ gehörige Seite sei = x, und die andere = y, so ist:

$$\text{I.}\quad \frac{3x}{2} = \frac{6y}{2} \text{ oder } x = 2y.$$

$$\text{II.}\quad 8^2 = x^2 + y^2 - 2x\sqrt{(y^2-9)} \text{ (nach Lehrs. 2).}$$

Setzt man den Werth von x aus I in II, so folgt:

$$y^4 - \frac{496}{9}y^2 = -\frac{4096}{9}.$$

Wird $y^2 = z$ gesetzt, so findet man $z = \frac{404,9}{9}$ oder $= \frac{91,1}{9}$ also $y = \sqrt{\frac{404,9}{9}} = 6,7'\ldots$ oder $= \sqrt{\frac{91,1}{9}} = 3,16'\ldots$ und $x = 6,7 \cdot 2 = 13,4'$ oder $= 3,16 \cdot 2 = 6,32'$ u. s. w.

Zweite Auflösung. Setzt man wieder $x = 2y$, so wird in der Formel der Aufg. 247 $\frac{S}{2} = \frac{8+3y}{2} = 4 + \frac{3y}{2}$, und da der Inhalt des Dreiecks auch $= \frac{6y}{2} = 3y$ ist, so erhält man die Gleichung:

$$3y = \sqrt{\left(\frac{3y}{2}+4\right)\left(\frac{3y}{2}-4\right)\left(4+\frac{y}{2}\right)\left(4-\frac{y}{2}\right)}$$

und hieraus wieder die obige Gleichung:

$$y^4 - \frac{496}{4}y^2 = -\frac{4096}{9} \text{ u. s. w.}$$

256) Vergl. vorherg. Andeutung.

257) Erste Auflösung. Sind die zu den Höhen 10′, 14′ und 12′ gehörigen Seiten der Reihe nach x, y und z, so ist $y = \frac{5x}{7}$ und $z = \frac{5x}{6}$, also in der Formel der Aufgabe 247. $\frac{S}{2} = \frac{107}{84}x$. Da der Inhalt aber auch $= \frac{10x}{2} = 5x$ ist, so erhält man die Gleichung:

$$5x = \sqrt{\frac{107x}{84}\left(\frac{107x}{84}-x\right)\left(\frac{107x}{84}-\frac{5x}{7}\right)\left(\frac{107x}{84}-\frac{5x}{6}\right)} \text{ oder}$$

$$5x = \sqrt{\frac{107x}{84}\cdot\frac{23x}{84}\cdot\frac{47x}{84}\cdot\frac{37x}{84}} = \frac{x^2}{7056}\sqrt{4279679}$$

und hieraus $x = 17,05'$. Die übrigen Seiten, so wie der Inhalt sind nun leicht zu bestimmen.

Digitized by Google

Zweite Auflösung. Nach Lehrsatz 2 ist

$$y^2 = x^2 + z^2 - 2z\sqrt{(x^2 - 144)}$$

oder wenn man für $z = \frac{7y}{6}$ und für $x = \frac{7y}{5}$ setzt:

$$y^2 = \frac{49y^2}{25} + \frac{49y^2}{36} - \frac{7y}{3}\sqrt{\left(\frac{49y^2}{25} - 144\right)}.$$

Durch Reduktion folgt hieraus $4279679y^2 = 685040000$, also $y = \sqrt{148{,}38} = 12{,}1'$ u. s. w.

258) Die zu 20′ Höhe gehörige Seite sei $= x$, so ist die andere $= 24 - x$, und man erhält daher nach Abschn. III. Lehrs. 4 die Gleichung: $(24 - x)\,8 = 10x$ u. s. w.

259) Die zur Höhe 12′ gehörige Seite sei x, so ist der an 20′ liegende Abschnitt $= \sqrt{(20^2 - 12^2)} = 16'$, also der andere $= x - 16$ und $(40 - x)^2 = 12^2 + (x - 16)^2$, woraus x und dann der Inhalt leicht zu bestimmen sind.

260) Die eine Seite sei x, so ist die andere $x + 2{,}5$, also $x^2 - 4{,}5^2 = (x + 2{,}5)^2 - 8^2$. Bestimme hieraus x und dann den Inhalt, entweder durch Aufsuchung der Höhe, oder durch Anwendung der Formel in Aufg. 247.

261) Die dritte Seite sei x, so ist in $247\ \frac{8}{2} = \frac{41{,}09 + x}{2}$; substituire dieses und setze dann den Wurzelausdruck $=$ dem gegebenen Inhalte, so läßt sich hieraus x entwickeln.

262) Setze die Seiten $= 2x$, $3x$ und $4x$ und bilde nach 247 eine Gleichung, so ergibt sich daraus $x = 50$; folglich sind die Seiten 100′, 150′ und 200′.

263) Die Höhen seien $2x$, $3x$ und $4x$, die zugehörigen Seiten nach der Reihe v, z und y; so ist

$$\frac{3x \cdot z}{2} = 900 \text{ oder } z = \frac{600}{x},\ y = \frac{450}{x} \text{ und } v = \frac{900}{x}$$

Nach Aufg. 247 erhält man demnach die Gleichung:

$$900 = \sqrt{\frac{950}{x} \cdot \frac{350}{x} \cdot \frac{500}{x} \cdot \frac{50}{x}} \text{ u. s. w.}$$

Digitized by Google

§. 18. Aufgaben über die Parallelogramme.

264) Ist die Seite $= x$, so ist $x^2 + x^2 = 8{,}5^2$ u. s. w.

Anmerkung. Ohne Anwendung des pythag. Lehrsatzes kann diese Aufg. auch dadurch gelöst werden, daß man zuerst, wie für Aufg. 155, den Inhalt und daraus dann die Seite des Quadrats bestimmt.

265) Rechne die Seite (vergl. 119) und hieraus wie in vorhergeh. Aufg. die Diagonale.

Anmerkung. Um diese Aufgabe ohne Anwendung des pythag. Lehrsatzes zu lösen, sei die Diagonale $= y$, so ist $\frac{y^2}{2} = 302{,}58$ u. s. w.

266) Die Seite sei $= x$, so ist die Diagonale $= x + 8$; folglich: $x^2 + x^2 = (x + 8)^2$ oder $x^2 - 16x = 64$ u. s. w.

267) Ist die Seite $= x$, so ist die Diagonale $= 100 - x$; folglich $2x^2 = (100 - x)^2$ oder $x^2 + 200x = 10000$ u. s. w.

268) Die Diagonale sei $= x$, so ist die Seite $= \frac{48 + x}{4}$; folglich $x^2 = 2\left(12 + \frac{x}{4}\right)^2$ oder $x^2 - \frac{96}{7}x = \frac{2304}{7}$ ꝛc.

269) Man findet die Diagonale nach dem pythag. Lehrsatze u. s. w.

270) Suche die Grundlinie nach dem pythag. Lehrs. und dann den Inhalt.

271) Rechne die andere Seite nach dem pythag. Lehrs. und dann den Inhalt.

272) und 273) Bestimme die andere Seite (vergl. 103) und hieraus die Diagonale als Hypotenuse.

274) Sind die zwei Seiten x und y, so erhält man:

$$\text{I.}\quad x^2 + y^2 = 77{,}5^2$$
$$\text{II.}\quad xy = 2883.$$

Substituirt man aus II. $x = \frac{2883}{y}$ in I., so erhält man eine Gleichung vom 4. Grade, die sich als quadratische auflösen läßt u. s. w. (vergl. Nr. 255).

Anmerkung. Die Auflösung der zwei Gleichungen kann auch auf folgende Weise geschehen. Man multiplicire II. mit 2 und zähle die neue Gleichung zuerst zu I. und dann ziehe man sie davon ab, so folgt:

Digitized by Google

$$x^2 + 2xy + y^2 = 11772{,}25$$
und $x^2 - 2xy + y^2 = 240{,}25$ oder
$$x + y = 108{,}5 \text{ und}$$
$$x - y = 15{,}5.$$

Hieraus $2x = 124$, $x = 62$ u. s. w.

Auf diese Weise wird also die Auflösung einer quadrat. Gleichung umgangen.

275) Die Höhe sei $= 3x$, so ist die Grundlinie $= 4x$; folglich $9x^2 + 16x^2 = 19^2$ u. s. w.

276) Man erhält $\left(\frac{3}{8}x\right)\left(\frac{x}{2}\right) = 9{,}72$, woraus $x = 7{,}2$; also die Höhe $= \frac{3}{8} \cdot 7{,}2$ und die Grundl. $= \frac{7{,}2}{2}$ u. s. w.

277) Ist die Grundlinie $= x$ und die Höhe $= y$, so erhält man die zwei Gleichungen:

I. $x + y = 65{,}1$
II. $x - y = 9{,}3$.

Bestimme hieraus x und y, dann die Diagonale nach dem pythag. Lehrsatze u. s. w.

278) Eine Seite sei $= x$, so ist die anliegende $= \frac{1{,}35}{2} - x$; folglich $x^2 + (0{,}675 - x)^2 = 3{,}78^2$ u. s. w.

279) Ist die eine Seite $= x$, so ist die anliegende $= \frac{329}{3} - x$; folglich $\left(\frac{329}{3} - x\right)x = 2945\frac{1}{3}$. Bestimme hieraus die zwei Seiten und dann die Diagonale.

280) Die zweite Seite sei $= x$, so ist die Diagonale $= 56{,}8 - x$; also: $x^2 + 28{,}4^2 = (56{,}8 - x)^2$ u. s. w.

281) Die Diagonale sei $= x$, so erhält man die Gleichung: $x^2 = (152 - x)^2 + (171 - x)^2$ u. s. w.

282) Zieht man die kleinere Diagonale, so entstehen zwei gleichseitige Dreiecke, denn jeder Winkel hat 60^0; also ist nach Aufg. 230 der Inhalt $= \frac{2 \cdot 3{,}44^2}{4}\sqrt{3}$ u. s. w.

283) Zieht man die Höhe x, so entsteht ein gleichschenkliges rechtwinkl. Dreieck. Es wird also $2x^2 = 3{,}92^2$ und $x = 2{,}771'$ u. s. w.

Digitized by Google

284) Vergl. die Andeut. zu Aufg. 282 und 233.

285) Erste Auflös. Betrachte den Rhombus als aus 2 gleichschenkl. Dreiecken bestehend und vergl. deßhalb Andeut. 209.

Zweite Auflös. Wende zur Berechnung der Hälfte des Rhombus die in Aufg. 247 gegebene Formel an und setze dort $\frac{S}{2} = \frac{20 + 20 + 30}{2} = 35$.

286) Nach Abschnitt III. Lehrs. 6 folgt die Seite $= \sqrt{\left(\frac{24,5}{2}\right)^2 + \left(\frac{18,6}{2}\right)^2}$; also der Umfang $= 2\sqrt{(24,5^2 + 18,6^2)}$ u. s. w.

287) Erste Auflös. Fälle vom Endpunkte der Diagonale aus die Höhe, rechne einen der gebildeten Abschnitte (vergl. Lehrsatz 2 und 3) und hieraus und aus der Seite die Höhe u. s. w.

Zweite Auflös. Bestimme wie für Aufg. 285 den Inhalt und hieraus und aus der einen Seite die Höhe.

288) Man findet den an der Diagonale liegenden Abschnitt der Seite $= \sqrt{(60^2 - 48^2)} = 36'$, folglich ist der andere, wenn die Seite $= x$ gesetzt wird, $= x - 36$ und

$$x^2 = 48^2 + (x - 36)^2 \text{ u. s. w.}$$

289) Ist die Seite $= x$ und setzt man in der Formel der Aufg. 247 für $\frac{S}{2} = \frac{36 + 2x}{2} = 18 + x$, so erhält man die Gleichung: $864 = 2\sqrt{(x + 18)(x - 18) \cdot 18 \cdot 18}$ oder

$$24 = \sqrt{(x^2 - 18^2)} \text{ u. s. w.}$$

290) Suche nach Andeut. 289 eine Seite und hieraus und aus dem Inhalte die Höhe.

291) Ist eine Diagonale $= x$, so ist der Inhalt nach Aufg. $209 = 2 \cdot \frac{x}{4}\sqrt{(4 \cdot 15^2 - x^2)}$. Man erhält daher die Gleichung: $100 = \frac{x}{2}\sqrt{(900 - x^2)}$ oder $x^4 - 900x^2 = 40000$ u. s. w.

292) Erste Auflös. Ist die eine Diagonale $= x$, so ist die andere $= 455 - x$, also nach Abschnitt III. Lehrsatz 6: $162,5^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{455 - x}{2}\right)^2$ u. s. w.

Digitized by Google

Zweite Auflös. Setzt man wieder die eine Diagonale $= x$, so ist der Inhalt $= (455 - x)x$. Nach Aufg. 209 ist dieser auch $= \frac{x}{2}\sqrt{(4.162{,}5^2 - x^2)}$. Bilde hieraus eine Gleichung u. s. w.

293) Erste Auflös. Bezeichnet man die Diagonale mit x, so erhält man (nach Aufg. 209) folgende Gleichung:

$$565{,}68 = 2 \cdot \frac{x}{4}\sqrt{\left(4\,(50 - x)^2 - x^2\right)} \text{ u. s. w.}$$

Zweite Auflös. Ist die eine Diagonale $= x$, so ist die andere $= \frac{565{,}68}{x}$, also $(50-x)^2 = \left(\frac{x}{2}\right) + \left(\frac{565{,}68}{2x}\right)^2$ u. s. w.

294) Verfahre nach Aufg. 247.

295) Suche aus dem Umfange die andere Seite und dann nach 247 den Inhalt.

296) Die halben Diagonalen bilden mit der gegebenen Seite ein Dreieck das $^1/_4$ der Rhomboide ist. Bestimme nun hiernach unter Anwendung der Aufg. 247 den Inhalt der Figur. Die fehlende Seite läßt sich dann entweder aus dem darüber liegenden Dreieck unter Anwendung der Aufg. 247, oder auch nach dem pythag. Lehrsatze berechnen, indem man zuerst aus der Seite 40 und dem Inhalte die Höhe der Rhomboide sucht.

297) Erste Auflös. Die zur Höhe 8′ gehörige Seite sei $= v$ und die andere $= z$, der an der Diagonale liegende Abschnitt auf v sei $= x$ und auf $z = y$, so ist: $x^2 = 100 - 64$ also $x = 6'$, und $y = 8{,}6602'$. Ferner ist $v = \frac{5}{8}z$ und

$$z^2 = 100 + (v - 6)^2 \text{ oder}$$

$$z^2 = 100 + \frac{25}{64}z^2 - \frac{15}{2}z, \text{ also}$$

$$z^2 + \frac{160}{13}z = \frac{6400}{39}; \text{ woraus } z = 8{,}057' \text{ u. s. w.}$$

Zweite Auflös. Der Inhalt ist $= 5z$ und da $v = \frac{5}{8}z$, auch nach 247 $=$

$$2\sqrt{\left(\frac{13}{16}z + 5\right)\left(\frac{13}{16}z - 5\right)\left(5 + \frac{3}{16}z\right)\left(5 - \frac{3}{16}z\right)}$$

Bilde hieraus eine Gleichung u. s. w.

Digitized by Google

298) Erste Auflös. Bezeichnet man die zur Höhe gehörige Seite mit x, so erhält man nach 247 die Gleichung:

$$72 \cdot x = 4\sqrt{\left(50+\frac{x}{2}\right)\left(50-\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}-10\right)\left(\frac{x}{2}+10\right)}$$

und hieraus: $x^4 - 5216x^2 = -4000000$. Setzt man $x^2 = z$, so ergeben sich dafür die Werthe 4281,8 und 934,2; also für $x = 65{,}4$ oder 30,5. Der Inhalt ist hiernach entweder $= 2196\square'$ oder $= 4708{,}8\square'$.

Zweite Auflös. Diese Aufgabe läßt sich auch ohne Anwendung der Formel in 247 lösen. Errichtet man nämlich eine Senkrechte vom Durchschnittspunkt beider Diagonalen auf x, so entstehen darauf zwei Abschnitte, welche leicht aus den halben Diagonalen und jenem Perpendikel $= 36$ nach dem pythag. Lehrs. gefunden werden können. Beide Abschnitte zusammen geben die Seite und der Inhalt ist nun leicht zu finden.

299) Ist eine Seite $= x$, so erhält man nach Aufg. 247:

$$50 = 4\sqrt{\left(6+\frac{x}{2}\right)\left(6-\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}+3\right)\left(\frac{x}{2}-3\right)} \text{ oder}$$

$$x^4 - 180x^2 = -7684 \text{ u. s. w.}$$

$x = 10{,}56$ oder $8{,}343$; also die Höhen $=$

$$\frac{50}{10{,}56} = 4{,}73' \text{ und } \frac{50}{8{,}343} = 5{,}99'.$$

300) Erste Auflös. Diese Höhe sei $= x$ und die zugehörige Seite $= y$. Zieht man vom Endpunkte der Diagonale aus die Höhe, so entsteht ein rechtwinkl. Dreieck, aus welchem sich der an y liegende Abschnitt berechnen läßt. Aus der Höhe und diesem Abschnitte ergibt sich nun leicht y, und hieraus und aus dem Inhalte $= 12 \cdot 10$ die Höhe x.

Zweite Auflös. Nach 247 folgt:

$$120 = 2\sqrt{\left(18+\frac{y}{2}\right)\left(18-\frac{y}{2}\right)\left(\frac{y}{2}+6\right)\left(\frac{y}{2}-6\right)}$$

$$\text{oder } y^4 - 1440y^2 = -244224$$

woraus $y = 35{,}2'$ oder $= 14'$, also

$$x = \frac{120}{35{,}2} = 3{,}409' \text{ oder } = \frac{120}{14} = 8{,}57'.$$

Digitized by Google

301) Erste Auflös. Die Seite 60 bildet mit den halben Diagonalen ein Dreieck, dessen Inhalt $^1/_4$ der Rhomboide ist, woraus sich leicht die Höhe bestimmen läßt.

Zweite Auflös. Fälle vom Durchschnittspunkt der Diagonalen einen Perpendikel auf die Seite 60, rechne einen der gebildeten Abschnitte nach Lehrs. 2 und hieraus nach Lehrs. 1 den Perpendikel, so ist dieser = der halben Höhe.

Dritte Auflös. Wende die Formel der Aufg. 247 an um den Inhalt zu bestimmen und berechne daraus die Höhe.

302) Den Inhalt findet man ähnlich, wie in vorhergeh. Aufgabe. Aus dem Inhalte kann dann die Höhe und hieraus die fehlende Seite bestimmt werden.

303) Ist die eine Diagonale = x, so fälle man von den Endpunkte derselben einen Perpendikel auf die gegenüberliegende Seite oder deren Verlängerung. Dieser Perpendikel ist nun aus dem Inhalte und der Seite, und daraus der Abschnitt der letzteren leicht zu berechnen, so daß zuletzt die Diagonale x als Hypotenuse im rechtwinkl. Dreieck erscheint.

Anmerk. Aehnlich wie Aufg. 300 könnte auch die vorliegende nach der Formel der Aufg. 247 gelöst werden.

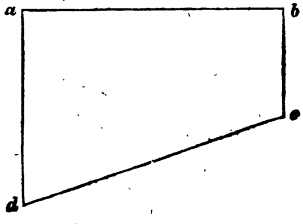
304) Rechne aus dem Inhalte und den beiden Höhen die zugehörigen Seiten (nach Andeut. 103) und dann wie bei vorherg. Aufgabe die Diagonale.

305) Die Diagonale sei = 12x, so sind die Seiten = 7x und 6x u. s. w. wie bei 262.

§. 19. Aufgaben über das Paralleltrapez.

306) und **307)** Ziehe (Fig. 3) von c aus einen Perpendikel auf ad, so entsteht ein rechtwinkl. Dreieck, aus dem diese Senkrechte = ab nach dem pythag. Lehrsatz und somit auch der Inhalt von abcd sich berechnen läßt (vergl. Abschn. III. Lehrs. 7).

Fig. 3.

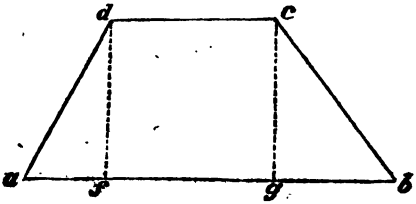


Digitized by Google

308) Fällt man von c aus (Fig. 3) auf ad einen Perpendikel, so entsteht ein halbes gleichseitiges Dreieck, woraus dieser nach dem pythag. Lehrsatz leicht berechnet werden kann u. s. w.

309) Fällt man (Fig. 4) von d und c aus Perpendikel auf ab, so entsteht, weil ∢ adf = 30° (vergl. Andeut. 61), an a ein halbes gleichseitiges Dreieck adf, also ist $af = \frac{ad}{2}$ und da auch ∢ bcg = 45°, so wird an b ein gleichschenkl. rechtwinkl. Dreieck gbc gebildet, und es ist somit gb = gc = df. Nun ist aber die Höhe

Fig. 4.



$$df = \sqrt{\left[ad^2 - \left(\frac{ad}{2}\right)^2\right]} = 103{,}9',$$

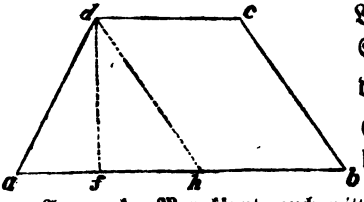
und ab = af + dc + gb (= 324,7'), also der Inhalt leicht zu bestimmen.

310) Errichtet man (Fig. 4) df und cg ⊥ ab, so wird $af = \frac{ad}{2}$ und df = cg = gb = $\sqrt{(ad^2 - af^2)}$ (vergl. Andeut. 309); also fg = dc = ab − (af + gb) u. s. w.

311) Ist ad (Fig. 4) die gegebene Richtparallele, so berechne man zuerst den Abstand af, hieraus den gb, dann bc und endlich den Inhalt.

312) Ziehe von d (Fig. 5) aus mit cb eine Parallele dh, so ist diese = cb, also nach Lehrs. 2 $ad^2 = dh^2 + ah^2 - 2ah.fh$. Suche hieraus fh (= 49,93'), dann $df = \sqrt{(dh^2 - fh^2)}$ (= 51,873') und endlich der Inhalt des Paralleltrapezes.

Fig. 5.



Anmerk. Man könnte auch mittelst Aufg. 247 den Inhalt des △ adh und hieraus die Höhe df (vergl. Andeut. 151) bestimmen.

313) Ziehe (Fig. 5) dh ∥ cb, so ist:

$$ad^2 = dh^2 + ah^2 - 2 \cdot ah \cdot fh, \text{ also}$$

$$fh = \frac{d^2 + (a-b)^2 - c^2}{2(a-b)}, \text{ folglich, da}$$

Digitized by Google

$$df = \sqrt{(dh^2 - fh^2)}, \text{ der}$$

$$\text{Inhalt } abcd = \frac{a+b}{2}\sqrt{\left[d^2 - \left(\frac{d^2+(a-b)^2-c^2)}{2(a-b)}\right)^2\right]} \text{ oder}$$

$$\text{Inhalt} = \frac{a+b}{2(a-b)}\sqrt{\left[\left(2d(a-b)\right)^2 - \left(d^2+(a-b)^2-c^2\right)^2\right]}$$

und hieraus durch Reduktion:

$$J = \frac{a+b}{2(a-b)}\sqrt{\left[(d+a-b)^2 - c^2\right]\left[c^2 - (d+b-a)^2\right]}$$

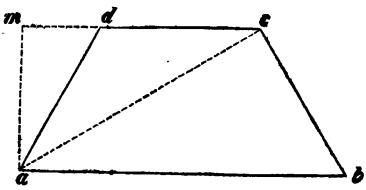
Zerlegt man nun die Differenz der Quadrate der zwei Faktoren unter dem Wurzelzeichen in die Summe mal Unterschied der Seiten dieser Quadrate, so folgt:

$$J = \frac{a+b}{2(a-b)}\sqrt{(a+c+d-b)(a+d-b-c)(b+d+c-a)(a+c-d-b)}$$

315) Vergl. 313.

316) Fälle von a (Fig. 6) aus eine Senkrechte am auf cd, rechne dann den Abschn. md (vergl. Lehrs. 2 u. 3), hieraus und aus ad die Höhe am und endlich den Inhalt der Fläche.

Fig. 6.



Anmerk. Man könnte auch nach Aufg. 247 den Inhalt des △ adc und hieraus und aus der Grundlinie dc die zugehörige Höhe am nach Andeut. 151 berechnen.

317) Bestimme nach Aufg. 247 oder unmittelbar den Inhalt des △ abc (Fig. 6) und hieraus (Andeut. 151) die zu ab gehörige Höhe am (=48'). Bezeichnet dann x die Parallelseite dc, so ist ad = 120 − x, also nach Lehrs. 3

$$ac^2 = dc^2 + ad^2 + 2dc \cdot md, \text{ oder}$$

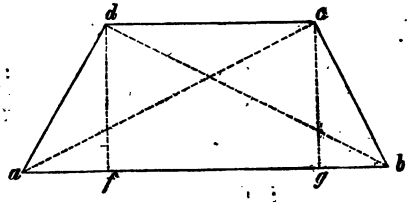
$$80^2 = x^2 + (120-x)^2 + 2x\sqrt{((120-x)^2 - 48^2)}.$$

Bestimme aus dieser Gleichung den Werth von x u. s. w.

Digitized by Google

318) Suche in dem rechtwinkl. Dreieck fbd (Fig. 7) die Kathete fb, dann die Kathete af in dem rechtw. △ adf, so ist ab = af + fb. Auf ähnliche Weise bestimme man in den rechtw. Dreiecken fdb und cbg die Katheten fb und gb,

Fig. 7.



so ist dc = fb − gb und der Inhalt des Paralleltrapezes ist nun leicht zu berechnen.

319) Die Höhe df (Fig. 7) sei = x, so ist $\frac{6+4}{2}x = 20$, also x = 4 (vergl. Abschn. III. Lehrs. 7). Bestimme nun in dem rechtwinkl. △ adf den Abstand af (= 3′) und in △ fdb die Diagonale db (= 5′). Die Diagonale ac findet man aus dem rechtwinkl. △ acg, worin ag = af + dc ist.

320) Suche (Fig. 7) zuerst $ag = \sqrt{(ac^2 - cg^2)}$. Da dieser Abstand = 24′ = ab wird, so fällt cb mit cg zusammen und das Paralleltrapez hat bei b einen rechten Winkel. Ferner ist af = ag − dc = 9′; also $ad = \sqrt{(df^2 + af^2)} = 20{,}1'$.

321) ab (Fig. 7) sei die bekannte Parallelseite, so ist $bf = \sqrt{(db^2 + bf^2)}$ und af = ab − fb. Die Seite ad suche aus dem rechtwinkl. Dreiecke adf und ag aus dem △ acg, dann ist dc = ag − af und gb = ab − ag, also $bc = \sqrt{(cg^2 + gb^2)}$ bestimmt.

322) Bestimme aus dem Inhalte des △ abd (Fig. 7) die Höhe des Paralleltrapezes, dann $af = \sqrt{(ad^2 - df^2)}$, so ist dc = ag − af. Suche nun den Inhalt des △ dcb = $\frac{dc \cdot cg}{2}$ und addire diesen zu dem Inhalte des △ adb.

323) Ziehe (Fig. 5) dh ∥ cb, so ist ah = ab − dc; suche nun nach Lehrs. 2 den Abschnitt fh und dann in dem rechtwinkl. △ dfh die Höhe df.

Anmerk. Man kann auch nach der Formel der Aufg. 313 den Inhalt des Paralleltrapezes und hieraus die Höhe desselben berechnen.

Digitized by Google

324) Nach Abschn. III. Lehrs. 7 ist der Inhalt des Paralleltrapezes (Fig. 7)

$$= \frac{df}{2}(ab+dc) = \frac{df}{2}(ag+fb) = \frac{df}{2}\left(\sqrt{(ac^2-cg^2)}+\sqrt{(db^2-df^2)}\right)$$

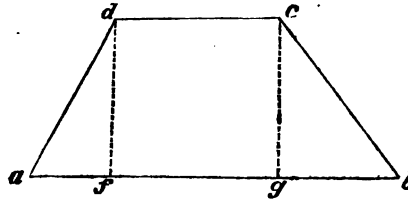
u. s. w.

325) In Fig. 7 ist $dc = fb + ag - ab =$

$$\sqrt{(db^2-df^2)} + \sqrt{(ac^2-cg^2)} - ab \text{ u. s. w.}$$

326) Bestimme aus dem rechtwinkl. Dreieck adf die Kathete af und aus △ cgb die gb, so ist dc=ab-(af+gb). Bezeichnet man nun die Seite dc mit x und drückt darin die Seite ab aus, so kann man daraus und aus dem gegebenen Inhalte eine Gleichung bilden und so die unbekannten Stücke bestimmen.

Fig. 8.



§. 20. Aufgaben über das Trapez.

327) Rechne die Länge der Diagonale bd aus dem rechtw. Dreieck abd, dann den Inhalt dieses Dreiecks und aus den drei Seiten nach 247 den des △ bdc u. s. w.

328) Bestimme die Abschnitte af und fc u. s. w.

329) Rechne nach 247 die Inhalte beider Dreiecke u. s. w.

330) Rechne den Inhalt des Dreiecks, dessen 3 Seiten gegeben sind, bestimme hieraus den Inhalt des andern Dreiecks und daraus die unbekannte Seite (vergl. Andeut. 261).

331) Zieht man die die Endpunkte der zwei gleichen Seiten verbindende Diagonale, so entsteht ein gleichseitiges und ein gleichschenkliges rechtwinkl. Dreieck u. s. w.

§. 21. Aufgaben über die unregelmäßigen Vielecke.

332) Zieht man die Diagonale ac und fc, so entstehen zwei rechtwinkl. Dreiecke abc und fdc und ein Dreieck afc. Aus den zwei ersteren lassen sich die noch fehlenden 2 Seiten des letztern als Hypotenusen berechnen u. s. w.

Digitized by Google

333) Dreieck afb ist gleichseitig. Rechne bc, dann die Diagonale bd, so lassen sich die Inhalte der 3 Dreiecke, aus denen die Fläche besteht, leicht berechnen.

Abschnitt V.

Aufgaben über die Winkel im Kreise.

Lehrsätze.

1) Der Peripheriewinkel ist halb so groß wie der mit ihm auf gleichem Bogen stehende Centriewinkel; oder:
der Peripheriewinkel hat die Hälfte des Bogens zum Maß, welcher zwischen seinen Schenkeln liegt.
2) Der Winkel, welcher durch zwei sich schneidende Sehnen gebildet wird, hat die halbe Summe der zwei Bogen zum Maß, welche zwischen seinen Schenkeln und deren Verlängerungen liegen.
3) Der Winkel, welcher von zwei sich außerhalb eines Kreises schneidenden Sekanten gebildet wird, hat die halbe Differenz der zwei Bogen zum Maß, die zwischen seinen Schenkeln liegen.
4) Der von einer Sehne und einer Tangente gebildete Winkel (Berührungswinkel) hat den halben Bogen zum Maß, welcher zwischen seinen Schenkeln liegt.

§. 22.

334) Nach Lehrs. 1 $= \frac{129^0\ 36'\ 34''}{2}$ u. s. w.

335) Der Centrie $\sphericalangle$ hat a) $360 : 8 = 45^0$, b) $400 : 8 = 50^0$. Rechne hieraus nach Lehrs. 1 den Peripherie $\sphericalangle$.

336) Aehnlich wie 335.

337) Nach Lehrs. 2 $= \frac{68^0\ 35'\ 42'' + 76^0\ 38'\ 54''}{2}$ u. s. w.

338) Die zwei Bogen haben 72^0 und 40^0 u. s. w. (Lehrs. 2).

339) Nach Lehrs. 3 ist der Winkel $=$
$$\frac{116^0\ 18'\ 36'' - 64^0\ 38'\ 38''}{2}$$ u. s. w.

340) Ist der kleinere Bogen $= x^0$, so folgt nach Lehrs. 3:
$$\frac{128^0\ 46' + x}{2} = 54^0\ 26'$$ ꝛc.

Digitized by Google

341) Der eine Bogen messe $5x$, so mißt der andere $8x$; also ist: $\frac{8x - 5x}{2} = 18^0\ 45'$ und hieraus $x = 12^0\ 30'$. Die Bogen sind daher $5 \times 12^1/_2{}^0$ und $8 \times 12^1/_2{}^0$.

342) Verfahre nach Lehrs. 3. Der kleinere Bogen wird $= \frac{180^0 - 58^0\,46'}{2} = 60^0\,37'$ und der größere $= 60^0\,37' + 58^0\,46'$.

343) Nach Lehrs. 4 $= 2 \,.\, 38^0\ 36'\ 24''$.

344) Nach Lehrs. 4 $= \frac{67^0\ 38'}{2}$.

345) Vergl. die Lehrs. 1 und 4.

346) Der größere Bogen sei x, so ist der kleinere $= 360 - x$ und $\frac{x - (360 - x)}{2} = 28^0\ 44'\ 12''$ also $x = 208^0\ 44'\ 12''$; folglich der kleinere Bogen $= 151^0\ 15'\ 48''$.

347) Ist der eine Theil $= 3x$, so ist der andere $= 7x$, also der $\measuredangle = 2x$ u. s. w.

Abschnitt VI.

Aufgaben über die Aehnlichkeit der eckigen Figuren.

Lehrsätze.

1) Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn die drei Winkel des einen beziehungsweise gleich sind den drei Winkeln des andern.
2) Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn ihre Seiten beziehungsweise senkrecht auf einander stehen.
3) Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn in beiden ein Winkel gleich ist und die ihn einschließenden Seiten proportional sind.
4) Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn die drei Seiten des einen proportional sind den drei Seiten des andern.
5) Die zur Hypotenuse gehörige Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen den beiden Abschnitten der Hypotenuse.
6) Die Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen der ganzen Hypotenuse und dem durch die zugehörige Höhe auf ihr gebildeten Abschnitt, welcher an der Kathete liegt.

Digitized by Google

7) Die Halbirungslinie eines Winkels im Dreiecke theilt die gegenüberliegende Seite in zwei Theile, die sich zu einander verhalten wie die darüber liegenden Seiten.

8) Die Umfänge ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie irgend zwei homologe Seiten.

9) Aehnliche Dreiecke verhalten sich ihrem Inhalte nach wie die Quadrate zweier gleichliegenden Seiten.

10) Zwei Dreiecke, welche nur einen gleichen Winkel haben, verhalten sich ihrem Inhalte nach, wie die Produkte der zwei diesen Winkel einschließenden Seiten.

11) Die Umfänge ähnlicher Vielecke verhalten sich wie irgend zwei gleichliegende Seiten.

12) Die Inhalte ähnlicher Vielecke verhalten sich wie die Quadrate irgend zweier gleichliegenden Seiten.

§. 23. Aufgaben über die Aehnlichkeit der Dreiecke.

348) Die der größten Seite des gegebenen △ entsprechende im andern △ sei = x, so verhält sich 17,4 : 5,8 = 31,8 : x, woraus x gefunden werden kann. Auf gleiche Art bestimme die dritte Seite.

349) Sind die Seiten x und y, so erhält man:
9,36 : 8,1 = 0,52 : x und 9,36 : 6,12 = 0,52 : y u. s. w.

350) und **351)** Nach Lehrs. 1 ist das abgeschnittene Dreieck dem ganzen ähnlich.

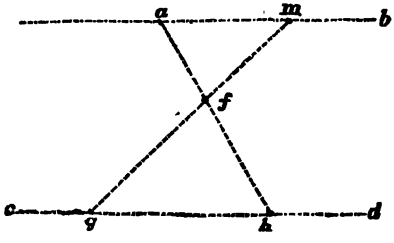
352) Der Plan ist dem Felde ähnlich u. s. w.

353) Die Entfernung sei x, so verhält sich:
395 : 158 = 588 : x u. s. w.

354) Verfahre nach 348.

355) u. **356)** Nach Lehrs. 1 muß (Fig. 9) △ amf ∽ △ fgh sein, folglich sich verhalten: fh : fg = af : fm, woraus sich fm, wenn man die betreffenden Werthe substituirt, leicht bestimmen läßt.

Fig. 9.

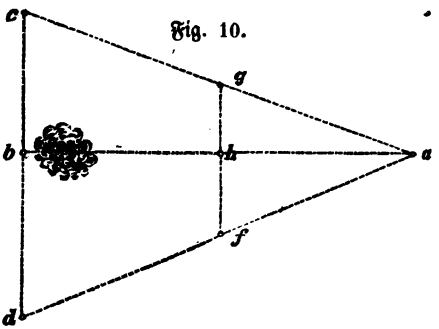


Digitized by Google

357) und 358) Da fg ∥ cd (Fig. 10) werden soll, so wird △ afg ∽ △ adc und △ afh ∽ adb. Folglich verhält sich:
ad : ac = af : ag und
ad : db = af : fh.

Bestimme nun aus der ersten Proportion die Linie ag und aus der andern die Entfernung fh.

Fig. 10.



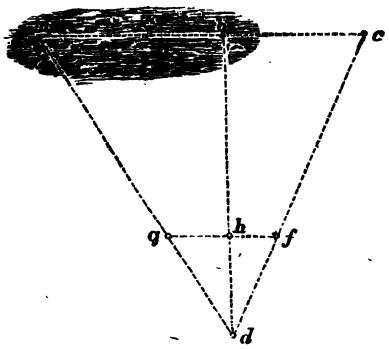
359) und 360) Nach Lehrs. 3 ist △ abc ∽ △ dfc u. s. w.

361) und 362) Nach Lehrs. 3 ist △ abd ∽ △ dfm u. s. w.

363) und 364) Da die Dreiecke bcd und hfd, so wie abd und ghd einander ähnlich sind, so verhält sich (Fig. 11):

dh : db = df : dc
und dh : db = hg : ab
also auch
df : dc = hg : ab
woraus sich ab bestimmen läßt.

Fig. 11.



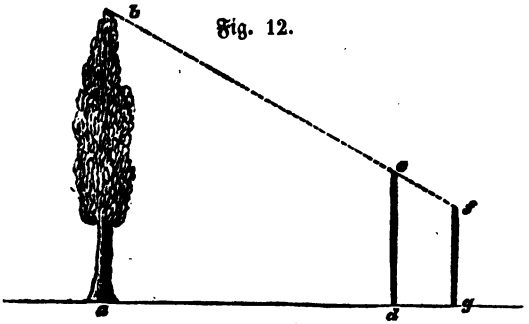
365) Die Höhe des Gegenstandes und die Länge des von ihm geworfenen Schattens bilden die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, das dem Dreieck ähnlich ist, von welchem der Stab und dessen Schatten die beiden Kathete bilden; folglich muß sich verhalten: 2,8 : 5,5 = 75,6 : x u. s. w.

366) und 367) Nach 365.

Digitized by Google

368) und 369) Denkt man sich (Fig. 12) durch f eine ∥ zu ag gezogen, so entstehen ähnliche Dreiecke, worin sich verhält:

Fig. 12.

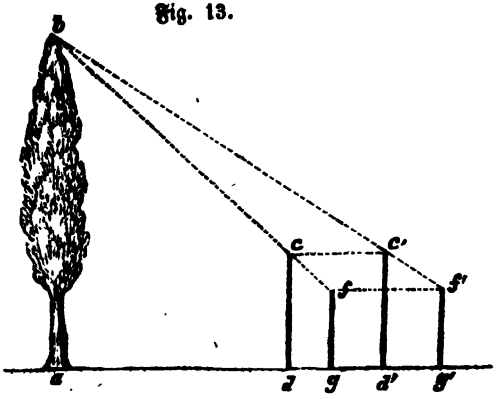


ba — fg : ag = cd — fg : dg; folglich ist

$$ba = \frac{ag\,(cd - fg)}{dg} + fg.$$

370) Denkt man sich (Fig. 13) durch f′ eine ∥ zu ag′ gezogen, so folgt: ab — 6 : ag = 2 : 3, also $ag = \frac{3(ab-6)}{2}$.

Fig. 13.



Ferner verhält sich: ab — 6 : ag′ = 2 : 4, oder

$$ab = \frac{2\,(ag + 24)}{4} + 6.$$ Substituirt man für ag obigen Werth, so folgt: 4ab = 3ab + 54 oder ab = 54′.

371) Befolge den in 370 angeführten Gang.

Digitized by Google

372) und 373) Nach Lehrs. 1 erhält man zwei ähnliche Dreiecke u. s. w.

374) Die eine unbekannte Seite des ersten Dreiecks sei $= x$, so ist die andere $= x + 0{,}8$. Bilde nun eine Proportion ꝛc.

375) a) Nach Lehrs. 5 erhält man die Höhe x aus der Proportion: $6 : x = x : 24$ u. s. w. Auf ähnliche Weise wird bei b) und c) verfahren.

376) bis 378) werden nach Lehrs. 5 und 6 gelöst.

379) Der eine Abschnitt der Hypotenuse sei $= x$, so ist der andere $= x + 0{,}8$ und es verhält sich nach Lehrs. 5:

$$x : 1{,}4 = 1{,}4 : x + 0{,}8, \text{ oder es ist}$$
$$x^2 + 0{,}8x = 1{,}96, \text{ also } x = 1{,}456'.$$

Hieraus findet man die Hypotenuse und dann nach Lehrs. 6 die beiden Katheten.

380) Suche zuerst den an der Kathete liegenden Abschnitt der Hypotenuse nach Lehrs. 6, dann die andere Kathete und zuletzt nach Lehrs. 5 die Höhe.

381) Bezeichnet man die Hypotenuse mit x, und einen Abschnitt derselben mit y, so ist der andere $= x - y$, und man erhält nach Lehrs. 6:

$$\text{I.} \quad xy = 7{,}5^2 = 56{,}25$$
$$\text{II.} \quad x(x-y) = 100.$$

Aus II. folgt $x^2 = 100 + xy = 100 + 56{,}25$ u. s. w.

382) Der eine Abschnitt sei x, so ist der andere $= 32{,}5 - x$ und nach Lehrs. 5 erhält man die Gleichung:

$$x^2 - 32{,}5x = -243{,}36,$$

woraus sich die Abschnitte berechnen lassen.

383) Ist die eine Kathete $= x$, so ist die andere $= 51{,}1 - x$; der an x liegende Abschnitt sei $= y$, so erhält man nach Lehrs. 6 folgende Proportionen:

$$\text{I.} \quad 36{,}5 : x = x : y$$
$$\text{II.} \quad 36{,}5 : 51{,}1 - x = 51{,}1 - x : 36{,}5 - y$$

und hieraus die Gleichung: $x^2 - 51{,}1x = 1971{,}73$ u. s. w.

384) und 385) Wende Lehrsatz 7 an.

386) Die eine Seite sei x, so ist die andere $77{,}6 - x$ u. s. w. nach Lehrs. 7.

Digitized by Google

387) Der eine Theil sei x u. s. w.

388) Es verhält sich nach Lehrs. 7, wenn der eine Abschnitt = x ist, $2^1/_2 : 1 = x + 4 : x$ u. s. w.

389) Nach Lehrs. 8 verhält sich $3 : 8 = 4{,}5 : x$ u. s. w.

390) $8{,}5 : x = 5 : 12$ u. s. w.

391) $43{,}1 : 3{,}4 = 8{,}62 : x$ u. s. w.

392) Nach Lehrs. 8.

393) Bestimme den Umfang des zweiten Dreiecks, und verfahre dann wie in den vorhergeh. Aufgaben.

394) Der kleinere Umfang sei = x, so verhält sich

$$x : x + 192 = 48{,}5 : 126{,}1$$ u. s. w.

395) Vergl. die Andeut. zu der vorhergeh. Aufgabe.

396) Nach Lehrs. 9 verhält sich, wenn der zu suchende Inhalt = x ist, $3259{,}6 : x = 112{,}4^2 : 28{,}1^2$ u. s. w.

397) Es verhält sich: $1488{,}4 : x = 48{,}8^2 : 21{,}5^2$ u. s. w.

398) Ist die der Seite 8 entsprechende Seite = x, so verhält sich nach Lehrs. 9: $16 : 9 = x^2 : 8^2$ u. s. w.

Auf ähnliche Weise werden die beiden andern Seiten gefunden.

399) Die der Seite 44,1′ entsprechende sei = x, so verhält sich nach Lehrs. 9: $1296{,}54 : 105{,}84 = 44{,}1^2 : x^2$ u. s. w. Ebenso findet man die zwei andern Seiten.

400) bis 406) Die Auflösungen dieser Aufgaben beruhen sämmtlich auf Lehrs. 9. Bei einigen, wie 402, 403, 404 ist zuerst der Inhalt des einen Dreiecks aus den gegebenen Stücken zu berechnen.

407) Der Inhalt des erstern sei = x, so ist der des andern = x + 131,22. Bilde nun nach Lehrs. 9 eine Proportion und bestimme hieraus die Inhalte.

408) Die homologen Seiten seien x und x — 8,5, so verhält sich: $24{,}36 : 182{,}7 = (x - 8{,}5)^2 : x^2$ u. s. w.

Anmerk. Durch direkte Ausrechnung dieser Proportion erhält man zuletzt eine quadratische Gleichung; zieht man aber vorher aus jedem Gliede die Quadratwurzel, so gelangt man durch Auflösung einer Gleichung vom ersten Grade zum Resultate.

409) Ist diese Seite = x, so verhält sich nach Lehrsatz 10:

$$61{,}44 : 121{,}5 = 9{,}6 \cdot 12{,}8 : 13{,}5 \cdot x$$ u. s. w.

410) Hier ist nach Lehrs. 10 der Inhalt des einen Dreiecks zu suchen (vergl. 409).

Digitized by Google

411) Ist die eine Seite des letztern Dreiecks = x, so muß sich nach Lehrs. 10 verhaltn:

$$21{,}66 : 43{,}74 = 7{,}6 \cdot 5{,}7 : x(x+2{,}7) \text{ u. s. w.}$$

§. 24. Aufgaben über die Aehnlichkeit der Vier- und Vielecke.

412) bis 414) werden leicht nach Lehrs. 11 gelöst.

415) Zwei homologe Seiten verhalten sich wie irgend zwei gleichliegende Diagonalen, also auch diese wie die Umfänge ꝛc.

416) Der Umfang des einen sei = x, so verhält sich:

$$x : x + 12 = 2{,}7 : 13{,}5 \text{ u. s. w.}$$

417) Die Seite des einen Vierecks sei = x, so ist die homologe des andern 32 — x; bilde hiernach eine Proportion u. s. w.

418) Rechne den Umfang des erstern Fünfecks aus den Seiten und verfahre dann nach Lehrs. 11.

419) bis 421) können nach den für die nächstvorhergeh. Aufgaben gegebenen Andeut. nun leicht gelöst werden.

422) Nach Lehrs. 12 verhält sich, wenn der Inhalt des kleinern Parallelogramms = x ist:

$$32400 : x = 381^2 : 25{,}4^2, \text{ woraus folgt: } x = 144\,\square'.$$

423) Die zu suchende Seite sei = x, so verhält sich nach Lehrs. 12: $4 : 9 = x^2 : 6{,}25^2$ u. s. w.

424) Es verhält sich: $795{,}24 : 12{,}96 = 22{,}09^2 : x^2$ u. s. w.

425) Vergl. die vorhergeh. Andeut.

426) Die Seite des erstern sei x, so verhält sich:

$$46{,}37 : 185{,}48 = x^2 : (x + 15)^2.$$

Anmerk. Für die Auflösung dieser Proportion gilt die bei Andeut. 408 gemachte Bemerkung.

427) und 428) werden wie die zunächst vorhergeh. Aufgaben nach Lehrs. 12 gelöst.

429) Mißt die Seite des kleinern x Fuß, so verhält sich:

$$8 : 1 = (x + 30)^2 : x^2 \text{ u. s. w.}$$

Anmerk. Vergl. die Anmerkung zu 408.

430) Der Inhalt des kleinern Platzes sei = x, so verhält sich:

$$x : x + 100 = 168^2 : 195^2 \text{ u. s. w.}$$

Digitized by Google

Abschnitt VII.

Aufgaben über die Theilung der Flächen.

§. 25. Aufgaben, welche ohne die Kenntniß der Sätze über die Aehnlichkeit der Figuren gelöst werden können.

431) Theile bc in 3 gleiche Theile. (Siehe Abschnitt III. Lehrsatz 2).

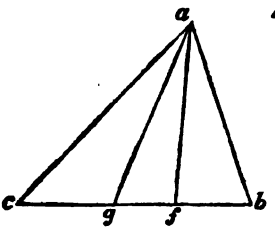
432) Theile bc nach diesem Verhältnisse.

433) Ist der Abstand = x, so muß sich nach Abschnitt III. Lehrsatz 2 verhalten:

Inhalt △ abc : 6969,72 = bc : x oder
55757,76 : 6969,72 = 482 : x u. s. w.

434) Es muß sich verhalten (Fig. 14):

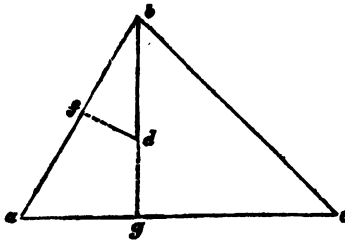
Fig. 14.



△ abc : △ abf = bc : bf und
△ abc : △ abg = bc : bg u. s. w.
(vergl. Abschn. III. Lehrs. 2).

435) Rechne zuerst den Inhalt des ganzen Dreiecks, theile diesen nach dem gegebenen Verhältnisse und siehe zu, ob die erste Theillinie (Fig. 15) ba oder ac trifft, d. h. ob der Inhalt des

Fig. 15.



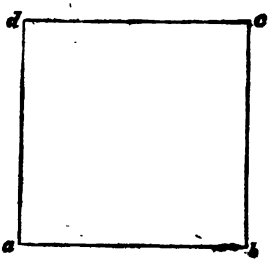
△ adb größer oder kleiner als der abzuschneidende Theil ist. Man findet diesen größer und die Theillinie schneidet also ba. Bestimmt man nun nach Andeut. 150 die Grundl. eines Dreiecks, dessen Inhalt = dem abzuschneidenden Stücke und dessen Höhe = df ist, so ist die Entfernung des Durchgangspunktes der Theillinie mit ba von b gefunden.

Aehnliche Betrachtungen zeigen, daß die zweite Theillinie die Seite ac schneiden muß u. s. w.

Digitized by Google

436) Da (Fig. 16) der Inhalt des △ acd $= \frac{abcd}{2}$ (84 Morg. $1\frac{1}{2}$ Vtl.) ist, so schneidet die zu bestimmende Theillinie die Seite dc in der Entfernung von d $= \frac{2 \cdot 33750}{300}$ (vergl. Andeut. 150) u. s. w.

Fig. 16.

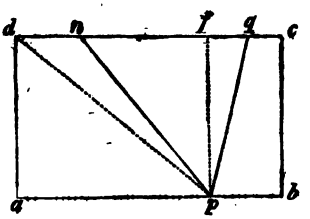


437) Die Inhalte der einzelnen Theile werden
172,8 □°, 691,2 □° und 864 □°.
Verfahre nun ähnlich wie bei Aufg. 436.

438) Vergl. vorhergeh. Aufgaben.

439) $\frac{abcd}{3}$ (Fig. 17) $=$ 900 □°; Inh. pbcf $=$ 1080 □°;

Fig. 17.



also fällt die eine Theillinie nach pq, und fq wird $= \frac{2 \cdot \triangle fqp}{fp} = 8^0$, also dq $= 44^0$. Nun ist Inh. △ dqp > 900 □°, folglich fällt die zweite Theillinie nach pn und qn wird $= \frac{2 \cdot \triangle nqp}{fp}$ und hieraus dn=4°.

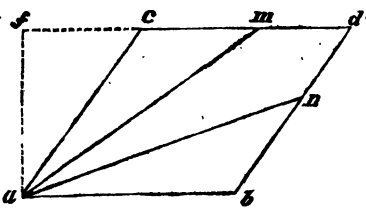
Die Länge der Theillinien ist leicht aus den rechtwinkligen Dreiecken pfn und pfq zu bestimmen.

440) Verfahre ähnlich wie in vorhergeh. Aufgabe. Die Theile werden 960 □°, 2400 □° und 1440 □° und da △ apd > 960°, so schneidet die erste Theillinie die Seite ad u. s. w.

Digitized by Google

441) Man findet (Fig. 18) $\frac{abdc}{3} = 2000 \square^0$, Inhalt

Fig. 18.

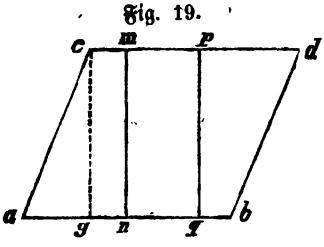


$\triangle afc = \frac{af \cdot fc}{2} = 1350 \square^0$ u. $1350 + 2000 = 3350 \square^0$ = dem abzuschneidenden Stück afm; folglich wird cm $= \frac{2 \cdot \triangle afm}{fa} - fc = 66\frac{2}{3}{}^0$.

Denkt man sich nun von a aus die Höhe auf bd gezogen, so wird diese $= \frac{6000}{bd} = 80^0$, und die Entfernung bn des Durchschnittspunktes der zweiten Theillinie läßt sich auf gleiche Weise wie für am bestimmen.

442) Denkt man sich (Fig. 19) von c eine $\perp$ cg auf ab gefällt, und berechnet den Inhalt des rechtwinkl. Dreiecks acg, so

Fig. 19.



findet man, daß dieser kleiner als $\frac{abdc}{3}$ ist. Die eine Theillinie mn schneidet also beide Parallelseiten und man erhält $an = 102^0$. nq wird dann $= \frac{abdc}{3} : cg = 60^0$, also $aq = 162^0$.

443) Denkt man sich von p aus einen Perpendikel auf ab gefällt, und bezeichnet f dessen Fußpunkt, so wird $af = 84^0$ und der Inhalt von adpf also kleiner als $\frac{abcd}{3}$; folglich fallen beide Theillinien rechts von dieser Senkrechten. Die erste bildet mit pf ein rechtwinkl. $\triangle$, dessen Inhalt $= \frac{abcd}{3} -$ adpf ist, und die Entfernung ihres Durchschnittspunktes mit ab von f, also auch von b, ist nun leicht zu bestimmen.

Aehnlich geschieht die Bestimmung der zweiten Theillinie.

444) Denkt man sich von d aus eine Senkrechte auf ab gezogen, und berechnet die Entfernung des Fußpunktes derselben von a und hieraus den Inhalt des rechtwinkl. Dreiecks, so er-

Digitized by Google

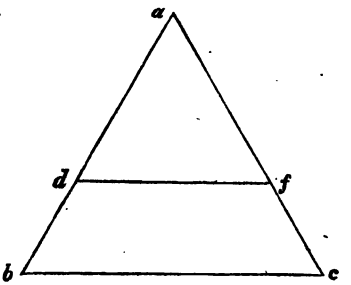
gibt sich, da dieser kleiner als $\frac{abcd}{3}$ wird, daß die erste Theillinie die zwei Parallelseiten schneiden muß. Eine ähnliche Betrachtung zeigt, daß dasselbe auch für die zweite Theillinie gilt. Die Lage der Theillinien ist nun ähnlich wie bei 442 zu bestimmen.

445) Nach richtiger Auffassung des Vorhergehenden wird die Auflösung vorliegender Aufgabe leicht ausgeführt werden können.

§. 26. Aufgaben über die Theilung der Flächen, als Anwendung der Sätze über die Aehnlichkeit der Figuren.

446) und 447) Nach Abschn. VI. Lehrs. 9 verhält sich (Fig. 20) $\triangle abc : \triangle adf = ab^2 : ad^2 = 2 : 1$.

Fig. 20.



Bestimme hieraus ad und aus der Proportion:

$ad : af = ab : ac$,

den Abstand af.

448) Es verhält sich (Fig. 21):

$\triangle abc : \triangle adf = ab^2 : ad^2 = 3 : 1$

und

$\triangle abc : \triangle agh = ab^2 : ag^2 = 3 : 2$

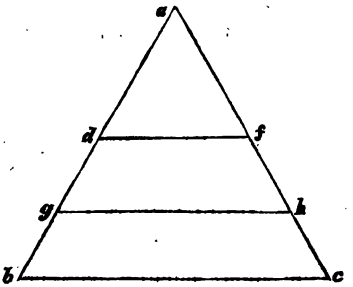
Hat man hieraus ad und ag bestimmt, so lassen sich leicht auch aus den Proportionen:

$ad : ab = af : ac$ und

$ag : ab = ah : ac$

af und ah berechnen.

Fig. 21.



449) Die Auflösung geschieht ähnlich wie für 446 und 447 gezeigt wurde.

450) Verfahre nach Andeut. 448.

451) Die Entfernung ad (Fig. 21) wird wie bei vorh. Aufg. bestimmt. — Da $\triangle$ abc (nach Aufg. 247) 277350 □′ Inhalt hat,

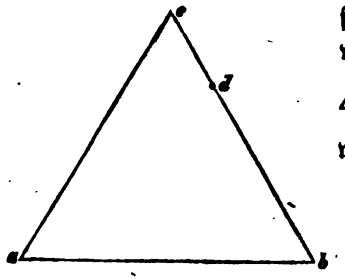
Digitized by Google

so ist dfcb = 212635 □′ und nach dem gegebenen Verhältnisse vertheilt, folgt für den an df liegenden Theil = 77321,818... □′, also für das △ agh = 142036,818... □′ Im Uebrigen verfahre wie bei Aufg. 448.

452) Bestimme ad (Fig. 21) wie oben. — Nach 247 wird △ abc = 277350 □′, also △ adf = 110940 □′ und dfcb = 166410 □′. Ist nun der an df liegende Theil = x, so ist der andere = x − 55000, folglich 2x − 55000 = 166410 und x = 110705 □′, also △ agh = 221645 □′. Ferner verhält sich: △ abc : △ agh = $ab^2 : ag^2$; hieraus ag u. s. w.

453) Schneidet die Theillinie in einer Entfernung von b=x die Seite ba (Fig. 22), so muß sich nach Abschn. VI. Lehrsatz 10 verhalten:

Fig. 22.



$$\triangle abc : \frac{\triangle abc}{2} = cb . ba : db . x,$$

woraus x bestimmt werden kann.

454) Verfahre nach dem in Andeut. 453 angeführten Satze.

455) Da der Inhalt △ abc = 293046 □′ ist, so folgt nach Abschn. VI. Lehrs. 10: 293046 : 53040 = 1105 . 884 : 552,5 : x u. s. w.

456) Der Inhalt des ganzen Dreiecks wird = 37453,1 □′, also verhält sich, wenn x und y die Abstände der Theillinien von b bezeichnen, nach Abschn. VI. Lehrs. 10:

37453,1 : 2881 = 300 . 400 : 180 . x u. s. w.

und 37453,1 : 15000 = 300 . 400 : 180 . y u. s. w.

(Man findet nämlich, daß die zweite Theillinie ebenfalls die Seite ab schneidet.) Aus der ersten Proportion folgt x = 51,28′ und aus der zweiten y = 267′.

457) Verfahre wie bei 456.

458) Man findet, daß beide Theillinien die Seite ab treffen. Die Bestimmung derselben geschieht nach Vorhergehendem.

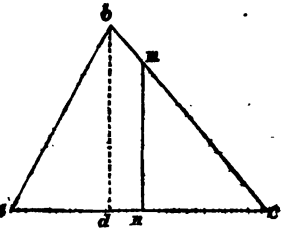
Digitized by Google

459) Man findet, daß der Inhalt des von den zwei mittlern zunächst an b liegenden Theiles = 35136,4 □⁰ und der des andern = 52704,6 □⁰ werden muß. Um die Theillinien zu bestimmen, verfahre man wie bei obigen Aufgaben.

460) Der Inhalt des △ abc wird = 210818,4 □⁰, also das nach dem gegebenen Verhältniß zu vertheilende Stück = 184466,1 □⁰ und die einzelnen Theile sind demnach 40992,466 □⁰, 61488,699 □⁰ und 81984,933 □⁰ u. s. w. wie oben.

461) Ziehe den Perpendikel bd (Fig. 23) und bestimme den Inhalt des △ bdc, um zu ersehen, ob die Theillinie rechts oder links von bd fällt. In vorliegendem Falle erkennt man sogleich, daß sie rechts von bd liegt. Ist nun mn diese Theillinie, so verhält sich:

Fig. 23.



△ bdc : △ mnc = dc² : nc², oder:
2084,6976 : 1628,67 = 74,56² : nc²
und hieraus nc = 65,902⁰; also, da sich auch verhält: bd : dc = mn : nc
oder 55,92 : 74,56 = mn : 65,902, mn = 49,426⁰.

Anmerk. mn ist auch = $\frac{2 \cdot \triangle\, mnc}{nc}$.

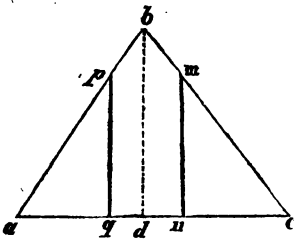
462) Befolge den in 461 eingeschlagenen Weg.

463) Berechne den Inhalt des △ abc (Fig. 23), und theile diesen nach dem gegebenen Verhältnisse in zwei Theile, so wird der an c liegende Theil = 1302,936 □⁰. Da ferner der Inhalt des △ bdc = 2084,6976 □⁰ ist, so fällt die Theillinie rechts von bd nach mn. Den Abstand nc, so wie die Länge von mn findet man wie in 461.

464) Der Inhalt des △ abc ist (nach 247) = 1732,05 □⁰; also △ abc = 577,35 □⁰ und bd = 43,301...⁰, cd = 25⁰ und ad = 55⁰; folglich △ bdc = 541,26562 □⁰ und △ abd = 1190,78438 □⁰. Beide Theillinien fallen also links von bd. Sind die Abstände ihrer Fußpunkte von a = x und y, so verhält sich: 577,35 : 1190,78438 = x² : 55²
und 2.577,35 : 1190,78438 = y² : 55²
woraus sich x und y bestimmen lassen.
Die Größe einer jeden Theillinie ist dann leicht zu finden.

Digitized by Google

Fig. 24.



465) Da der Inhalt des △abc (Fig. 24) = 1732,05 □⁰ gefunden wird, so sind die Theile nach der Reihe = 433,0125□⁰, 541,265625□⁰ und 757,771875□⁰, und weil ferner der Inhalt △ bdc = 541,26562□⁰ ist, so fällt die erste Theillinie rechts, die zweite links von bd. Es seien diese z. B. mn und pq; so verhält sich:

$$\left.\begin{array}{l} \triangle\ bdc : \triangle\ mnc = dc^2 : nc^2 \\ \text{und}\quad \triangle\ abd : \triangle\ apq = ad^2 : aq^2 \end{array}\right\} \text{(Abschnitt VI. Lehrs. 9.)}$$

Hieraus findet man nc und aq. Die Länge von mn und pq ist dann leicht zu bestimmen.

466) Man findet den Inhalt des △ abc (Fig. 24) = 85329,2□⁰, dc = 335,965⁰, bd = 299,4⁰; also den Inhalt des △ bdc = 53287,9605□⁰. Da nun dieser größer als $\frac{1}{2}$ △ abc und kleiner als $\frac{3}{4}$ △ abc ist, so fallen zwei Theillinien rechts und eine links von bd. Die Bestimmung der Fußpunkte, so wie der Größe der Theillinien geschieht ähnlich wie dies für die vorhergeh. Aufgaben gezeigt wurde.

467) Denkt man sich (Fig. 25) cd = $\frac{1}{n}$ ac gemacht, pf ∦ ac gezogen, cb bis g verlängert und bh ∦ gd gezeichnet, so muß △ cgh = △ cbd = $\frac{1}{n}$ abc sein.

Wird dann ch in k halbirt und kf ∦ gc gezogen, so ist kcgf = △ chg = $\frac{1}{n}$ △ abc. Beschreibt man nun über pf einen Halbkreis, mit bg den Bogen gq und macht kn = fq, so ist pmn die zu suchende Theillinie; denn △ krn ∽ △ frp ∽ △ pmg; also △ über fq = △ über fp — △ über qp*)

oder △ nrk = △ fpr — △ gpb oder

△ nrk = frmg; also wenn auf beiden Seiten rkcm = rkcm addirt wird,

$$\triangle\ nmc = fgck = \frac{1}{n} \triangle\ abc.$$

*) Nach dem Lehrsatze: Beschreibt man über den den drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks ähnliche Figuren, so sind die zwei Figuren über den Katheten zusammengenommen gleich der Figur über der Hypotenuse.

Digitized by Google

Es verhält sich nun, weil △ pgb ∽ △ abc ist:

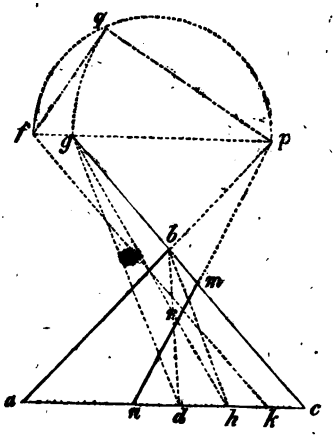


Fig. 25.

1) $pg : pb = ac : ab$, also $pg = pq = \frac{c \cdot d}{a}$

und 2) $bg : pb = bc : ab$, also $bg = \frac{b \cdot d}{a}$

3) $cg = cb + bg$, oder nach 2) $= \frac{b(a+d)}{a}$ und da

△ cgd ∽ △ cbh

folgt: $cg : cb = cd : ch$, und hieraus:

$$ch = \frac{cb \cdot cd}{cg} \text{ oder aus 3 und } cd = \frac{1}{n} \cdot ac \text{ auch}$$

$$ch = \frac{b \cdot \frac{c}{n}}{\frac{b(a+d)}{a}} = \frac{a \cdot c}{n(a+d)}; \text{ also}$$

4) $fg = ck = \frac{ch}{2} = \frac{a \cdot c}{2 \cdot n(a+d)}$, demnach:

5) pf nach 1) und 4) $= \frac{c \cdot d}{a} + \frac{a \cdot c}{2 \cdot n(a+d)}$

$kn = fq = \sqrt{(fp^2 - pq^2)}$, oder nach 1) und 5)

$$kn = \sqrt{\left[\left(\frac{c \cdot d}{a} + \frac{a \cdot c}{2 \cdot n(a+d)}\right)^2 - \left(\frac{c \cdot d}{a}\right)^2\right]} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{c^2 \cdot d}{n(a+d)} + \frac{a^2 c^2}{4 n^2 (a+d^2)}\right)} =$$

Digitized by Google

$$c\sqrt{\left(\frac{d}{n(a+d)}+\frac{a^2}{4n^2(a+d)^2}\right)}$$

oder 6) $kn=\frac{c}{2\,.\,n(a+d)}\sqrt{(4\,.\,n\,.\,d(a+d)+a^2)}$

Folglich ist $cn = ck + kn$ nach 4) und 6)

$=\frac{a\,.\,c}{2\,.\,n(a+d)}+\frac{c}{2\,.\,n(a+d)}\sqrt{(4\,.\,n\,.\,d(a+d)+a^2)}$, oder

$$cn=\frac{c}{2\,.\,n(a+d)}\left[a+\sqrt{(4\,.\,n\,.\,d(a+d)+a^2)}\right]$$

Ferner verhält sich nach Abschn. VI. Lehrs. 10:

$\triangle$ abc : $\triangle$ mnc = bc . ca : mc . cn oder

n : 1 = b . c : mc . cn, also

ist $mc=\frac{b\,.\,c}{n\,.\,cn}$, oder, wenn man den Werth von cn substituirt:

$$mc=\frac{2b\,(a+d)}{a+\sqrt{(4\,.\,n\,.\,d(a+d)+a^2)}}.$$

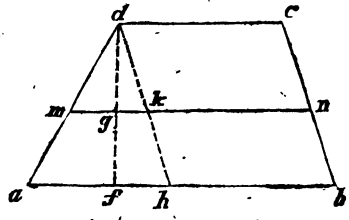
468) Substituire in den vorhergehenden Formeln für die Buchstaben die betreffenden Zahlenwerthe.

469) Setze in den Formeln der Aufg. 467, um die Theillinie für den ersten Theil zu bestimmen, $n = 3$, und bei Auffindung der zweiten Theillinie in den gleichen Formeln für $n=\frac{3}{2}$.

470) Substituire in obiger Formel für $n=\frac{54150}{20000}$ d. h. den Inhalt $\triangle$ abc getheilt durch den des abzuschneidenden Stückes u. s. w.

471) Denkt man sich (Fig. 26) von d aus eine ∥ dh zu cb gezogen, so entstehen ähnliche Dreiecke dmk und dah und es verhält sich:

Fig. 26.



I. $mn-dc:ah=dg:df$;

ferner ist

II. $\frac{dc+mn}{2}\,.\,dg=9800\left(=\frac{abcd}{2}\right)$

oder

I. $7\,mn-2\,dg=840$ und

II. $120\,dg+mn\,.\,dg=19600$.

Substituirt man nun den Werth von dg aus I. in II., so ergibt sich mn, und dg ist nun leicht zu finden.

Digitized by Google

472) Verfahre nach der Anleit. zur vorhergeh. Aufgabe.

473) Bestimme den Inhalt des ganzen Paralleltrapezes und vertheile diesen nach dem gegebenen Verhältnisse, so wird der an dc liegende Theil = 5364 □′. Bilde wieder ähnlich wie in 471 zwei Gleichungen u. s. w.

474) Der Inhalt des ganzen Paralleltrapezes wird = 28000 □′, also werden die Theile = 1350 □′, 14000 □′ und 10500 □′. Bestimme nun zuerst wie in 471 die Theillinie, welche ein Stück von 1350 □′ und dann eine andere, welche 1350 □′ + 14000 □′ abschneidet u. s. w.

475) Gebrauche statt der in Aufg. 471 und 472 angegebenen Zahlenwerthe, die hier angeführten allgemeinen Zeichen, so ergeben sich, wenn man denselben Gang bei der Lösung wie dort einhält, die verlangten Formeln.

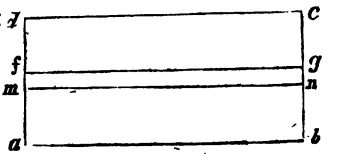
477) Die Lösung dieser Aufgabe geschieht nach den für die vorhergeh. Aufgaben angeführten Andeutungen.

§. 27. Aufgaben über die Theilung von Flächen, welche aus Theilen von verschiedenem Bodenwerthe bestehen.

(Oekonomische Theilung.)

479) Die Theillinie mn (Fig. 27) muß in die Fläche abgf fallen. Nun ist Inhalt fgcd = 53460 und Inhalt abgf = Inhalt abcd — Inhalt fgcd = 123444, also der Werth von abnm = $\frac{123444 \cdot 3 + 53460 \cdot 2}{2}$ fl.

Fig. 27.

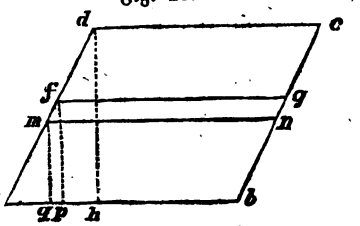


aber auch = 486 . bn . 3 fl.

Bildet man nun hieraus eine Gleichung, so läßt sich bn leicht finden.

480) Inhalt abcd (Fig. 28) = ab . dh = 103844 □°. Um den Inhalt von abgf zu finden, muß man zuerst die Höhe fp bestimmen, wie folgt. Es verhält sich: fp : dh = af : ad, hieraus fp = 173,073°; folglich Inhalt abgf = 54829,2 □° und

Fig. 28.



Digitized by Google

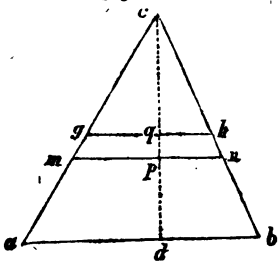
Inhalt fgod = 49054,8 □°. Man erhält daher die Gleichung:

$$400 \cdot mq \cdot 4 = \frac{49054{,}8 \cdot 3 + 54829{,}2 \cdot 4}{2}$$

und hieraus mq = 114,52°. Nun verhält sich aber am : ad = mq : dh, woraus sich am bestimmen läßt.

481) Es verhält sich (Fig. 29) cd : ab = cq : gh, also ist gh = 75°; folglich: Werth von

Fig. 29.



$$abhg = \frac{100+75}{2} \cdot 20 \cdot 3 \text{ fl.} = 5250 \text{ fl.}$$

und Werth von ghc = $\frac{75 \cdot 60}{2} \cdot \frac{3}{2}$ fl. = 3375 fl.,

also der Werth von abc 8625 fl.

demnach der halbe Werth = 4312,5 fl.

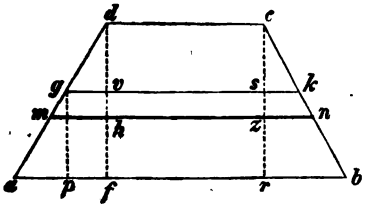
Die Theillinie mn fällt also in die Fläche abhg. Der Werth von abnm ist aber $= \frac{100+mn}{2} \cdot dp \cdot 3$ fl. und aus der Proportion 80 : 100 = 80 — dp : mn folgt $mn = 100 - \frac{5 \cdot dp}{4}$. Man erhält daher die Gleichung:

$$\left(100 + 100 - \frac{5 \cdot dp}{4}\right) \frac{dp \cdot 3}{2} = 4312{,}5 \text{ und hieraus}$$

$$dp^2 - 160 \cdot dp = -2300 \text{ u. s. w.}$$

482) Rechne zuerst gp (Fig. 30), dann af. Man findet für

Fig. 30.



erstere 40° und für letztere 42°; daher ist fb = 26° und rb = 8°, $cb = \sqrt{(cr^2+rb^2)} = 56{,}568°$, cs = 16° und sk (aus der Proportion cs : sk = cr : rb) = 2,2857° und gv (aus gv : dv = af : fd) = 12°; folglich ist gk = 12 + 32 + 2,2857 = 46,2857°.

Nun ist also der

Werth von $abkg = \frac{ab + kg}{2} \cdot gp \cdot 3$ fl. = 6857,142 fl.

Werth von $gkcd = \frac{gk + cd}{2} \cdot dv \cdot 2$ fl. = 1252,5712 fl.

folglich der halbe Werth von abcd = 8109,7132 : 2 = 4054,8566 fl.

Digitized by Google

Da ferner $mh = \frac{fd - fh}{df} \cdot af$ und $zn = \frac{cr - fh}{fh} \cdot rb$, so erhält man den Werth von abnm =

$$\left((56 - fh)\frac{3}{4} + (56 - fh)\frac{1}{7} + 32 + 68\right)\frac{fh \cdot 3}{3} \text{ fl.}$$

Setzt man diesen = 4054,8566, so erhält man nach gehöriger Reduktion die Gleichung: $fh^2 - 168 \cdot fh = -3027{,}626$ und hieraus fh.

483) Der halbe Werth des ganzen Feldes abcd (Fig. 31) beträgt 37500 fl. Man erhält daher die Gleichung:

I. $\frac{200 \cdot pn}{2} \cdot am \cdot 2 + (200 - pn)\frac{am}{2} \cdot 3 = 37500.$

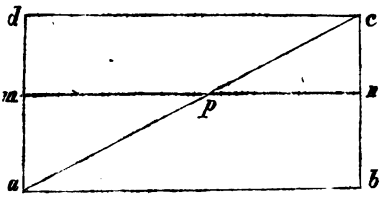
Nun verhält sich

ab : bc = ab — pn : am

hieraus wird $pn = \frac{600 - 4 \cdot am}{3}$

Substituirt man diesen Werth in I. und reducirt hierauf, so erhält man folgende Gleichung:

Fig. 31.

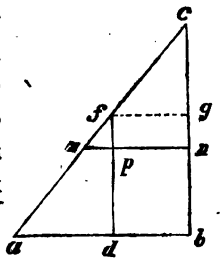


$am^2 + 600 \cdot am = 56250$ und hieraus am.

484) Bestimme zuerst (Fig. 32) bc (= 60'), dann den Werth von adf (= 1296 fl.) und den Werth von dbcf (= 3840 fl.), so folgt für den halben Werth von abc = 2568 fl. Da der Werth von fgc = 960 fl. wird, so schneidet also die Theillinie die Seite fd. Es sei dieselbe z. B. mn. Aus der Proportion

mp : df — dp = ab : bc folgt $mp = \frac{72 - 2x}{3}$

Fig. 32.



Nach der Aufgabe erhält man nun die Gleichung:

Werth von adpm + Werth von dbnp = halben Werth abc, oder

$$\frac{24 + mp}{2} \cdot pd \cdot 3 + 80 \cdot pd = 2568, \text{ oder}$$

$$(72 - pd)\, pd + 80 \cdot pd = 2568 \text{ und endlich}$$

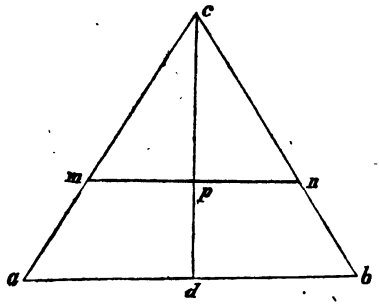
$$pd^2 - 152 \cdot pd = -2568, \text{ woraus}$$

pd = bn gefunden werden kann.

Digitized by Google

485) Bestimme zuerst (Fig. 33) db (= 121,6), dann cd (= 91,2), hierauf den Werth von cdb (= 11089,92 fl.) und den von ad (= 7797,6 fl.) und hieraus den halben Werth von abc = 9443,76 fl. Nun drücke man mp und pn in cp aus, wie folgt:

Fig. 33.



$$cp : pm = cd : ad, \text{ also } pm = \frac{3}{4}\, cp$$

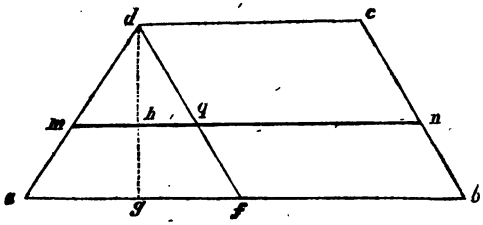
$$cp : pn = cd : db, \text{ also } pn = \frac{4}{3}\, cp.$$

Da nun Werth von pm + Werth von cpn = 9443,76 sein muß, so erhält man nach gehöriger Reduktion die Gleichung:

$64\ cp^2 + 45\ cp^2 = 453299{,}08$ und hieraus cp.

486) Man findet, daß der halbe Werth von abcd (Fig. 34) = 4375 fl. wird. Da nun $mq = \frac{25 \cdot dh}{40} = \frac{5}{8}\, dh$ ist (denn △ adf ∽ △ mdq), so erhält man, weil Werth von mqd + Werth von qncd = 4375 sein muß, die Gleichung:

Fig. 34.

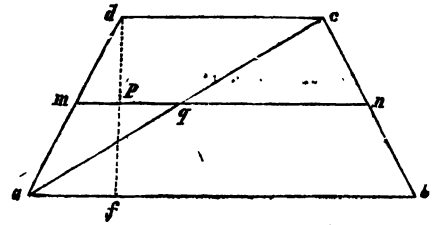


$\frac{35}{32}\, dh^2 + 175 \cdot dh = 4375$ oder: $dh^2 + 160 \cdot dh = 4000$

und hieraus dh = 21,98°, also hg = 18,02°.

487) Der halbe Werth von abcd (Fig. 35) wird = 1642,5 fl. Aus den ähnlichen Dreiecken amq und adc folgt $mq = \frac{25}{36}\, pf$ und aus der Aehnlichkeit der Dreiecke abc und qnc ergibt sich $qn = \frac{40\,(36 - pf)}{36}$

Fig. 35.



Digitized by Google

Nun ist also der Werth

von amq $= \frac{25}{36}\,\text{pf} \cdot \frac{\text{pf}}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{125}{144}\,\text{pf}^2$;

von abnq $= \left[40 + \frac{40(36-\text{pf})}{36}\right] \frac{\text{pf}}{2} \cdot 3 = 120\,\text{pf} - \frac{5}{3}\,\text{pf}^2$;

und man erhält daher die Gleichung:

$$\frac{125}{144}\,\text{pf}^2 + 120\,\text{pf} - \frac{5}{3}\,\text{pf}^2 = 1642{,}5 \text{ oder}$$

$$\text{pf}^2 - \frac{3456}{23}\,\text{pf} = -\frac{47304}{23} \text{ u. s. w.}$$

488) Der halbe Werth der Fläche abcd (Fig. 36) beträgt 3625 fl. Ferner ist:

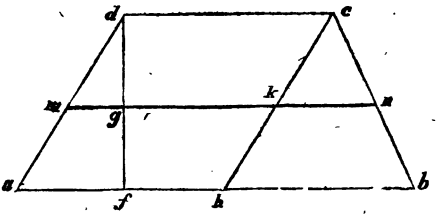
1) Werth von afgm $= \frac{\text{af} + \text{mg}}{2} \cdot \text{fg} = \frac{10 + \text{mg}}{2} \cdot \text{fg}$,

2) Werth von fhkg $= \frac{\text{fh} + \text{gk}}{2} \cdot \text{fg} \cdot 2 = (100 - \text{mg}) \cdot \text{fg}$,

3) Werth von hbnk $= \frac{\text{hb} + \text{kn}}{2} \cdot \text{fg} \cdot 3 = \frac{20 + \text{kn}}{2} \cdot 3 \cdot \text{fg}$

oder, da aus der Proportion: df — gf : mg = df : af, $\text{mg} = 10 - \frac{\text{gf}}{5}$, und aus: df — gf : kn = df : hb, $\text{kn} = 20 - \frac{2.\text{fg}}{5}$ folgt, so ergibt sich durch Substitution dieser Werthe in 1, 2 und 3 und durch Gleichsetzung der Summe dieser Ausdrücke und des halben Werthes von abcd, nach gehöriger Reduktion folgende Gleichung: $\text{fg}^2 - 340\,\text{fg} = -7250$ u. s. w.

Fig. 36.



489) Man berechne zuerst den vierten Theil des Werthes der Fläche abcd (Fig. 37) wie folgt: dv wird = 24°, also df = 404° und cf = 272°; folglich ist:

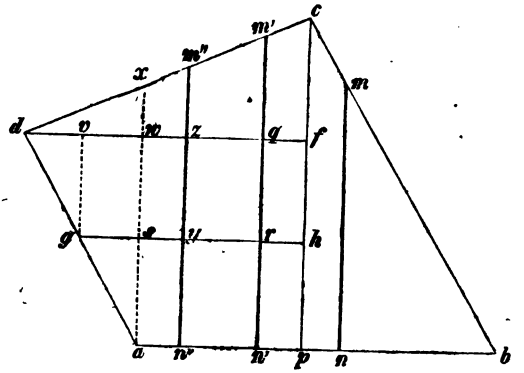
Werth von bcp = 108000 fl.
" " aphg = 70200 fl.
" " ghfd = 30576 fl.
" " dfc = 27472 fl.

$$\frac{\text{Werth abcd}}{4} = \frac{236248}{4} = 59062 \text{ fl.}$$

Digitized by Google

Eine Theillinie mn liegt daher in der Fläche bcp, und man erhält $\frac{mn \cdot nb}{2} \cdot \frac{5}{4} = 59062$, oder, da $mn = \frac{4 \cdot nb}{3}$ ($\triangle bcp \sim \triangle mnb$) auch: $\frac{5 \cdot nb^2}{6} = 59062$, woraus folgt: $nb = 266{,}2^0$.

Fig. 37.



Um die Lage der Theillinie m'' n'' zu bestimmen, hat man aus den $\sim \triangle\triangle$ dvg und dwa, $dw = 64^0$; aus $\triangle$ dvg $\sim \triangle$ gsa, $gs = 40^0$ und aus der Aehnlichkeit der $\triangle\triangle$ dwx und dfc, $wx = 43{,}089^0$, woraus sich berechnen läßt:

der Werth von ags = 3900 fl.
" " " gswd = 4056 fl. und
" " " dwx = 689,424 fl.
also der Werth von axd = 8645,424 fl.

Da dieser kleiner als 59062 fl. ist, so fällt die Theillinie m'' n'' zwischen a und p, und man erhält daher, weil $m'' z = \frac{68\,(64 + an'')}{101}$ ist, die Gleichung: 8645,424 + Werth von an''ys + Werth von syzw + Werth von wzm''x = 59062 oder $8645{,}424 + 195 \cdot an'' + 78\,an'' + \left(43{,}09 + \frac{68\,(64+an'')}{101}\right)\frac{an''}{4} = 59062$, oder nach gehöriger Reduktion: $an''^2 + 1749{,}98\,an'' = 299546$ und hieraus $an'' = 157{,}07^0$; also $bn'' = 542{,}93^0$. Eine einfache Vergleichung des Werthes von pbc mit $\frac{2}{4}$ des Werthes von abcd

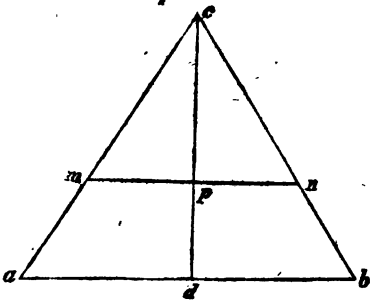
Digitized by Google

zeigt, daß die dritte Theillinie m′ n′ zwischen p und n″ liegen muß.

Nun erhält man wieder aus den Werthen von n″n′ry, yrqz und zqm′m″, nachdem man vorher aus der Aehnlichkeit der △△dfc und dqm′ die Linie m′q in n′n″ ausgedrückt hat, die Gleichung: $n'n''^2 + 2027{,}66\,n'n'' = 350912$ und hieraus: $n'n'' = 160{,}37^0$, also $bn' = 382{,}56^0$.

490) Rechne zuerst (Fig. 38.) cd und drücke dann mp und pn in cp aus wie folgt:

Fig. 38.



$$cp : mp = cd : ad,$$

$$\text{also } mp = \frac{4}{3}\,cp$$

$$\text{ferner } cp : pn = cd : db,$$

$$\text{also } pn = \frac{3}{4}\,cp.$$

Nun ist aber:

$$\text{Werth von mpc} = \frac{4}{3} \cdot cp \cdot \frac{cp}{2} \cdot \frac{6}{5} = \frac{4}{5}\,cp^2 \text{ fl.};$$

$$\text{Werth von npc} = \frac{3}{4} \cdot cp \cdot \frac{cp}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{16}\,cp^2 \text{ fl.};$$

$$\text{Werth von adpm} = \left(52{,}8 + \frac{4}{3}\,cp\right)\left(\frac{39{,}6 - cp}{2}\right) \cdot \frac{6}{5} \text{ fl.}$$

$$\text{und Werth von dbpn} = \left(29{,}7 + \frac{3}{4}\,cp\right)\left(\frac{39{,}6 - cp}{2}\right) \cdot \frac{3}{2} \text{ fl.}$$

Man erhält also die Gleichung:

$$\left(\frac{39{,}6 - cp}{2}\right)\left[\left(52{,}8 + \frac{4}{3}\,cp\right)\frac{6}{5} + \left(29{,}7 + \frac{3}{4}\,cp\right)\frac{3}{2}\right] + 280 = \frac{4}{5}\,cp^2 + \frac{9}{16}\,cp^2, \text{ oder}$$

$$(19{,}8 - 0{,}5\,cp)\,(107{,}91 + 2{,}725 \cdot cp) + 280 = \frac{109}{80}\,cp^2$$

$$\text{oder auch } 2{,}725\,cp^2 = 2416{,}618$$

$$\text{und hieraus } cp = 29{,}76^0.$$

491) Man findet (Fig. 39) $af = 60^0$, $mq = \frac{9}{8}\,pf$ (△ adc ∽ △ amq) und $qn = \frac{3}{2}\,(80 - pf)$ (△ abc ∽ △ qcn);

Digitized by Google

Ferner ist:

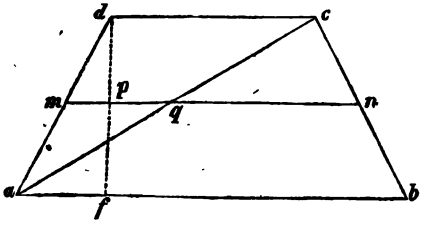
$$\text{Werth von mqa} = \frac{9}{8} \cdot \frac{pf^2}{2} \cdot \frac{11}{10} \text{ fl.}$$

$$\text{Werth von abnq} = \left(120 + \frac{3}{2}(80 - pf)\right) \frac{pf}{2} \cdot \frac{5}{4} \text{ fl.}$$

$$\text{Werth von mqcd} = \left(\frac{9}{8} pf + 90\right) \left(40 - \frac{pf}{2}\right) \frac{11}{10} \text{ fl.}$$

$$\text{Werth von qnc} = \frac{3}{2}(80 - pf) \left(40 - \frac{pf}{2}\right) \frac{5}{4} \text{ fl.}$$

Fig. 39.



Nach der Bedingung muß aber Werth von mqa + Werth von abnq + 1500 fl. = Werth von mqcd + Werth von qnc sein. Substituirt man obige Werthe, so erhält man zuletzt die Gleichung:

$pf^2 - 470{,}5882\,pf = -13270{,}5882$ und hieraus pf.

Abschnitt VIII.

Aufgaben über die Proportionallinien im Kreise.

Lehrsätze.

1) Schneiden sich zwei Sehnen im Kreise, so stehen ihre Stücke in verkehrter Proportion.
2) Die Hälfte einer Sehne, welche einen Durchmesser senkrecht schneidet, ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen den zwei Abschnitten des Durchmessers.
3) Jede vom Endpunkte eines Durchmessers ausgehende Sehne ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen dem ganzen Durchmesser und dem an der Sehne liegenden Abschnitt desselben, welcher entsteht, wenn man vom Endpunkte der Sehne einen Perpendikel auf den Durchmesser fällt.
4) Die Quadrate zweier Sehnen, welche von dem Endpunkte eines Durchmessers ausgehen, verhalten sich wie die Abschnitte des Durchmessers, welche zwischen diesem Endpunkte und den von den andern Endpunkten der Sehnen auf den Durchmesser gezogenen Senkrechten liegen.
5) Zwei Sekanten, welche sich außerhalb eines Kreises schneiden, stehen in umgekehrter Proportion mit ihren außerhalb des Kreises liegenden Theilen.

Digitized by Google

6) Wenn eine Sekante und eine Tangente sich schneiden, so ist die Tangente die mittlere geometrische Proportionale zwischen der ganzen Sekante und dem außerhalb des Kreises liegenden Theile derselben.

§. 28. Aufgaben über die Sehnen.

492) Nach Lehrs. 1 verhält sich $35 : 15 = 28 : x$ u. s. w.

493) Der eine Abschnitt sei $= x$, so ist der andere $22 - x$; folglich verhält sich nach Lehrs. 1: $8 : x = 22 - x : 5$ u. s. w.

494) Nach Lehrs. 2 folgt die Proportion: $7 : x = x : 28$ u. s. w.

495) Ist der Halbmesser $= x$, so verhält sich nach Lehrs. 2 $2x - 4{,}5 : 14{,}5 = 14{,}5 : 4{,}5$ u. s. w.

496) Die Entfernung sei $= x$, so folgt:

$$12{,}4 - x : 9{,}1 = 9{,}1 : 12{,}4 + x \text{ u. s. w.}$$

497) Der Radius sei $= x$, so muß sich verhalten:

$$2x - 4{,}8 : 1{,}92 = 192 : 4{,}8 \text{ u. s. w.}$$

498) Bezeichnet man den an der Peripherie liegenden Theil mit x, so ist der am Centrum $= x + 9$; also der Halbmesser $= 2x + 9$; folglich verhält sich nach Lehrs. 2: $x : 9 = 9 : 3x + 18$ ꝛc.

499) Nach Lehrs. 3 verhält sich $36 : x = x : 16$ u. s. w.

500) Bezeichnet man den Durchmesser mit x, so verhält sich nach Lehrs. 3: $x : 5{,}8 = 5{,}8 : x - 2{,}4$. Ist hieraus x gefunden, so läßt sich die Sehne leicht bestimmen.

501) Nenne den an der Sehne liegenden Abschnitt x, so ist der andere $\frac{5x}{2}$, also der Durchmesser $= \frac{7x}{2}$ u. s. w. nach Lehrs. 3.

502) Bezeichnet man den nicht an der Sehne liegenden Abschnitt mit x, so ist der anliegende $= x + 1{,}4$ und der Durchmesser $= 2x + 1{,}4$. Bilde nun nach Lehrs. 3 eine Proportion, so folgt aus dieser die Gleichung: $x^2 + 2{,}1x = 5{,}5$ u. s. w.

503) Nach Lehrs. 4 ergibt sich die Sehne x aus der Proportion: $24^2 : x^2 = 12 : 18$.

504) Setze die eine Entfernung $= x$, so ist die andere $x + 5$ und nach Lehrs. 4 muß sich also verhalten: $8^2 : 15^2 = x : x + 5$. Bestimme hieraus x und dann nach Lehrs. 3 den Durchmesser.

505) Die eine Sehne sei $= x$, so ist die andere $= x + 6$ und es verhält sich nach Lehrs. 4: $x^2 : (x + 6)^2 = 8 : 12$ u. s. w.

Digitized by Google

§. 29. Aufgaben über Sekanten.

506) Nach Lehrs. 5 verhält sich $36 : x = 12 : 8$ u. s. w.

507) Wende Lehrs. 5 an.

508) Die erste Sekante sei x, so fällt $\frac{x}{3}$ außerhalb des Kreises. Bilde nach Lehrs. 5 eine Proportion u. s. w.

509) Ist das innerhalb des Kreises liegende Stück der zweiten Sekante $= x$, so folgt nach Lehrs. 5:

$$0{,}42 : 2x + 0{,}16 = x + 0{,}16 : 0{,}1.$$

Bestimme hieraus x und dann die Sekante.

510) Ist das außerhalb liegende Stück der größeren Sekante $= x$, so ist das der andern $= x + 3{,}2$ und es muß sich verhalten: $27{,}4 : 42{,}8 = x : x + 3{,}2$ u. s. w.

511) Die eine Sekante sei x, so ist die andere $124 - x$. Man findet die Länge einer jeden nun leicht nach Lehrs. 5 aus der Proportion: $x : 124 - x = 18 : 24$.

§. 30. Aufgaben über Sekanten und Tangenten.

512) Bilde nach Lehrs. 6 die Proportion $10 : 8{,}5 = 8{,}5 : x$, so läßt sich hieraus das Stück berechnen.

513) Nach Lehrs. 6 verhält sich: $x : 10{,}5 = 10{,}5 : 4{,}5$ u. s. w.

514) Nach Lehrs. 6 folgt: $14{,}45 : x = x : 5$ u. s. w.

515) Setze die Tangente $= x$, drücke hierin die Theile der Sekante aus; bilde dann nach Lehrs. 6 die Proportion:

$$x + 2 : x = x : \frac{x}{2} + 2$$

so führt diese zur Gleichung: $x^2 - 6x = 8$, woraus nun die Tangente, also auch die Sekante, leicht zu bestimmen sind.

516) Setze die Länge der Tangente $= x$. Bilde nach Lehrsatz 6 eine Proportion und entwickle hieraus die Gleichung: $x^2 - 36{,}2x = -136{,}8$ u. s. w.

Digitized by Google

Abschnitt IX.

Aufgaben über die Berechnung der regelmäßigen Vielecke.

Lehrsätze.

1) In jedem regelmäßigen Vieleck liegt ein Punkt (Mittelpunkt), der von allen Endpunkten sowie von allen Seiten gleich weit entfernt ist.
2) Der Inhalt eines regelmäßigen Vielecks ist gleich dem halben Produkte aus dem Umfange desselben und dem Radius des eingeschriebenen Kreises.
3) Die Seite eines regelmäßigen Sechsecks ist gleich dem Halbmesser des umgeschriebenen Kreises.
4) Die Seite des eingeschriebenen Quadrats ist gleich der Sehne des Quadranten.
5) Theilt man den Halbmesser eines Kreises nach dem mittlern und äußern Verhältnisse, d. h. so in zwei Theile, daß der größere Theil die mittlere geometrische Proportionale ist zwischen dem ganzen Radius und dem kleineren Theile, so ist dieser größere Theil die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Zehnecks.

§. 31. Bestimmung des Inhalts aus der Seite und dem Halbmesser des eingeschriebenen Kreises.

517) Nach Lehrs. 2 wird der Inhalt $= \frac{n \cdot s \cdot r}{2}$.

518) Hier ist n in der Aufgabe 517 unbekannt. Man erhält $n = \frac{2 \cdot J}{s \cdot r}$.

519) Bestimme r aus dem Resultate zu Aufg. 517.

§. 32. Bestimmung der Seite aus dem Halbmesser des umgeschriebenen Kreises und umgekehrt.

520) Die halbe Dreieckseite s bildet mit dem Radius R der Ecke und dem des in das △ beschriebenen Kreises $= \frac{R}{2}$ ein rechtwinkliges Dreieck, woraus folgt: $s^2 = 2\sqrt{\left(R^2 - \frac{R^2}{4}\right)}$; also $s = R\sqrt{3}$.

521) Vergl. die Andeut. zur vorherg. Aufgabe.

522) Bestimme R aus der Formel für 520.

523) Nach Lehrs. 4 wird $s^2 = 2R^2$, also $s = R\sqrt{2}$.

Digitized by Google

524) Setze in vorhergeh. Aufgabe für R = 12′ u. s. w.

525) Bestimme R aus 523.

526) Bezeichnet man die Zehneckseite mit s, so muß sich nach Lehrs. 5 verhalten: $R : s = s : R - s$, woraus: $s^2 + Rs = R^2$. Löset diese Gleichung auf, so folgt: $s = \frac{R}{2}(-1 + \sqrt{5})$.

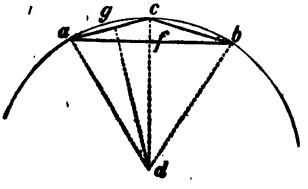
527) Substituire für R in vorherg. Aufgabe den Werth 6.

528) Durch Substitution des Werthes 92,7 für s in Formel 526.

Nach Lehrs. 5 folgt R auch aus der Proportion $R : 92{,}7 = 92{,}7 : R - 92{,}7$.

529) Es sei ab (Fig. 40) die Seite des eingeschriebenen Sechsecks, so ist ac die des Zwölfecks. Aus △ acf folgt

Fig. 40.



$$ac^2 = af^2 + fc^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 + (R - df)^2$$

Setze für $df = \sqrt{(ad^2 - af^2)} = \sqrt{\left[R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2\right]}$

so folgt: $ac^2 = R^2(2 - \sqrt{3})$; also $ac = s = R\sqrt{(2 - \sqrt{3})}$.

530) Verfahre wie in 529.

531) Folgt aus 529.

532) Es sei ab (Fig. 40) = s und ac die Seite s′ des Vielecks von doppelter Seitenanzahl; so ist:

$$ac^2 = \frac{s^2}{4} + cf^2 = \frac{s^2}{4} + (R - df)^2.$$

Substituire nun aus dem △ adf für

$$df = \sqrt{\left(R^2 - \frac{s^2}{4}\right)}, \text{ so folgt:}$$

$$ac^2 = 2R\left[R - \sqrt{\left(R^2 - \frac{s^2}{4}\right)}\right], \text{ also}$$

$$ac = s' = \sqrt{\left[2R\left(R - \sqrt{\left(R^2 - \frac{s^2}{4}\right)}\right)\right]}.$$

533) Man findet die Seite entweder unmittelbar wie in 532, oder durch Substitution der gegebenen Werthe in die dort gefundene Formel.

534) Substituire in die Formel der Aufgabe 532 für s den Werth $R\sqrt{2}$ aus Aufgabe 523 und reducire.

Digitized by Google

535) Durch Substitution in 534.

536) Setze nach Aufgabe 534 $R\sqrt{(2-\sqrt{2})} = 14$ und bestimme hieraus R.

537) Erste Auflösung. Entwickle aus der für Aufgabe 532 erhaltenen Formel die unbekannte Seite s.

Zweite Auflösung. Es sei in Fig. 40 ac = s und ab = s'; so verhält sich, da △ acf ∽ △ dcg ist:

$$ac : af = dc : dg, \text{ oder}$$

$$s' : \frac{s}{2} = R : \sqrt{\left(R^2 - \frac{s'^2}{4}\right)}; \text{ folglich ist}$$

$$s = \frac{s'}{R}\sqrt{(4R^2 - s'^2)}.$$

538) Man findet die Seite nach den für Aufgabe 537 angegebenen Verfahrungsarten.

539) Substituire in 537 für s aus Aufg. 526 den Werth $\frac{R}{2}(-1+\sqrt{5})$, so findet man nach hinlänglicher Reduktion den Ausdruck $s = \frac{R}{2}\sqrt{(10-2\sqrt{5})} = R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$.

540) Vergl. Aufg. 539.

541) Setze in 539 für s = 9,4′ und entwickle daraus R.

§. 33. Bestimmung der Seite aus dem Halbmesser des eingeschriebenen Kreises und umgekehrt.

542) a) Es ist $\left(\frac{S}{2}\right)^2 = (2r)^2 - r^2$, also $S = 2r\sqrt{3} = 3{,}464 \cdot r$.

c) Bezeichnet man den Halbmesser des umschriebenen Kreises mit ϱ, so ist $\left(\frac{S}{2}\right)^2 = \varrho^2 - r^2 \ldots$. (I). Aus der Formel in Aufg. 539 ergibt sich aber für ϱ der Werth $\frac{2S}{\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}$ und durch Substitution in I folgt:

$$\frac{S^2}{4} = \frac{2S}{\sqrt{(10-2\sqrt{5}}} - r^2, \text{ und hieraus}$$

$$S = r\sqrt{\frac{40-8\sqrt{5}}{6+2\sqrt{5}}} = r\sqrt{\frac{(40-8\sqrt{5})\,(6-2\sqrt{5})}{(6+2\sqrt{5})\,(6-2\sqrt{5})}} \text{ oder}$$

$$S = r\sqrt{(20-8\sqrt{5})} = 2r\sqrt{(5-2\sqrt{5})}.$$

Digitized by Google

d) Behält ϱ die vorige Bedeutung bei, so folgt wieder $\left(\frac{S}{2}\right)^2 = \varrho^2 - r^2$, oder da nach Lehrs. 3 $\varrho = S$ ist, auch $\frac{S^2}{4} = S^2 - r^2$, woraus $S = \sqrt{\frac{4r^2}{3}} = \frac{2r}{3}\sqrt{3} = 1{,}1547 \cdot r$.

e) Verfahre auf gleiche Weise wie in beiden vorherg. Aufgaben c und d und setze für ϱ den sich aus der Formel in Aufg. 534 für r ergebenden Werth, so folgt:

$$S = r(\sqrt{8} - 2) = 0{,}8284 \cdot r.$$

f) Benutze zur Bestimmung von ϱ die Formel in Aufg. 526, so ergibt sich: $S = \sqrt{\left(4 - \frac{8}{5}\sqrt{5}\right)} = 0{,}6498 \cdot r$.

Auf ähnliche Weise verfahre man um g) zu lösen.

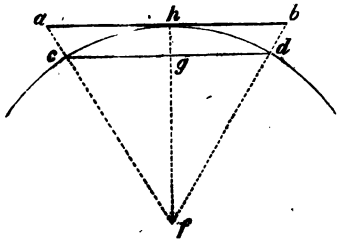
543) bis 549) Diese Aufgaben können nun leicht entweder nach den für Aufg. 542 erhaltenen Formeln, oder auch auf direktem Wege nach der dort angedeuteten Methode gelöst werden.

550) und 551) Betrachte in den Ausdrücken, welche für Aufgabe 542 erhalten wurden, r als Unbekannte und bestimme diese hieraus.

§. 24. Bestimmung der Seite des umgeschriebenen Polygons aus der des eingeschriebenen.

552) Es sei cd (Fig. 41) die Seite s des eingeschriebenen Vielecks und ab = S die des umgeschriebenen, so ist

Fig. 41.



$\triangle$ abf $\backsim$ $\triangle$ cdf; folglich verhält sich:

$S : s = hf : gf$ und hieraus

$$S = \frac{R \cdot s}{\sqrt{\left(R^2 - \frac{s^2}{4}\right)}} = \frac{2R \cdot s}{\sqrt{(4R^2 - s^2)}}.$$

Digitized by Google

553) a) Substituire aus Aufg. 520 den Werth von $R = \frac{s}{r3}$ in die für Aufg. 552 erhaltene Formel, so folgt:

$$S = \frac{2s^2}{r3 \cdot \sqrt{\frac{s^2}{3}}} = 2s.$$

b) Aehnlich wie in a) kann man aus Aufg. 523 für R den Werth $\frac{s}{r2}$ in 552 substituiren, um $S = sr2 = 1{,}4142 \cdot s$ zu erhalten.

Anmerk. Zu den gleichen Resultaten kann man jedoch auch leicht auf direktem Wege gelangen.

Auf gleichem Wege gelangt man zu den Ausdrücken für die übrigen Polygonseiten.

554) bis 560) Vergl. Aufg. 553.

§. 35. Bestimmung der Seite des eingeschriebenen Polygons aus der des umgeschriebenen.

561) Verfahre wie bei Aufg. 552, so folgt für s die Formel:

$$s = \frac{2r \cdot S}{r(4r^2 + S^2)}.$$

562) Bestimme s aus den für Aufg. 553 erhaltenen Formeln.

563) bis 569) Vergl. 562.

§. 36. Bestimmung des Halbmessers des eingeschriebenen Kreises aus dem des umgeschriebenen.

570) a) Die direkte Auflösung ergibt sich leicht aus der Anschauung der Figur. Man gelangt aber auch auf folgende Weise zu dem Resultate: Nach Aufg. 520 wird die Seite des eingeschriebenen Dreiecks $= Rr3$, und nach 550a) ist der Halbmesser des in das Dreieck von $Rr3$ Seite beschriebenen Kreises $=$

$$\frac{1}{2r3} \cdot s, \text{ also } r = \frac{Rr3}{2r3} = 0{,}5 \cdot R.$$

Verfahre bei Auflösung der übrigen Fälle ähnlich wie eben gezeigt wurde.

571) bis 576) können leicht aus 570 bestimmt werden.

Digitized by Google

§. 37. Bestimmung des Halbmessers des umschriebenen Kreises aus dem des eingeschriebenen.

577) Man erhält die verlangten Ausdrücke, wenn man aus den für Aufg. 570 erhaltenen Resultaten R bestimmt.

Anmerk. Man bekommt diese Resultate auch, wenn man nach Früherem die Seite des umgeschriebenen Vielecks für r bestimmt und dazu den Halbmesser R eines Kreises sucht, der um das Polygon von der in r ausgedrückten Seite gezeichnet ist. — So ist z. B. beim Viereck nach 550 b) $s = 2r$ und nach 523: $R = \frac{2 \cdot r}{\sqrt{2}} = r\sqrt{2}$.

578) bis 584) Vergl. Nr. 577.

§. 38. Bestimmung des Inhalts aus der Seite.

585) a) Nach Lehrs. 2 ist $J = 3s \cdot \frac{r}{2}$ oder nach 550 a) $= \frac{3s}{2} \cdot \frac{s}{2\sqrt{3}} = \frac{s^2}{4}\sqrt{3} = 0{,}43301 \cdot s^2$. (Vergl. auch 230.)

c) $J = \frac{5s}{2} \cdot r$, oder nach 550 c) $= \frac{5s^2}{2\sqrt{(20-8\sqrt{5})}} =$

$$\frac{5s^2\sqrt{(5-2\sqrt{5})}}{20-8\sqrt{5}} = 1{,}72048 \cdot s^2.$$

Anmerk. Dem Ausdrucke $\frac{5s^2\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{20-8\sqrt{5}}$ kann man auch die Form geben: $\frac{5s^2}{4}\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{(5-2\sqrt{5})^2}} = \frac{5s^2}{4}\sqrt{\frac{1}{5-2\sqrt{5}}} = \frac{5s^2}{4}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$.

d) Auf ähnliche Weise wie bei a) und c) findet man:

$$J = \frac{3s^2}{2}\sqrt{3} = 2{,}59808 \cdot s^2 \text{ u. s. w.}$$

586) bis 591) Vergl. 585.

§. 39. Bestimmung der Seite aus dem Inhalt.

592) Die verlangten Ausdrücke ergeben sich leicht aus den in Aufg. 585 erhaltenen Formeln.

593) bis 598) Nach 592.

Digitized by Google

§. 40. Bestimmung des Inhaltes aus dem Halbmesser des umschriebenen Kreises.

599) a) Nach Lehrs. 2 ist $J = \frac{3s}{2} \cdot r = 3r\sqrt{(R^2 - r^2)}$,

oder nach 570 a) $J = \frac{3R}{2}\sqrt{\frac{3R^2}{4}} = \frac{3R^2}{4}\sqrt{3} = 1{,}29904\,R^2$.

Auf ähnliche Weise kann man bei der Lösung der übrigen Fälle verfahren.

600) bis 606) Nach 599.

§. 41. Bestimmung des Halbmessers des umgeschriebenen Kreises aus dem Inhalte.

607) Entwickle R aus den Formeln für Aufg. 599.

608) bis 614) Die Auflösung dieser Aufgaben ergibt sich aus 607.

§. 42. Bestimmung des Inhaltes aus dem Halbmesser des eingeschriebenen Kreises.

615) a) $J = \frac{3S \cdot r}{2} = 3r\sqrt{(R^2 - r^2)}$. Nach 577 a) ist aber:

$R = 2r$, also $J = 3r\sqrt{(4r^2 - r^2)}$ u. s. w.

c) $J = \frac{5S \cdot r}{2} = 5r\sqrt{(R^2 - r^2)}$. Substituire nun R aus 577 u. s. w.

Aehnlich ist die Lösung für die übrigen Fälle.

616) bis 622) Siehe 615.

§. 43. Bestimmung des Halbmessers des eingeschriebenen Kreises aus dem Inhalte.

623) Bestimme r aus den für Aufg. 615 erhaltenen Formeln.

624) bis 630) werden nach 623 gelöst.

§. 44. Vermischte Aufgaben über die regelmäßigen Vielecke.

631) Setze in 526 $s = 10'$, so wird $R = 8{,}09015'$; also nach 542 d) die Seite des umschriebenen Sechsecks =

$1{,}1547 \cdot 8{,}09015$ u. s. w.

Digitized by Google

632) Berechne nach 610 den R des umschriebenen Kreises und dann nach 542 c) die Seite des Achtecks.

633) Bestimme nach 623 g) den r des eingeschriebenen Kreises und dann nach 599 c) den Inhalt des Fünfecks.

634) Nach 529 wird die Seite des eingeschriebenen Zwölfecks $= 3{,}10578'$. Substituirt man nun für $R = 6'$ und für $s = 3{,}10578'$ in 532, so erhält man die Seite des eingeschriebenen 24-Ecks und nach 552 hieraus die des umgeschriebenen.

635) Der Halbmesser sei $= x$, so muß nach 599 c)

$$2{,}37764\,x^2 = 70{,}56$$ sein u. s. w.

636) Rechne nach 599 f) und 615 f) die Inhalte beider und hieraus die Differenz.

637) Vergl. 520 und 523.

638) Nach 599 a) und b) wie $\frac{3R^2}{4}\sqrt{3} : 2R^2$ oder wie $3\sqrt{3} : 8$.

639) Setze die Seite $= x$, so ist $R = x - 4$, folglich nach 520: $x = (x-4)\sqrt{3}$, also $x = 9{,}464'$ und $R = 5{,}464'$. Der Inhalt wird nach 585 a) $= 0{,}43301 \cdot 9{,}464^2$ u. s. w.

640) Die Seite sei $= x$, so ist $R = x + 2$. Setze nach 529 eine Gleichung an, und entwickle daraus x; substituire dann den gefundenen Werth in 585 f), so ergibt sich der Inhalt.

641) Rechne nach 534 die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Achtecks $\left(= \sqrt{(2 - \sqrt{2})}\right)$ und hieraus nach 552 die des umgeschriebenen Achtecks $(= 2\sqrt{2} - 1)$. Nach 532 bestimme alsdann die Seite des eingeschriebenen und nach 553 die des umgeschriebenen 16-Ecks; rechne hierauf den Halbmesser des in das eingeschriebene 16-Eck gezeichneten Kreises und dann nach Lehrs. 1 die Inhalte beider Polygone.

642) Ist jeder der beiden Umfänge $= u$, so ist der Inhalt des Quadrats $= \frac{u^2}{16}$ und der des Dreiecks (s. 230) $= \frac{u^2}{36}\sqrt{3}$; bilde hieraus das Verhältniß u. s. w.

Digitized by Google

Abschnitt X.

Aufgaben über die Berechnung des Kreises und seiner Theile.

Lehrsätze.

1) Der Umfang eines Kreises ist gleich dem Produkte aus der Verhältnißzahl (π) und dem Durchmesser, oder $U = \pi d = 2\pi r$.

2) a) Der Inhalt eines Kreises ist gleich dem Produkte aus dem Umfang und dem halben Halbmesser; oder auch b) der Inhalt eines Kreises wird gefunden, wenn man die Verhältnißzahl mit dem Quadrate des Halbmessers multiplicirt. — Also a) $J = \frac{U \cdot r}{2}$ oder b) $= \pi r^2$.

3) Ein Theil der Kreisperipherie (Kreisbogen), dessen zugehöriger Centriwinkel n Grade mißt, wird aus folgender Proportion gefunden:
Peripherie : Bogen $= 360^\circ : n^\circ$.

4) Der Inhalt eines Kreissektors ist gleich dem Produkte aus dem Bogen und dem halben Radius.

§. 45. Berechnung des Umfangs und Inhaltes aus dem Halbmesser.

643) Für d z. B. erhält man nach Lehrs. 1) $U = 3{,}1416 \cdot 54{,}75 = 172{,}0026'$ und endlich nach Lehrs. 2 a) $J = 172{,}0026 \cdot \frac{27{,}375}{2} = 2354{,}2855 \square'$, oder nach b) $J = 3{,}1416 \cdot 27{,}375^2$ u. s. w. Aehnlich werden die übrigen Aufgaben gelöst.

644) Nach Lehrs. 1 ist $U = \pi \cdot 1719$ geogr. Meilen.

645) Subtrahire den Inhalt des kreisförmigen Stückes von dem des Rechtecks.

646) Nehme den Umfang der Welle (Lehrs. 1) 20mal.

647) Dividire mit dem Umfange des Rades in die Wegstrecke.

648) Wegstrecke = 864mal Umfang des Rades.

649) bis **652)** sind, wie die vorhergeh. Aufgabe, nach Lehrsatz 1 und 2 zu lösen.

653) Rechne nach 529 den Umfang des eingeschriebenen, nach 542 g) den des umgeschriebenen Zwölfecks und nach Lehrs. 1 den Umfang des Kreises.

654) Rechne nach 550 f) den Radius des eingeschriebenen Kreises und hieraus den Umfang desselben.

Digitized by Google

655) Suche nach 599 e) den Inhalt des eingeschriebenen und nach 615 e) den des umgeschriebenen Achtecks.

656) Rechne nach 550 c) den Halbmesser und nach Lehrs. 2 den Inhalt des eingeschriebenen Kreises.

657) Nach 599 a) ist der Inh. des $\triangle = 1{,}29904 . R^2$.
Nach 599 d) ist der Inh. des 6ecks $= 2{,}59807 . R^2$.

Folglich muß $15{,}58844 = 3{,}89711 . R^2$ sein.

Bestimme hieraus R und dann nach Lehrs. 2 den Inhalt des Kreises.

658) Vergl. Andeut. 657.

659) Der Durchmesser sei $= x$, so ist der Umfang $= x + 8$ und nach Lehrs. 1: $\pi x = x + 8$ u. s. w.

660) Ist der Durchmesser $= x$, so ist der Umfang $= 104{,}04 - x$, also nach Lehrs. 1: $\pi x = 104{,}04 - x$ u. s. w.

§. 46. Berechnung des Durchmessers und Inhalts aus dem Umfange.

661) bis 666) Zur Lösung dieser Aufgaben merke man, daß nach Lehrs. 1 $U = \pi d$, also $d = \frac{U}{\pi}$ ist.

§. 47. Berechnung des Halbmessers aus dem Inhalte.

667) Nach Lehrs. 2 ist $r = \sqrt{\frac{J}{\pi}} = 3{,}3'$; also nach Lehrsatz 1 der Umfang $= 2 . 3{,}3\pi$.

668) und 669) Vergl. Andeut. 667.

670) Bezeichnet x den Halbmesser dieser zwei Kreise, so muß $2\pi x^2 = \frac{2\pi . 8^2}{3}$ sein u. s. w.

671) Rechne aus dem gegebenen Inhalte die Seite eines Quadrats und auch den Durchmesser eines eben so großen Kreises.

672) Bezeichnen R und r die beiden Radien, so erhält man:

I. $\pi R^2 + \pi r^2 = 740{,}4232$

II. $\pi R^2 - \pi r^2 = 683{,}8744$ u. s. w.

673) Bilde nach der Angabe eine Gleichung u. s. w.

Digitized by Google

674) Rechne zuerst den Radius (nach 667) und hieraus die Seite des Quadrats.

675) Bestimme den Halbmesser des Kreises und dann nach 599 d) den Inhalt des Sechsecks.

676) Berechne zuerst den Halbmesser des Kreises, dann nach 599 f) den Inhalt des eingeschriebenen und nach 615 f) den des umgeschriebenen Zehnecks.

§. 48. Berechnung der Länge eines Kreisbogens.

677) Nach Lehrs. 3 verhält sich: $2\pi \,.\, 1{,}5 : \text{Bogen} = 360 : 78$ u. s. w.

678) und 679) Vergl. 677.

680) Bestimme zuerst nach Lehrs. 2 den Radius, dann nach Lehrs. 1 den Umfang und endlich nach Lehrs. 3 den Bogen.

681) Suche die Länge des Halbmessers des Zifferblattes, dann die Länge des Zeigers und hieraus die Bogenlänge für eine Minute.

682) Der ihrer Entfernung entsprechende Centriewinkel beträgt $20^0\ 40'$.

683) Verfahre nach Lehrs. 3.

684) Der Radius sei x, so ist der Bogen $= x + 4$, folglich verhält sich nach Lehrs. 3:

$$2 \,.\, \pi \,.\, x : x + 4 = 360 : 112^0 \text{ u. s. w.}$$

685) Der Halbmesser sei $= x$, so verhält sich nach Lehrs. 3: $2\pi \,.\, x : 2\pi x - 53{,}407 = 360 : 54$ u. s. w.

§. 49. Berechnung des zu einem Bogen gehörigen Centriewinkels.

686) Nach Lehrs. 3 verhält sich $2\pi \,.\, 0{,}8 : 1{,}6 = 360 :$ Centriewinkel. Hieraus Centriewinkel $= 114^0\ 35'\ 28''$.

687) Man findet nach Lehrs. 3: Centriewinkel $= 45^0\,50'\,11''$.

688) Suche den zugehörigen Centriewinkel und daraus nach Abschnitt V. Lehrs. 1 den Peripheriewinkel.

689) Verfahre ähnlich wie bei Aufg. 686.

Digitized by Google

690) Setze den Halbmesser $= x$, so ist der Bogen auch $= x$. Bilde nun nach Lehrs. 3 eine Proportion und entwickle hieraus den Centriewinkel.

§. 50. Berechnung des Halbmessers aus dem Bogen.

691) $2\pi r : 70{,}4 = 360 : 64$; hieraus $r = 63'$.

692) bis 694) sind ähnlich wie 691 zu lösen.

§. 51. Berechnung des Kreisfektors und seiner Theile.

695) Inhalt nach Lehrs. 4 $= \frac{16{,}8 \,.\, 5{,}4}{2}$ u. s. w.

696) Bestimme zuerst nach Lehrs. 3 den Bogen und dann nach Lehrs. 4 den Inhalt.

697) Suche zuerst den Halbmesser, dann den Bogen (Lehrsatz 3) u. s. w.

698) Erste Auflösung. Berechne zuerst den Halbmesser, dann den Bogen und hieraus den Inhalt.

Zweite Auflösung. Es muß sich verhalten:
$432 :$ Sektor $= 360 : 84\frac{1}{5}$ u. s. w.

699) Setze den Radius $= x$, so ist der Bogen $= x + 12$, folglich verhält sich nach Lehrs. 3: $2\pi x : x + 12 = 360 : 72$.
Bestimme hieraus x, dann den Bogen und endlich den Inhalt.

700) Es verhält sich, wenn der Inhalt des Sektors $= x$ ist: $x + 260 : x = 360 : 100$ u. s. w.

701) Da Bogen $\times \frac{r}{2} = J$ ist, folgt $r = \frac{2J}{\text{Bogen}}$ (Lehrs. 4).

702) Es verhält sich: $\pi r^2 :$ Sektor $= 360 : 26\frac{2}{3}$; bestimme hieraus r und dann nach Lehrs. 3 den Bogen.

703) Der Halbmesser sei $= x$, so ist $x^2 = 75{,}69$ und es verhält sich: $75{,}69 : \pi x^2 =$ Centr. $\measuredangle : 360$, woraus der Centriewinkel bestimmt werden kann.

704) Der Halbmesser sei x, so ist der Bogen $= 200 - 2x$. Also verhält sich $2\pi x : 200 - 2x = 360 : 48$; hieraus $x = 70{,}478$. Folglich der Inhalt (Lehrs. 4) $= 2080{,}6515\,\square'$.

705) Nach Lehrs. 4 wird der Bogen $= \frac{2 \,.\, \text{Sektor}}{r}$ u. s. w.

Digitized by Google

706) Rechne den Bogen und hieraus den Centriewinkel.

707) Bestimme zuerst den Halbmesser nach Lehrs. 4 und dann den Centriewinkel nach Lehrs. 3.

708) Ist der Radius $= x$, so verhält sich:

$$64 : \pi x^2 = 34^2/_5 : 360 \text{ u. s. w.}$$

§. 52. Berechnung des Kreissegmentes.

709) Bestimme zuerst den Bogen, dann den Inhalt des Sektors; hierauf den Inhalt des (gleichseitigen) Dreiecks und ziehe dann den letzteren von ersterem ab.

710) Benutze 599 a).

711) Der Centerie $\measuredangle$ ist $= 90^0$.

712) Berechne zuerst R und benutze dann 599 c).

713) Wende 599 d) an.

714) Gebrauche 585 d).

715) Suche zuerst den Halbmesser und wende dann 599 f) an.

716) Berechne nach Vorhergehendem die beiden kleinen Segmente und ziehe ihre Summe von dem Inhalte des Kreises ab.

§. 53. Berechnung des concentrischen Ringes.

717) Ziehe den Inhalt des kleinen Kreises von dem des größeren ab.

718) Inhalt $= \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R + r)(R - r)$.

719) Bestimme zuerst die Radien beider Kreise und hieraus die Ringfläche.

720) Sind R und r die beiden Radien, so erhält man:

$$\text{I.} \quad 2\pi R - 2\pi r = 18{,}84 \text{ und}$$
$$\text{II.} \quad \pi R^2 - \pi r^2 = 113{,}04$$

$$\text{oder I.} \quad R - r = \frac{9{,}42}{\pi}$$
$$\text{II.} \quad \pi(R+r)(R-r) = 113{,}04.$$

Substituirt man aus I. den Werth $\pi(R - r) = 9{,}42$ in II. so erhält man:

$$\text{I.} \quad R - r = \frac{9{,}42}{\pi}$$
$$\text{II.} \quad R + r = \frac{113{,}04}{9{,}42}$$

Digitized by Google

woraus sich durch Addition und Subtraktion beider Gleichungen die Werthe für R und r ergeben.

721) R und r seien die beiden Radien, so folgt:

$$\begin{array}{rl} \text{I.} & \pi R^2 + \pi r^2 = 7{,}7 \\ \text{II.} & 2\pi R - 2\pi r = 4{,}4 \\ \hline \text{oder I.} & R^2 + r^2 = 2{,}45 \\ \text{II.} & R - r = 0{,}7. \end{array}$$

Erhebt man Gleichung II. in's Quadrat, so folgt:

$$R^2 - 2Rr + r^2 = 0{,}49, \text{ oder}$$

wenn man für $R^2 + r^2$ den Werth aus I. substituirt:

$$-2Rr = 0{,}49 - 2{,}45 = -1{,}96.$$

Zieht man dieses von I. ab, so wird

$$R^2 + 2Rr + r^2 = 4{,}41, \text{ also}$$

$$\text{III.} \quad R + r = 2{,}1.$$

Aus II. und III. lassen sich nun R und r leicht berechnen.

722) Man erhält: $R + r = 3{,}5$ und $\pi R^2 = \frac{16}{9}\pi r^2$, woraus die Radien und der Inhalt des Ringes leicht zu finden sind.

723) Der Radius des größeren Kreises sei $= R$; so ist: $\pi R^2 = 22 + \pi \cdot 3^2$ (da $r = 3'$ wird). Hieraus folgt $R = 4{,}002$ u. s. w.

724) Der kleinere Halbmesser sei $= r$, so ist der größere $= r + 4{,}1$; also: $4{,}1 \cdot \pi(4{,}1 + 2x) = 158{,}431$ u. s. w.

725) Hier ist $R = 2{,}5 \cdot r$ also $\pi(6{,}25 \cdot r^2 - r^2) = 24$ und hieraus $r = 1{,}206'$ u. s. w.

726) Da $\pi(R + r)(R - r) = 113{,}04$ und $R - r = 3$, so folgt:

$$R + r = \frac{113{,}04}{\pi \cdot 3} = 12, \text{ also}$$

$$2R = 15 \text{ u. s. w.}$$

§. 54. Berechnung des concentrischen Ringstückes.

727) Berechne zuerst die Bogen des Ringstückes nach Lehrs. 3, dann nach Lehrs. 4 die beiden Sektoren und hieraus durch Subtraktion das Ringstück.

728) Der größere Bogen wird nach Lehrs. 3 $= \frac{2\pi R \cdot \alpha}{360}$

Digitized by Google

und der kleinere $= \frac{2\pi . r . \alpha}{360}$; also der Inhalt des größeren Sektors $= \frac{\pi R^2 \alpha}{360}$ und der des kleinern $= \frac{\pi r^2 \alpha}{360}$ und hieraus der Inhalt des Ringstücks $= \frac{\pi \alpha}{360} (R+r) (R-r)$.

729) 1) Der größere Bogen wird $= 16{,}162'$, der kleinere $= 10{,}775'$; also der Inhalt des größeren Sektors $= 67{,}872 \square'$ und der des kleineren $= 30{,}156 \square'$; folglich der Inhalt des Ringstücks $= 37{,}716 \square'$.

2) Substituire in der Formel bei 728 für $R = 8{,}4$, für $r = 5{,}6$ und für $\alpha = 110^0\ 18'$ u. s. w.

730) Der kleinere Radius sei $= r$, so ist der größere $= r + 12$; ist der kleinere Bogen $= b$ und der größere $= B$, so verhält sich nach Lehrs. 3: $2\pi . r : b = 360 : 115\frac{1}{2}$, also ist $b = \frac{121}{60} r$ und $B = \frac{121}{60} (r + 12)$. Folglich ist der Inhalt des Ringstücks $= \frac{121}{120} (r + 12)^2 - \frac{121}{120} r$.

Setzt man diesen Ausdruck $= 200$, so läßt sich hieraus r berechnen u. s. w.

731) Der kleinere Bogen sei $= x$, so ist der größere $= x + 2{,}792$, der kleinere Radius $= r$ und der größere $= R$; so erhält man:

$$\text{I.} \quad (x + 2{,}792) \frac{R}{2} - \frac{x . r}{2} = 13{,}96.$$

$$\text{II.} \quad x + 2{,}792 : 2\pi R = 80 : 360$$

$$\text{III.} \quad x : 2\pi r = 80 : 360$$

oder

$$\text{I.} \quad Rx + 2{,}792R - rx = 27{,}92$$

$$\text{II.} \quad 360x - 502{,}56R = -1005{,}12$$

$$\text{III.} \quad 360x = 502{,}56r.$$

Substituirt man aus III. $x = 1{,}396r$ in II. so folgt:

$$502{,}56r - 502{,}56R = -1005{,}12$$

oder $r - R = -2$ und $r = R - 2$.

Digitized by Google

Setzt man die Werthe von x und r in I., so ergibt sich die Gleichung: $1{,}396\,R(R-2)+2{,}792\,R-(R-2)^2\,1{,}396=27{,}92$ und hieraus: $5{,}584\,R=33{,}504$, also $R=6'$. Demnach ist $r=6-2=4'$.

732) Ist der größere Bogen $=B$ und der kleinere $=b$, so ist nach Lehrs. 7: $\frac{12}{2}B-\frac{9}{2}b=16{,}485$. Nun ist aber $b=\frac{3}{4}B$ (weil $b:B=9:12$), also $6B-\frac{13{,}5}{4}B=16{,}485$ und hieraus $B=6{,}28'$.

Nach Lehrsatz 3 verhält sich nun: $6{,}28:2\pi\,.\,12=$ Centrie $\measuredangle$: 360, woraus sich der Centriewinkel berechnen läßt.

Digitized by Google

Zweite Abtheilung.

Andeutungen

zu den

Auflösungen der Berechnungsaufgaben

aus der

körperlichen Geometrie.

Digitized by Google

Digitized by Google

Abschnitt I.

Aufgaben über das Körpermaß, das Gewicht und den Kubikinhalt der Körper im Allgemeinen.

§. 1. Aufgaben über die Reduktion verschiedener Körpermaße.

1) $1^{c'} = 1000^{c''}$ u. s. w.

2) $1^{c'} = 1728^{c''}$.

3) $1^{c'} = 1000^{c''}$; $1^{c''} = 1000^{c'''}$.

4) $1^{c'} = 1728^{c''}$; $1^{c''} = 1728^{c'''}$.

5) und 6) Siehe bei den Resultaten.

7) a) $1000^{c''}$ zehnth. geben $1728^{c''}$ zwölfth.

$547^{c''}$ " " " x "

Bestimme nun hieraus die Frage u. s. w.

8) Wird wie Nr. 7 durch einfache Zweisatzrechnung gefunden.

9) Da 10 bad. Fuß 3 met. geben, so sind $1000^{c'} = 27^{c.\,met.}$ u. s. w.

10) Nach Tab. II. ist 1 preuß. $c' = 0{,}030916^{c.\,met.}$ u. s. w.

11) S. Andeut. 9.

12) und 13) Nach Tab. II.

14) Nach der Anmerk. zu Tab. II. sind 1000 Lit. $= 1^{c.\,met.}$ also $= 37{,}03704$ bad. c' u. s. w.

15) bis 20) lassen sich mit Hilfe der im Anhange zu den Aufgaben befindlichen Tabellen leicht durch einfache Zweisatzrechnung lösen.

§. 2. Aufgaben über das Gewicht und den Kubikinhalt der Körper überhaupt.

21) bis 25) sind, nachdem man sich mit dem Gebrauche der Reduktionstabellen bekannt gemacht hat, leicht mittelst einfacher Rechnungsoperationen zu lösen.

Digitized by Google

26) Da das spec. Gewicht eines Körpers angibt, wie viel mal derselbe schwerer ist als ein gleiches Volumen Wasser, so berechne man zuerst das Gewicht von $15^{c'}$ Wasser und hieraus das des 11,38 mal schwereren Bleistücks.

27) bis 32) werden nach der für Aufg. 26 gemachten Bemerkung nun leicht gelöst.

33) bis 36) Nach der Bemerkung zu Aufg. 26 folgt, daß man den Kubikinhalt eines Körpers findet, wenn man mit dem Produkte aus dem Gewichte von $1^{c'}$ Wasser und dem spec. Gewichte in das absolute Gewicht des Körpers dividirt u. s. w.

37) Der Kubikinhalt des Kupfers ist $= 2^1/_4$ Maas $= {}^1/_8{}^{c'}$, woraus das Gewicht nun leicht zu bestimmen ist.

38) bis 41) bedürfen nun keiner besondern Andeutung mehr.

42) Der Inhalt des Kupfers wird $= \frac{118,8}{54 \,.\, 8,8}$, folglich ist der des Zinnes noch $0,35 - \frac{118,8}{54 \,.\, 8,8} = 0,1^{c'}$ u. s. w.

43) Setzt man das Volumen von $A = x$, so folgt:
$$54 \,.\, 8x + ({}^3/_4 - x)\, 54 \,.\, 7,2 = 313,2 \text{ u. s. w.}$$

44) Da also das spec. Gewicht der Legirung $= 8$ ist, so folgt der Inhalt derselben $= 0,0074074^{c'}$, und sind darin x ℔ Kupfer enthalten, so muß $\frac{x}{54 \,.\, 8,8} + \frac{3,2 - x}{54 \,.\, 7,8} = 0,0074074$ sein u. s. w.

45) Setze das Volumen von $A = x$, bestimme hiernach die Gewichte beider Metalle und bilde daraus eine Gleichung.

46) Bilde aus dem Gewichte des Eisenstabes, dessen Inhalt $= x^{c'}$ sei, dem Gewichte des Holzes und dem des verdrängten Wassers die Gleichung:
$$54 \,.\, 7,78x + 12 = \left(x + \frac{12}{0,64 \,.\, 54}\right) 54 \text{ u. s. w.}$$

47) A wiege x ℔, so wiegt B $(P - x)$ ℔; drücke nun A, B und die ganze Masse dem Inhalte nach aus und bilde eine Gleichung u. s. w.

48) Setze das Volumen des Kupfers $= x$, so ist das des Zinns $= 2 - x$; drücke beides dem Gewichte nach aus und bilde dann eine Gleichung.

Digitized by Google

49) Bezeichne das spec. Gewicht der Legirung durch x und setze dann das Gewicht derselben gleich der Summe der Gewichte von A und B u. s. w.

50) Bestimme zuerst das spec. Gewicht der Legirung $= 36 : 2{,}5 = 14{,}4$, setze dann das Gewicht des einen Metalls $= x$, bilde daraus eine Gleichung u. s. w. Aus dem gefundenen Gewichte läßt sich dann leicht das Volumen eines jeden Metalls finden.

Abschnitt II.

Aufgaben über die Berechnung der eckigen Körper.

---

§. 3. Aufgaben über die Berechnung des Prisma.

Lehrsätze.

1) Die Oberfläche eines jeden senkrechten Prisma ist gleich dem doppelten Inhalte der Basis, mehr dem Produkte des Umfanges derselben und der Höhe des Prisma.
2) Die Oberflächen ähnlicher Prismen verhalten sich wie die Quadrate zweier homologen Kanten.
3) Der Kubikinhalt eines jeden Prisma ist gleich dem Produkte aus dem Inhalte der Grundfläche und der Höhe des Prisma.
   Zusatz. Der Kubikinhalt eines rechteckigen Parallelepipeds ist gleich dem Produkte dreier an einer Ecke zusammentreffender Kanten.
4) Die Inhalte ähnlichrr Prismen verhalten sich wie die dritten Potenzen zweier homologen Kanten.

a) Ueber die Oberfläche.

51) Verfahre nach Lehrs. 1.

52) Vergl. obigen Lehrs. 1 und Theil. I. Aufg. 230.

53) Nach Lehrs. 1.

54) Das regelmäßige Sechseck besteht aus 6 gleichseitigen Dreiecken, deren Seiten $2^1/_4'$ lang sind u. s. w. nach Lehrs. 1 (vergl. Theil I. Aufg. 230).

55) Berechne die Grundfläche entweder unmittelbar, wie in Aufg. 246 des I. Theils, oder nach der Formel in Aufg. 247 daselbst und dann nach Lehrs. 1 die Oberfläche.

Digitized by Google

56) Suche aus dem Inhalte des Mantels den Inhalt einer Seitenfläche, so läßt sich daraus die Seite und aus dieser der Inhalt der Basis bestimmen.

57) Suche den Inhalt der Grundfläche (s. Theil I. 230) und dann nach Lehrs. 1 die Höhe.

58) Ist die Seite der Grundfläche = x, so ist die Höhe = 5x, also nach Lehrs. 1: $2x^2 + 4x \cdot 5x = 198$ u. s. w.

59) Die Basisseiten seien 2x und 3x, die Höhe = 5x. Bildet man nun nach Lehrs. 1 eine Gleichung, so findet man daraus x = 1,5′; folglich ist die Höhe = 5 + 1,5 u. s. w.

60) Setze die Seite der Basis = x und bilde nach Lehrs. 1 eine Gleichung (vergl. Nr. 58).

61) Ist die Basisseite = x, also die Höhe = a + x, so folgt: $2x^2 + 4x(a + x) = 0$ u. s. w.

62) Bezeichnet man die Diagonale der Basis mit x, so ist deren Seite = $\sqrt{\frac{x^2}{2}}$ und die Höhe = 20 + x. Setzt man nun nach Lehrs. 1 eine Gleichung an, so erhält man nach hinlänglicher Reduktion: $x^2 + 14{,}7758x = 72{,}748$ u. s. w.

63) Die eine Seite der Grundfläche sei = x, so ist die andere = x + 2 und die Höhe = 4x + 14. Entwickle nun x aus der nach Lehrs. 1 zu bildenden Gleichung u. s. w.

64) Ist die Höhe des kleinern Prisma = x, so verhält sich nach Lehrs. 2: $1 : 4 = x^2 : (x+5)^2$ oder $1 : 2 = x : x + 5$ u. s. w.

b) Ueber den Kubikinhalt.

65) und 66) sind nach Lehrs. 3 leicht zu lösen.

67) bis 83) Siehe Zusatz zu Lehrs. 3.

84) Nach Lehrs. 3 (vergl. Theil I. Aufg. 230).

85) Vergl. die Bemerkung zu Aufg. 54.

86) Der Inhalt eines Quadrats ist gleich der Hälfte des Quadrats der Diagonale u. s. w.

87) Vergl. Theil I. Aufg. 247 und verfahre dann nach Lehrs. 3.

88) bis 91) werden wie die vorhergeh. Aufgaben gelöst und die Bestimmung des Inhalts der betreffenden Grundfläche hat keine Schwierigkeit.

Digitized by Google

92) Nach Lehrs. 3 ist die Höhe leicht zu bestimmen.

93) und 94) Bestimme nach Lehrs. 3 den Inhalt der Grundfläche und dann die Seite derselben.

95) und 96) Vergl. Zusatz zu Lehrs. 3.

97) 4 Maas geben $\frac{2}{9}$ c′ u. s. w.

98) $4^1/_2$ Ohm = 450 Maas = 25 c′ u. s. w.

99) $11^1/_2$ Ohm = 62,5 c′, also wenn man die Länge = der Breite = x setzt, so folgt nach Zusatz zu Lehrs. 3:

$$\frac{x^3}{2} = 62{,}5 \text{ u. s. w.}$$

100) Setze die Länge = x, so ist nach Lehrs. 1:

$$2x(x+2) + (4x+4)(x+6) = 664.$$

Bestimme nun daraus x, dann die andern Dimensionen und endlich den Kubikinhalt.

101) Bezeichnet man die Seite der Basis mit x, so muß nach Lehrs. 1 $2x^2 + 4x(x+8) = 224$ sein u. s. w. wie in 100.

102) Setze diese Kanten = 2x, 3x und 7x, bilde nach Lehrs. 1 eine Gleichung, so erhält man daraus $x = 1{,}5$; also sind die Kanten = 2 . 1,5, 3 . 1,5 u. s. w.

103) Sind die Kanten = 2x, 3x und 18x, so ist nach Zusatz zu Lehrs. 3: $108x^3 = 364{,}5$, oder $x = 1{,}5$. Bestimme nun hiernach die Kanten und dann die Oberfläche nach Lehrs. 1.

104) Setze die Diagonale = x, so ist die Höhe = 2x, also nach Lehrs. 3: $\frac{x^2}{2} \cdot 2x = 91{,}125$ u. s. w.

105) Der Kubikinhalt ist also = 126 c′; bilde nun wie bisher eine Gleichung u. s. w.

106) $2369^1/_4$ Meßlein sind 131,625 c′. Bezeichnet man nun die eine Seite der Grundfläche durch x, so muß: $4{,}5x(x+2) = 131{,}625$ sein.

107) Nach Zusatz zu Lehrs. 3.

108) Verfahre wie in Aufg. 103.

109) Das eine fasse x Maas, so verhält sich nach Lehrs. 4: $x : 9 - x = 0{,}6^3 : 0{,}8^3$ u. s. w.

110) Verfahre nach Lehrs. 4.

Digitized by Google

111) Vergl. Nr. 109.

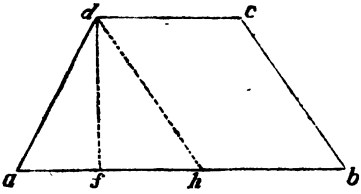
112) Nach Lehrs. 4 verhält sich: $64 : 27 = x^3 : (x - 2)^3$. Ziehe nun gliedweise die Kubikwurzel aus u. s. w.

c) Ueber das Gewicht.

113) Bestimme zuerst den Kubikinhalt und dann das Gewicht. Vergl. Nr. 26.

114) bis 124) sind in derselben Weise wie 113 zu lösen. Um in 122 den Inhalt des Querschnitts abcd (Fig. 42) zu finden,

Fig. 42.



ziehe man dh ∥ cb und die Höhe df, so ist $af = \frac{ah}{2}$ und df, sowie der Inhalt lassen sich nun leicht berechnen.

Zur Berechnung der Grundfläche des Prisma in:

123) vergl. Theil I. 247 und zur Lösung von

124) vergl. Theil I. Aufg. 585 e).

125) Rechne zuerst den Kubikinhalt des Kupfers (vergl. Nr. 33), dann den Inhalt der Basis wie in Nr. 93 und hieraus die Seite derselben.

126) Befolge den in 125 vorgeschriebenen Gang; vergl. ferner Theil I. Aufg. 230.

127) Man findet den Kubikinhalt $= 0{,}375\,c'$. Bezeichnet man nun die Seite des Basis mit x, so ist die Höhe $= 24x$; also nach Lehrs. 3: $x^2 \cdot 24x = 0{,}375$ u. s. w.

128) Sind die Seiten $= x$ und $x - 0{,}04$, so folgt:

$$54x\,(x - 0{,}04)\,7{,}78 = 1{,}5 \text{ u. s. w.}$$

129) Setze die Seite der Basis $= x$, drücke das Gewicht des Prisma aus, und bilde dann eine Gleichung.

130) und 131) Bezeichne die Tiefe des Einsinkens durch x und setze dann das Gewicht des Parallelepipeds = dem Gewichte des verdrängten Wassers u. s. w.

132) Berechne das Gewicht der einzelnen Wände und setze die Summe = dem Gewichte des bis zur Tiefe $= x$ verdrängten Wassers.

Digitized by Google

133) Die Gewichte verhalten sich wie die Inhalte; verfahre daher nach Lehrs. 4 und es folgt: $x : 39{,}366 - x = 4{,}5^3 : 2{,}25^3$ ꝛc.

134) Es verhält sich: $192 : 375 = (x - 0{,}3)^3 : x^3$. Ziehe nun gliedweise die Kubikwurzel aus u. s. w.

135) Setze das Gewicht des einen Körpers $= x$, drücke beide Prismen dem Inhalte nach aus und verfahre dann nach Lehrs. 4.

136) Ist der Kubikinhalt des Holzes $= x$, so muß, da man das Gewicht des Stahls $= 1296$ ℔ findet,

$$1296 + 54 \,.\, 0{,}5x = (3 + x)\, 54$$ sein.

Bestimme hieraus x und dann die verlangten Dimensionen nach Lehrs. 4.

§. 4. Aufgaben über die Berechnung des Würfels.

Lehrsätze.

1) Die Oberfläche eines Würfels ist gleich dem sechsfachen Quadrate einer Kante.
2) Der Kubikinhalt eines Würfels ist gleich der dritten Potenz der Kante.
3) Die Inhalte zweier Würfel verhalten sich wie die dritten Potenzen zweier Kanten.

a) Ueber Oberfläche und Kubikinhalt.

137) bis **141)** sind nach Lehrs. 1 und 2 leicht zu lösen.

142) Der Würfel hat 12 Kanten.

143) Die Seite des andern ist also 7′ u. s. w.

144) und **145)** Rechne eine Seite des Quadrats und verfahre dann nach Lehrs. 2.

146) Ist die Kante $= x$, so ist: $x^2 = \frac{2{,}4^2}{2}$ u. s. w.

147) und **148)** Die Seite x des Würfels findet man leicht aus dem rechtwinkligen Dreieck, welches diese, die Diagonale des Würfels und die Diagonale einer Seitenfläche ($= x\sqrt{2}$) mit einander bilden u. s. w.

149) bis **153)** Bestimme den Inhalt einer Seitenfläche und dann die Seite des Würfels u. s. w.

154) Dividire den Inhalt des kleineren Würfels in den des größern.

Digitized by Google

156) Ist die Kante des kleinern Würfels = x, so folgt: $6x^2 + 6(2{,}5x)^2 = 174$ u. s. w.

157) Sind die Kanten x und y, so ist:

I. $x + y = S$ II. $x - y = d$ u. s. w.

158) Ist die ursprüngliche Seite = x, so folgt:

$$6(x + 1{,}5)^2 - 6x^2 = 58{,}5 \text{ u. s. w.}$$

159) Die eine Kante sei = x, so ist die andere $= 4{,}5 - x$; also: $6x^2 + 6(4{,}5 - x)^2 = 61{,}5$. Man findet hieraus die Kanten = 2′ und $2\frac{1}{2}$′ u. s. w.

160) Die beiden Kanten seien x und k — x. Verfahre nun wie in 159.

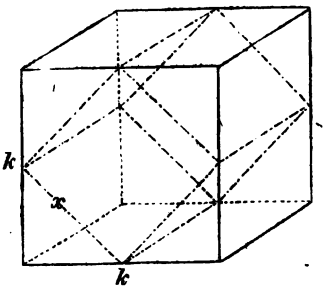
161) Ist die Kante = x, so muß $x^2 + 2x^2 = (x + 2)^2$ sein u. s. w.

162) Setze die Kante = x, dann ist: $3x^2 = (x + d)^2$ u. s. w.

163) Ist die Kante = x, so ist: $3x^2 = (S - x)^2$ u. s. w.

164) Es ist (Fig. 43) $x^2 = \frac{k^2}{2}$, also verhält sich nach Lehrs. 3:

Fig. 43.



$$\text{umgeschr. : eingeschr.} = k^3 : \left(\sqrt{\frac{k^2}{2}}\right)^3$$

$$\text{“ : “} = k^2 : \frac{k^3}{4}\sqrt{2}$$

$$\text{“ : “} = 4 : \sqrt{2}.$$

165) Nach Lehrs. 2 findet man die Kante, wenn man aus dem gegebenen Kubikinhalte die Kubikwurzel auszieht; also ist z. B. für a die Kante $= \sqrt[3]{3\frac{3}{8}} = \sqrt[3]{3{,}375}$ u. s. w.

Digitized by Google

166) Vergl. Nr. 165.

167) 100 Maas geben $5^5/_9$ c′ u. s. w.

168) Addire die Inhalte der 3 Würfel und verfahre dann nach 165.

169) Rechne den Inhalt des Würfels von 6′ Seite, nehme diesen doppelt und suche dazu nach Andeut. 165 die Kante.

170) 4 Maas $= \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$ c′ (18 Maas $= 1$ c′) u. s. w.

171) Bestimme zuerst die Seite (vergl. Andeut. 165) und dann die Oberfläche.

172) und 173) Suche zuerst die Seite des Würfels u. s. w.

174) Ist die Seite des kleinsten Würfels $= x$, so erhält man die Gleichung:

$x^3 + (x + 0{,}5)^3 + (x + 1)^3 + (x + 1{,}5)^3 = 12{,}5$ und hieraus:

$x^3 + 2{,}25x^2 + 2{,}625x - 2 = 0.$

Setzt man nun $x = y - \frac{2{,}25}{3} = y - 0{,}75$, so folgt:

$$y^3 + 0{,}9375y - 3{,}125 = 0.$$

Wird diese Gleichung nach der carbanischen Formel gelöst, so erhält man: $y = 1{,}25$, folglich ist $x = 1{,}25 - 0{,}75 = 0{,}5$′ u. s. w.

175) Die Seite sei $= x$ gewesen, so muß:

$x^3 - (x - {}^1/_2)^3 = 21^1/_8$ sein u. s. w.

176) Ist die Kante des einen Würfels $= x$, so ist die des andern $= 10 - x$; folglich: $x^3 + (10 - x)^3 = 280$ u. s. w.

b) Ueber das Gewicht.

177) bis 179) Bestimme zuerst den Inhalt und dann das Gewicht (vergl. 26).

180) 1000 ℔ Eisen haben einen Inhalt von $\frac{1000}{54 \,.\, 7{,}2}$ c′ (vergl. 33), woraus nun leicht die Seite zu bestimmen ist (vergl. 165).

181) Man findet das Gewicht des Gefäßes $= 10{,}9026$ ℔, das des Wassers $= 75{,}141$ ℔ u. s. w.

182) und 318) Vergl. 180.

184) Das spec. Gewicht ist nach 26) $= \frac{1786{,}4}{1{,}64^3 \,.\, 54}$ u. s. w.

Digitized by Google

185) Vergl. 180 u. s. w.

186) Addire die Gewichte beider Würfel und verfahre dann wie bei 180.

187) Bestimme nach 33 den Inhalt aller Würfel, daraus den eines jeden und endlich die Seite.

188) Die Seite ist = der Kubikwurzel aus der Summe der Inhalte beider Metalle (vergl. 33).

189) Drückt man den Kubikinhalt der 6 Seitenwände in der Dicke x aus und bildet dann aus dem gegebenen Gewichte eine Gleichung, so erhält man nach gehöriger Reduktion:

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 0{,}0297 = 0.$$

Setzt man $x = y + 1$, so folgt: $y^3 = -0{,}9703$, also $y = -0{,}99$. Demnach ist die Dicke $x = 1 - 0{,}99 = 0{,}01'$ oder $1'''$.

190) Setzt man die Tiefe des Einsinkens = x, so muß

$$2{,}5^3 \,.\, 0{,}7 \,.\, 54 = 2{,}5^2 \,.\, x \,.\, 54$$

sein u. s. w.

191) Man findet den Inhalt des Kupfers = $0{,}133208^{c'}$; bestimme daraus dessen Gewicht und verfahre dann wie in 190.

192) Das Gewicht des Wassers, welches von dem bis zum obersten Rande eingetauchten Kasten verdrängt wird, ist $= 2{,}6^2 \,.\, 2{,}55 \,.\, 54$ ℔; subtrahire davon das Gewicht des Kastens $= 1{,}613 \,.\, 0{,}5 \,.\, 54$ ℔ und dividire den Rest durch das Gewicht eines Würfels $= 0{,}25^3 \,.\, 54 \,.\, 7{,}2$ ℔.

193) Bezeichnet man das Gewicht des kleinsten Würfels durch x, so ist das des mittleren $= x + 340{,}2$ und das des größten $= x + 3061{,}8$. Bilde nun hieraus die angedeutete Proportion u. s. w.

194) Ist die Seite des eines Würfels = x, so ist die des andern $= 3{,}25 - x$; folglich:

$$x^3 + (3{,}25 - x)^3 = \frac{3395{,}925}{54 \,.\, 7{,}2}$$ (vergl. 33) u. s. w.

195) Ist die Kante = x, so muß

$$(x + 0{,}5)^3 - x^3 = \frac{3294}{8 \,.\, 54}$$ oder

$$x^2 + 0{,}5x = 5$$ sein u. s. w.

Digitized by Google

§. 5. Aufgaben über die Berechnung der Pyramide.

Lehrsätze.

1) Die Oberfläche einer regelmäßigen Pyramide ist gleich dem Inhalte der Grundfläche mehr dem Umfange derselben multiplicirt mit der halben Höhe eines Seitendreiecks.
2) Die Oberflächen zweier ähnlichen Pyramiden verhalten sich wie die Quadrate zweier homologen Kanten.
3) Der Kubikinhalt einer jeden Pyramide ist gleich dem dritten Theile des Produkts aus Grundfläche und Höhe.
4) Theilt man eine Pyramide durch eine zur Basis parallele Ebene, so ist das an der Spitze liegende Stück (Ergänzungs-Pyramide) der ganzen Pyramide ähnlich.
5) Die Grundflächen ähnlicher Pyramiden verhalten sich wie die Quadrate der zugehörigen Höhen.
6) Aehnliche Pyramiden verhalten sich dem Inhalte nach wie die dritten Potenzen gleichliegender Kanten (oder der Höhen).
7) Die Oberfläche einer abgekürzten regelmäßigen Pyramide ist gleich der Summe der beiden Grundflächen mehr dem Produkte aus der Summe der Umfänge derselben und der halben Höhe einer Seitenfläche.

A. Berechnung der vollständigen Pyramide.

a) Ueber die Oberfläche.

196) Verfahre nach Lehrs. 1.

197) Nach Lehrs. 1, und in Betreff der Grundfläche vergl. Theil I. 230.

198) Hier ist also nur der Mantel zu berechnen.

199) Zur Bestimmung der Grundfläche vergl. 146.

200) Vergl. Theil I. 230.

201) Bestimme zuerst die Höhe eines Seitendreiecks und verfahre dann nach Lehrs. 1 (vergl. Theil I. 209).

202) Die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Dreiecks ist $= r\sqrt{3}$ (vergl. Theil I. 520); bestimme hiernach die Höhe eines Seitendreiecks u. s. w.

203) Der Inhalt der Grundfläche ist $= \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$, die Höhe eines Seitendreiecks $= \sqrt{\left(b^2 - \frac{a^2}{4}\right)}$ u. s. w.

Digitized by Google

204) Die Höhe der Pyramide, die halbe Seite der Basis und die Höhe eines Seitendreiecks bilden mit einander ein rechtwinkliges Dreieck, woraus die letztere bestimmt werden kann ꝛc.

205) Der Halbmesser des in der Basis beschriebenen Kreises, der nach Theil I. 550 d) $=2{,}598'$ wird, bildet mit der Höhe der Pyramide und mit der Höhe eines Seitendreiecks ein rechtwinkliges Dreieck, woraus sich letztere bestimmen läßt u. s. w.

206) Verfahre nach 204. Die Höhe eines Seitendreiecks wird $= \sqrt{\left(h^2 - \frac{a^2}{4}\right)}$ u. s. w.

207) Die Differenz zwischen der Oberfläche und der Grundfläche gibt den Mantel, woraus leicht die Höhe eines Seitendreiecks und dann die Höhe der Pyramide bestimmt werden können (vergl. 204).

208) Bezeichnet man die Seite der Basis durch x, so ist die Höhe eines Seitendreiecks $= \sqrt{\left(1{,}5^2 + \frac{x^2}{4}\right)}$, folglich nach Lehrs. 1: $x^2 + 2x\sqrt{\left(2{,}25 + \frac{x^2}{4}\right)} = 36$ u. s. w.

209) Bezeichnet x die Seite der Basis, so ist die Höhe eines Seitendreiecks $= \sqrt{\left(64 - \frac{x^2}{4}\right)}$, also nach Lehrs. 1:

$$\frac{x^2}{4}\sqrt{3} + \frac{3x}{2}\sqrt{\left(64 - \frac{x^2}{4}\right)} = 50 \text{ oder:}$$

$$0{,}749989x^4 - 187{,}3x^2 = -2500.$$

Setze $x^2 = y$, so entsteht eine quadratische Gleichung u. s. w.

210) Ist die Seite der Basis $= x$, so erhält man:

$$x^2 + 2x\sqrt{\left(h^2 + \frac{x^2}{4}\right)} = 0 \text{ u. s. w.}$$

211) Ist die Höhe der Pyramide $= x$, so ist die Höhe eines Seitendreiecks $= \sqrt{\left(x^2 + \frac{s^2}{4}\right)}$ folglich nach Lehrs. 1:

$$s^2 + 2s\sqrt{\left(x^2 + \frac{s^2}{4}\right)} = 0 \text{ u. s. w.}$$

212) Ist jede der Kanten $= x$, so muß $x^2 + x^2\sqrt{3} = 0$ sein u. s. w. (vergl. Theil I. 230).

213) Verfahre wie in 212.

Digitized by Google

214) Ist die Basisseite = x, so ist die Höhe eines Seitendreiecks $= \sqrt{\left(4x^2 + \frac{x^2}{4}\right)} = 2{,}06155x$. Bilde nun wieder wie in den vorhergeh. Aufgaben eine Gleichung u. s. w.

215) Bezeichnet man die Seite der Basis durch x, so ist:

$$\frac{x^2}{4}\sqrt{3} + \frac{3x}{2}(x + 10) = 343{,}3 \text{ oder:}$$

$$x^2 + \frac{15}{1{,}933}x = \frac{343{,}3}{1{,}933} \text{ u. s. w.}$$

216) Die Basisseite sei = 6x, so ist die Seitenkante = 5x und die Höhe eines Seitendreiecks $= \sqrt{(5x)^2 - (3x)^2} = 4x$; also: $(6x)^2 + 4 \cdot 6x \cdot \frac{4x}{2} = 336$. Man findet hieraus x = 2, folglich ist die Seite der Basis = 2 . 6 und die Seitenkante = 2 . 5.

217) Setze die Basisseite = 4x und die Seitenkante = 11x, so ist die Höhe eines Seitendreiecks = $x\sqrt{117}$ u. s. w.

218) Nach Lehrs. 2 verhält sich: $4{,}75^2 : 1{,}25^2 = 162 : x$ ꝛc.

219) Es verhält sich: $O : O' = k^2 : x^2$ u. s. w.

220) Nach Lehrs. 2 folgt: $4{,}5^2 : 1{,}5^2 = x : x - 135$ ꝛc.

221) $x^2 : (x-2)^2 = 144 : 121$ oder

$x : x - 2 = 12 : 11$ u. s. w.

b) Ueber den Kubikinhalt.

222) bis 226) Nach Lehrs. 3.

227) Bestimme mittelst des pythag. Lehrsatzes zuerst die Höhe der Pyramide und verfahre dann nach Lehrs. 3.

228) Die Höhe der Pyramide ist $= \sqrt{(8^2 - 2{,}4^2)}$ ꝛc.

229) Bestimme zuerst den Halbmesser des umschriebenen Kreises (nach Abtheil. I. 520) $= \frac{a}{\sqrt{3}}$, dann die Höhe der Pyramide $= \sqrt{\left(b^2 - \frac{a^2}{3}\right)}$ u. s. w.

230) Verfahre wie in vorhergeh. Aufgabe.

231) Rechne die Seite der Basis und dann aus dem in 204 angeführten Dreieck die Höhe der Pyramide u. s. w.

Digitized by Google

232) Berechne den Halbmesser des um die Grundfläche beschriebenen Kreises (vergl. 229) und aus dem rechtwinkligen Dreieck, welches dieser, die Seitenkante und die Höhe der Pyramide bilden, die letztere u. s. w.

233) Der Halbmesser des um die Basis beschriebenen Kreises ist = der Seite derselben, also ist die Höhe der Pyramide = $\sqrt{(b^2 - a^2)}$. Der Inhalt der Basis = $\frac{3a^2}{2}\sqrt{3}$ u. s. w. nach Lehrs. 3.

234) Der Inhalt der Grundfläche wird = 3,84 □′ (vergl. Theil I. 230) u. s. w.

235) Der Mantel hat noch 50 □′, also eine Seitenfläche noch 12,5 □′. Bestimme nun hieraus die Höhe der letztern (= 10′) und dann die Höhe der Pyramide (= 9,921′) u. s. w.

236) Wird die Basisseite = x gesetzt, so ist (vergl. 204) die Höhe eines Seitendreiecks = $\sqrt{\left(14^2 - \frac{x^2}{4}\right)}$, und man erhält die Gleichung (nach Lehrs. 1):

$$x^2 + 2x\sqrt{\left(196 + \frac{x^2}{4}\right)} = 1176.$$

Bestimme hieraus x (= 21′), dann den Inhalt der Basis u. s. w.

237) Ist die Basisseite = x, so ist die Höhe eines Seitendreiecks = $\sqrt{\left(64 - \frac{x^2}{4}\right)}$, also nach Lehrs. 1:

$$\frac{x^2}{4}\sqrt{3} + \frac{3x}{2}\sqrt{\left(64 - \frac{x^2}{4}\right)} = 25 \text{ oder:}$$

$$x^4 - \frac{662{,}6}{3}x^2 = -\frac{2500}{3}.$$

Setzt man hierin $x^2 = y$, so erhält man eine quadratische Gleichung, aus der sich für y die Werthe 217,026 und 3,84 ergeben. Demnach ist x entweder = 14,73′ oder 1,928′.

Nach Abtheil. I. 520 ist ferner der Radius r des um die Basis beschriebenen Kreises = $\frac{x}{\sqrt{3}}$, also entweder = 8,504′ oder = 1,11313′. Da endlich die Höhe der Pyramide = $\sqrt{(8^2 - r^2)}$

Digitized by Google

ist, so ersieht man durch Substitution der beiden Werthe von r, daß nur der letztere 1,11313, also für x nur 1,928′ gültig sein kann. Bestimme nun daraus den Inhalt der Grundfläche = $\frac{x^2}{4}\sqrt{3}$ u. s. w.

238) Bezeichnet man die Höhe eines Seitendreiecks mit x, so ist nach Lehrs. 1: $a^2 + 2ax = O$, woraus folgt: $x = \frac{O - a^2}{2a}$. Nun ist aber die Höhe der Pyramide (vergl. 204) = $\sqrt{\left(x^2 - \frac{a^2}{4}\right)}$ oder $= \frac{1}{2a}\sqrt{O(O - 2a^2)}$ u. s. w. nach Lehrs. 3.

239) Nach Lehrs. 3 ist die Höhe = dem dreifachen Inhalte dividirt durch die Grundfläche.

240) und 241) Bestimme zuerst nach Lehrs. 3 den Inhalt der Basis = dem dreifachen Kubikinhalte dividirt durch die Höhe, und dann die Seite.

242) Die Basis wird wie in 240 und 241 gefunden, und die Seite ist dann leicht zu bestimmen.

243) Ist die Seite der Basis = x, so ist die Seitenkante = 3x und die halbe Diagonale der Basis = $\sqrt{\frac{x^2}{2}}$, also die Höhe der Pyramide = $\sqrt{(3x)^2 - \frac{x^2}{2}} = 2{,}9154x$ und nach Lehrs. 3: $\frac{x^2 \cdot 2{,}9154x}{3} = 7{,}775$ u. s. w.

244) Ist die Seite der Basis = x, also jede Seitenkante = 2x, so wird die Höhe der Pyramide = $x\sqrt{3} = 1{,}732x$. Bilde nun nach Lehrs. 3 eine Gleichung u. s. w.

245) Ist jede Kante = x, so ist die halbe Diagonale der Basis = $\sqrt{\frac{x^2}{2}}$, also die Höhe der Pyramide = $\sqrt{\left(x^2 - \frac{x^2}{2}\right)}$ = $\sqrt{\frac{x^2}{2}}$; folglich nach Lehrs. 3: $\frac{x^2}{3}\sqrt{\frac{x^2}{2}} = 1{,}885$ u. s. w.

246) Setze die Seite der Basis = x, so ist die Höhe = 4x u. s. w.

Digitized by Google

247) Die Seite der Grundfläche sei $= x$, so ist die Höhe $= x + 15$, also $\frac{x^2(x+15)}{3} = 66{,}429$ (nach Lehrs. 3), oder

$$x^3 + 15x^2 = 199{,}287 \text{ u. s. w.}$$

Anmerk. Substituirt man $x = y - 5$, so erhält man die Gleichung: $y^3 - 75y + 50{,}712 = 0$, und wenn man zu deren Lösung die cardanische Formel anwendet, so gelangt man auf imaginäre Ausdrücke. Man hat daher entweder diese zuerst zu beseitigen und findet dann $y = 8{,}3$, oder die Lösung der obigen Gleichung nach irgend einer andern der in der Analysis vorgetragenen Methoden vorzunehmen.

248) Ist die Seite der Basis $= x$, so ist die Seitenkante $= 4x$ und die Höhe der Pyramide $= x\sqrt{15{,}5}$ u. s. w. nach Lehrs. 3.

249) Erste Auflösung. Da die kleinere Pyramide die Hälfte der ganzen sein soll, so verhält sich nach Lehrs. 5 und 6 $2 : 1 = h^3 : x^3$ und hieraus folgt $x = \sqrt[3]{\frac{h^3}{2}}$ u. s. w.

Zweite Auflösung. Die Entfernung dieser Ebene von der Spitze sei $= x$. Bezeichnet man die Basis mit G und die Schnittfläche mit g, so soll also $\frac{G \cdot h}{6} = \frac{g \cdot x}{3}$ oder $Gh = 2gx$ sein. Nun verhält sich aber nach Lehrs. 5: $G : g = h^2 : x^2$, also ist $g = \frac{Gx^2}{h^2}$, oder auch: $Gh^3 = 2Gx^3$, oder $x = \sqrt[3]{\frac{h^3}{2}}$ u. s. w.

250) Bestimme zuerst die Höhe der Pyramide ($= 5{,}8309'$) und verfahre dann wie in 249.

251) Nach Lehrs. 6 verhält sich: $592{,}704 : x = 4{,}2^3 : 2{,}7^3$ u. s. w.

252) Es verhält sich: $54{,}872 : 5{,}832 = 3{,}8^3 : x^3$ u. s. w. (Lehrs. 6).

253) Die halbe Diagonale der Basis des Modells wird $= \sqrt{\frac{a^2}{2}}$, also die Höhe der Pyramide $= \sqrt{\left(b^2 - \frac{a^2}{2}\right)}$ und der Kubikinhalt $= \frac{a^2}{3}\sqrt{\left(b^2 - \frac{a^2}{2}\right)}$. Nun verhält sich nach Lehrs. 6:

Digitized by Google

$\frac{a^2}{3}\sqrt{\left(b^2-\frac{a^2}{2}\right)} : x = \left[\sqrt{\left(b^2-\frac{a^2}{2}\right)}\right]^3 : h^3$, woraus der Inhalt x bestimmt werden kann.

254) Verfahre wie in 253 angedeutet ist.

255) Nach Lehrs. 6 verhält sich:

$$19{,}683 : 4{,}096 = (x+1{,}1)^3 : x^3;$$

ziehe gliedweise die Kubikwurzel aus u. s. w.

c) Ueber das Gewicht.

256) bis 258) Rechne zuerst den Kubikinhalt und dann nach 26 das Gewicht.

259) Bestimme nach der Bemerkung bei 33 den Kubikinhalt der Pyramide und dann nach 239 die Höhe derselben.

260) Siehe die Anmerkung in §. 2 der stereometr. Aufgaben.

261) Bestimme nach 240 den Inhalt der Basis und daraus die Seite.

262) Vergl. 259.

263) Ist die Diagonale der Grundfläche $= x$, so muß:

$$\frac{x^2}{2}\left(\frac{x+4}{3}\right)54 \,.\, 3 = 405, \text{ oder:}$$

$$x^3 + 4x^2 - 15 = 0 \text{ sein.}$$

Setzt man $x = y - \frac{4}{3}$, so erhält man:

$$y^3 - \frac{16}{3}y - \frac{277}{27} = 0;$$ und hieraus durch Anwendung der cardanischen Formel: $y = 2{,}96$. Also ist $x = 2{,}96 - 1{,}33 = 1{,}63'$, folglich die Höhe $= 5{,}63'$.

264) Ist jede Kante $= x$, so ist die Höhe $= \sqrt{\frac{x^2}{2}}$ (vergl. 245), also $x^3\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{3951}{18\,.\,8{,}78} = 25$ u. s. w.

265) Es verhält sich: $125 : 3375 = x^3 : (x+5)^3$; ziehe nun die Kubikwurzel aus jedem Gliede u. s. w.

Digitized by Google

B. Berechnung der abgekürzten Pyramide.

a) Ueber einige allgemeine Bestimmungen.

266) Die beiden Grundflächen sind ähnlich, also verhält sich nach Lehrs. 5: $G : x = S^2 : s^2$ u. s. w.

267) Nach Lehrs. 5 verhält sich: $G : x = H^2 : h'^2$ u. s. w.

268) und 269) Vergl. 266.

270) Bezeichnet x die Entfernung von der Spitze, so verhält sich $2{,}56 : 12{,}4 = 0{,}6 : x$ u. s. w.

271) Verfahre wie in 270.

272) Bezeichne die Höhe der vollständigen Pyramide mit x und bilde nach 270 eine Proportion.

273) Erste Auflösung. Ist die Seite der Schnittfläche $= x$, so verhält sich: $5{,}8 : x = 15{,}6 : 7{,}4$. Bestimme x und dann den Inhalt des Schnitts.

Zweite Auflösung. Bestimme den Inhalt der Basis und bilde dann nach Lehrs. 5 eine Proportion.

274) Ist diese Höhe $= x$, so verhält sich nach Lehrs. 5: $G : g = x^2 : (x - h)^2$ oder: $\sqrt{G} : \sqrt{g} = x : x - h$ u. s. w.

275) Bezeichnet x die Höhe der Ergänzungspyramide und y den Inhalt der Schnittfläche, so verhält sich nach Lehrs. 5:

$$\sqrt{G} : \sqrt{g} = x + h : x \text{ und}$$

$$\sqrt{y} : \sqrt{g} = x + \frac{h}{2} : x \text{ oder:}$$

$$2\sqrt{y} - \sqrt{g} : \sqrt{g} = x + h : x, \text{ also ist auch:}$$

$$2\sqrt{y} = \sqrt{G} + \sqrt{g} \text{ oder } y = {}^1/_4 (G + g + 2\sqrt{G \cdot g}).$$

276) Vergl. 275.

b) Ueber die Oberfläche.

277) Vergl. Lehrs. 7.

278) Wie 277.

279) Verfahre nach Lehrs. 7.

280) Die Höhe einer Seitenfläche wird $= \sqrt{\left[h^2 - \left(\frac{S-s}{2}\right)^2\right]}$, folglich die Oberfläche nach Lehrs. 7: $= S^2 + s^2 + (S + s)\sqrt{(4h^2 + (S - s)^2)}$.

Digitized by Google

291) Verfahre wie in 280.

282) a) Der Inhalt einer Seitenfläche ist $= 32{,}25\square'$, folglich die Höhe derselben $= 8{,}0625'$ und die Höhe der Pyramide $= \sqrt{(8{,}0625^2 - 1)}$ u. s. w.

b) Substituirt man in 280 die gegebenen Werthe, so folgt: $34 + 8\sqrt{(4h^2+4)} = 263$, oder $129 = 16\sqrt{(1+h^2)}$. Erhebe nun beide Seiten zum Quadrat u. s. w.

283) Setze die Seite der kleinern Basis $= x$, die der größern $= 3x$ und die Höhe der Seitenfläche $= 8x$ und bilde nach Lehrs. 7 eine Gleichung.

284) Bezeichnet man die Seite der andern Basis durch x und verfährt wie in 280, so erhält man die Gleichung:

$$52{,}78 = x^2 + 2{,}4^2 + (x + 2{,}4)\sqrt{(x-2{,}4)^2 + 4 \cdot 5{,}4^2)}$$

oder $47{,}02 - x^2 = (x + 2{,}4)\sqrt{(x^2 - 4{,}8x + 122{,}4)}$.

Erhebt man nun beide Theile zum Quadrat und reducirt, so bekommt man: $x^2 + 2{,}811166x = 7{,}561037$, woraus endlich der Werth von $x = 1{,}6826$ gefunden wird.

285) Substituirt man in 280 für S den Werth $s + 3$, und für $h = 10$, so folgt:

$$351{,}9 = (s+3)^2 + s^2 + (2s+3)\sqrt{409} \text{ oder:}$$
$$s^2 + 23{,}223s = 141{,}1155.$$

Hieraus findet man: $s = 5'$, also ist $S = 5 + 3 = 8'$.

c) Ueber den Kubikinhalt.

286) Man subtrahire den Inhalt der Ergänzungspyramide von dem Inhalte der vollständigen Pyramide.

287) Ist die Seite der andern Basis $= x$, so verhält sich: $28{,}8 : 4{,}8 = 7{,}8 : x$. Suche nun hieraus x $(= 1{,}3)$ und verfahre dann nach 286.

288) Bezeichnet x die Höhe der Ergänzungspyramide und y die Durchschnittsfläche, so verhält sich nach Lehrs. 5:

$\sqrt{G} : \sqrt{y} = H : x$, also ist $x = \frac{H\sqrt{y}}{\sqrt{G}}$ und nach 286:

$$k = \frac{G \cdot H}{3} - \frac{y}{3} \cdot \frac{H\sqrt{y}}{\sqrt{G}} \text{ oder } y^3 = \left(\frac{G \cdot H - 3k}{H^2}\right)^2 G \text{ u. s. w.}$$

Digitized by Google

289) Ist x die Höhe der Ergänzungspyramide, so verhält sich nach Lehrs. 5: $\sqrt{G} : \sqrt{g} = h + x : x$, woraus folgt: $x = \frac{h\sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}$. Verfährt man nun nach der Andeutung zu Aufg. 286, so erhält man:

$$\text{Kubikinhalt} = \frac{G}{3}\left(h + \frac{h\sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}\right) - \frac{g}{3} \cdot \frac{h\sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}$$

$$= \frac{h}{3} \cdot \frac{G\sqrt{G} - g\sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}.$$

Nun ist aber $(G\sqrt{G} - g\sqrt{g}) : (\sqrt{G} - \sqrt{g}) = G + \sqrt{G.g} + g$; folglich der Kubikinhalt $= \frac{h}{3}(G + \sqrt{G.g} + g)$.

290) bis 293) Befolge entweder den in 289 angedeuteten Weg, oder substituire die gegebenen Werthe in die für jene Aufgabe erhaltene Formel.

294) Setze für $G = S^2$ und für $g = s^2$ in die Formel der Aufg. 289.

295) Vergl. 294.

296) Substituire in 289 für $h = 10'$, $G = 2800\square'$ und für $g = 14800\square'$ und suche dann die Basis eines $2^1/_4{}'$ hohen Prisma von dem eben gefundenen Inhalt.

297) Suche die halbe Diagonale der größern Basis (=2,8284'), dann die halbe Diagonale der kleinern Basis (=1,7677'), subtrahire beide und bestimme nun aus dem rechtwinkligen Dreieck, welches dieser Rest, die Seitenkante und die Höhe des Körpers mit einander bilden, die letztere, und endlich nach 294 den Kubikinhalt.

298) Nach 289.

299) Rechne den Kubikinhalt jedes Körpers u. s. w.

300) Setze (nach Abtheil. I. 230) in die Formel der Aufg. 289 für $G = \frac{S^2}{4}\sqrt{3}$ und für $g = \frac{s^2}{4}\sqrt{3}$ und reducire.

301) Bilde nach 289 eine Gleichung u. s. w.

302) Nach 294 ist eine Gleichung zu bilden u. s. w.

303) Ist die Entfernung dieser Ebene von der größern Basis (Fig. 44) = x, und die Seite des Durchschnitts = y, so verhält sich: af : fb = pq : qb, oder

Digitized by Google

$h : \sqrt{\frac{S^2}{2}} - \sqrt{\frac{s^2}{2}} = x : \sqrt{\frac{S^2}{2}} - \sqrt{\frac{y^2}{2}}$, woraus folgt:

$$x = \frac{h(S-y)}{S-s} \ldots\ldots I.$$

Nach der Bedingung ist ferner:

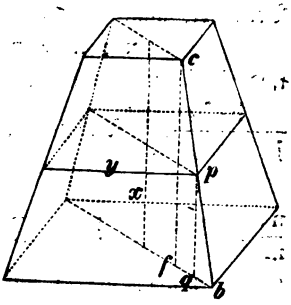
$$\frac{x}{3}(S^2 + y^2 + Sy) = \frac{h}{6}(S^2 + s^2 + Ss)$$

(vergl. 294). Substituirt man nun für x obigen Werth I, so erhält man

$y = \sqrt[3]{\frac{S^3 + s^3}{2}}$, und durch Substitution dieses Werthes in I endlich

$$x = \frac{h}{S-s}\left(S - \sqrt[3]{\frac{S^3 + s^3}{2}}\right)$$

Fig. 44.



304) Vergl. 303.

305) Der Inhalt der Ergänzungspyramide ist $= 1{,}645$ u. da diese ähnlich der ganzen Pyramide ist, so ist sie der achte Theil derselben u. s. w.

306) Substituire die gegebenen Werthe in die für Aufg. 294 erhaltene Formel.

307) Nach 294 ist: $\frac{h}{3}(S^2 + Sx + x^2) = k$ u. s. w.

308) Nach der Formel für Aufg. 289 muß:

$$G + \sqrt{G \cdot g} + g = \frac{3k}{h} \text{ sein.}$$

Hieraus folgt: $G^2 + \left(g - \frac{6k}{h}\right)G = -\left(\frac{3k}{h} - g\right)^2$ u. s. w.

309) Verfahre ähnlich wie bei 308.

Welcher Schluß läßt sich aus der Vergleichung der beiden letzten Resultate ziehen?

310) Vergl. 308 und 309.

311) Bezeichnet man die kleinere Seite durch x, so ergibt sich aus dem Resultate der Aufg. 300 die Gleichung:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\left((x+2)^2 + x^2 + x(x+2)\right) = 42{,}434 \text{ und}$$

hieraus: $x^2 + 2x = 15$ u. s. w.

Digitized by Google

312) Die Entfernung der Schnittfläche von der größern Basis sei $= x$, der Inhalt des Schnittes $= y$ und die Höhe der Ergänzungspyramide $= z$, so folgt:

$$h + z : h - x + z = \sqrt{G} : \sqrt{y} \text{ und}$$
$$h + z : z = \sqrt{G} : \sqrt{g}.$$

Verändert man die erste Proportion, so erhält man:

$$x : h + z = \sqrt{G} - \sqrt{y} : \sqrt{G}$$

und substituirt man nun aus der zweiten den Werth von $z = \frac{h\sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}$, so ergibt sich: $x = \frac{h(\sqrt{G} - \sqrt{y})}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}$.

Nun ist also nach der Aufgabe

$$\frac{n}{m} \cdot \frac{h}{3}(G + g + \sqrt{G \cdot g}) = \frac{h(\sqrt{G} - \sqrt{y})}{3(\sqrt{G} - \sqrt{g})}(G + y + \sqrt{G \cdot y})$$

(vergl. 289), oder wenn man die angedeuteten Multiplicationen ausführt und reducirt:

$$y\sqrt{y} = G\sqrt{G} - \frac{n}{m}(G\sqrt{G} - g\sqrt{g}), \text{ woraus folgt:}$$

$$y = \sqrt[3]{\left[G\sqrt{G} - \frac{n}{m}(G\sqrt{G} - g\sqrt{g})\right]^2}.$$

Substituire nun diesen Werth von y in obigen Werth von x u. s. w.

d) Ueber das Gewicht.

314) Bestimme zuerst den Kubikinhalt und dann das Gewicht (vergl. 26).

315) Die Höhe wird $= \sqrt{(2{,}5^2 - (1{,}4 - 0{,}8)^2)}$ u. s. w.

316) Bestimme zuerst den Kubikinhalt nach der Andeut. zu Aufg. 33, dann mittelst des Resultats zu Aufg. 308 die Basis und hieraus endlich die Seite derselben.

317) Bezeichnet man das spec. Gewicht mit x, so muß $\frac{1{,}2}{3}(0{,}64 + 0{,}25 + 0{,}4)\,66x = 170{,}28$ sein (vergl. Resultat zu 294).

318) Ist die Seite der kleinern Basis $= x$, so folgt, da der Kubikinhalt der Pyramide $= \frac{5745{,}6}{54 \cdot 2{,}8} = 38$ ist:

Digitized by Google

$$\left((x+1)^2 + x^2 + x(x+1)\right)\frac{x+4}{3} = 38, \text{ oder}$$

$$x^3 + 5x^2 + \frac{13}{3}x = \frac{110}{3}.$$

Setzt man $x = y - \frac{5}{3}$, so ergibt sich: $y^3 - 4y - \frac{935}{27} = 0$, und wendet man nun zur Lösung dieser Gleichung die cardanische Formel an, so findet man $y = 3{,}66\ldots$; also wird $x = 3{,}66\ldots - 1{,}66\ldots = 2'$ u. s. w.

319) Die Höhe der einen Pyramide sei $= x$, so verhält sich:

$$5832 : 729 = (x + 4{,}6)^3 : x^3 \text{ oder}$$

$$\sqrt[3]{5832} : \sqrt[3]{729} = x + 4{,}6 : x \text{ u. s. w.}$$

§. 6. Aufgaben über die Berechnung des regulären Tetraeders.

a) Ueber die Oberfläche.

320) Die Oberfläche wird durch 4 gleichseitige Dreiecke gebildet (Vergl. Abtheil. I. 230).

321) Nach Abtheil. I. 230 ist die Oberfläche $=$

$$\frac{4s^2}{4}\sqrt{3} = s^2\sqrt{3}.$$

322) Substituire in 321.

323) Der Fußpunkt der Höhe des Tetraeders trifft mit dem Mittelpunkte des um das gleichseitige Dreieck beschriebenen Kreises zusammen. Der Halbmesser dieses Kreises ist aber, wenn s die Seite des Körpers bezeichnet (vgl. Theil I. 520) $= \sqrt{\frac{s^2}{3}}$. Nun ist ferner $s^2 = h^2 + \frac{s^2}{3}$ oder $s^2 = \frac{3h^2}{2}$, also wenn man in 321 für s^2 diesen Werth substituirt: Oberfläche $= \frac{3h^2}{2}\sqrt{3}$.

324) Verfahre wie in 323 angedeutet wurde.

325) Wie in 323 findet man $3h^2 = 2s^2$. Ist nun die Höhe $= x$, so muß $3x^2 = 2(x+1{,}4)^2$, oder $x\sqrt{3} = (x + 1{,}4)\sqrt{2}$ sein; bestimme daraus x und dann nach 323 die Oberfläche.

Digitized by Google

326) Die Seiten seien x und x + 1,8, so ist nach 321:

$$x^2\sqrt{3} + (x + 1{,}8)^2\sqrt{3} = 17{,}32, \text{ oder:}$$

$$x^2 + 1{,}8x = 8{,}38.$$

Bestimme hieraus x und dann die Oberfläche nach 321.

b) Ueber den Kubikinhalt und das Gewicht.

327) und 328) Nach 323 ist die Höhe $= \sqrt{\frac{2s^2}{3}}$ also nach §. 5 Lehrs. 6 der Kubikinhalt $= \frac{s^2}{12}\sqrt{3} \cdot s\sqrt{\frac{2}{3}}$ u. s. w.

329) Nach 327 muß $\frac{s^3}{12}\sqrt{2} = 7{,}5424$ sein. Bestimme nun die Kante s und dann nach 321 die Oberfläche.

330) und 331) Wie in 323 findet man $s = h\sqrt{\frac{3}{2}}$. Substituirt man diesen Werth für s in die Formel der Aufg. 327, so erhält man: Kubikinhalt $= \frac{\left(h\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^3\sqrt{2}}{12}$ u. s. w.

332) Es ist $3h^2 = 2s^2$ (vergl. 323) und bezeichnet man die Kante mit x, so muß auch:

$2x^2 = 3(24 - x)^2$ oder $x\sqrt{2} = (24 - x)\sqrt{3}$ sein. Suche x und dann nach 327 den Inhalt.

333) Ist die Seite des einen Tetraeders $= x$, so ist die des andern $= 5 - x$ und man erhält nach 327 die Gleichung:

$$\frac{x^3}{12}\sqrt{2} + \frac{(5-x)^3}{12}\sqrt{2} = 4{,}12475 \text{ oder auch:}$$

$$x^3 + (5-x)^3 = 35 \text{ u. s. w.}$$

334) Nach 327 wird $\frac{s^3}{12}\sqrt{2} = \frac{3848{,}8}{54 \cdot 2{,}8}$ u. s. w.

335) Ist die Kante des einen Tetraeders $= x$, so ist die des andern $= x + 0{,}6$, also nach 327:

$$\frac{x^3}{12}\sqrt{2} + \frac{(x + 0{,}6)^3}{12}\sqrt{2} = \frac{144\frac{1}{3}}{54 \cdot 3} \text{ oder:}$$

$$x^3 + 0{,}9x^2 + 0{,}54x - 3{,}672 = 0.$$

Substituirt man $x = y - 0{,}3$, so erhält man die Gleichung:

Digitized by Google

$y^3 + 0{,}27y - 3{,}78 = 0$, aus welcher nach der carbanischen Formel für $y = 1{,}5$ folgt; demnach ist $x = 1{,}2'$ u. s. w.

§. 7. Aufgaben über die Berechnung des regulären Oktaeders.

a) Ueber die Oberfläche.

336) und 337) Die Oberfläche besteht aus 8 gleichen gleichseitigen Dreiecken u. s. w. (vergl. 320).

338) Nach 337 ist $2s^2\sqrt{3} = 21{,}65$ u. s. w.

339) Die Kante s bildet mit zwei halben Diagonalen ein rechtwinkliges Dreieck, also ist $s^2 = 18$. Substituire nun diesen Werth in 337 u. s. w.

b) Ueber den Kubikinhalt.

340) und 341) Bezeichnet man die halbe Diagonale durch x, so ist $s^2 = 2x^2$ oder $x = \frac{s}{2}\sqrt{2}$; folglich ist, wenn man sich das Oktaeder als aus 2 vierseitigen Pyramiden bestehend denkt, nach §. 5 Lehrs. 3 der Kubikinhalt $= \frac{2s^2}{3} \cdot \frac{s}{2}\sqrt{2}$ u. s. w.

342) Nach 341 folgt: $\frac{s^3}{3}\sqrt{2} = 12{,}728$ u. s. w.

343) Da alle regulären Oktaeder einander ähnlich sind, so verhält sich: $1 : 12 = 0{,}6^3 : x^3$ u. s. w.

Anmerk. Man könnte auch den Inhalt des Oktaeders von 0,6 Kante nach 341 bestimmen, dann wie in 342 die Seite des 12mal so großen berechnen.

344) War die Kante im ersten Falle $= x$, so muß nach 341 $\frac{(x+1)^3}{3}\sqrt{2} - \frac{x^3}{3}\sqrt{2} = 17{,}442$ oder $x^2 + x = 12$ sein.

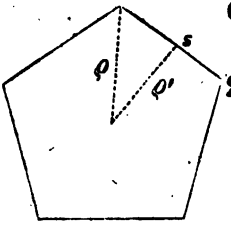
Bestimme hieraus x und dann nach 341 den Inhalt.

§. 8. Aufgaben über die Berechnung des regulären Dodekaeders.

345) Bezeichnet ϱ (Fig. 45) den Halbmesser des um eine Seitenfläche beschriebenen Kreises und ϱ' den des eingeschriebenen, so ist $s = \frac{\varrho}{2}\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}$ (s. Theil I. Nr. 539), also

Digitized by Google

Fig. 45.



$$\varrho = \frac{2s}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} = 2s\sqrt{\frac{1}{10-2\sqrt{5}}} = s\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \text{ und}$$

$$\varrho' = \sqrt{\left(\varrho^2 - \frac{s^2}{4}\right)} = \sqrt{\left(s\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\right)^2 - \frac{s^2}{4}}$$

also der Inhalt einer Seitenfläche =

$$\frac{5s \cdot \varrho'}{2} = \frac{5s}{2}\sqrt{s^2\left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right) - \frac{s^2}{4}} = \frac{5s^2}{4}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\ ^*);$$

also die ganze Oberfläche $= 15s^2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$

Die Formel für den Kubikinhalt wird auf folgende Weise abgeleitet:

Nach Obigem ist $\varrho = s\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$, und jede Diagonale eines Fünfecks wird $= \frac{s}{2}(1+\sqrt{5})$ **)

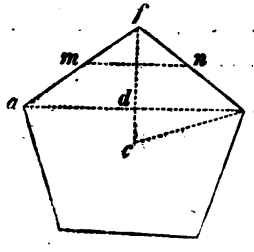
Denkt man sich nun durch den Mittelpunkt des Dodekaeders und die Halbirungspunkte zweier zusammenstoßender Kanten eine

---

*) Vergl. Andeut. zu Aufg. 585 c) im I. Theil.

**) Denn (Fig. 46) $bf^2 = bc^2 + cf^2 - 2cf \cdot cd$ (Theil I. Absch. IV. Lehrs. 2), hieraus $cd =$

Fig. 46.



$\frac{2\varrho^2 - s^2}{2\varrho}$. Ferner ist $bd^2 = bc^2 - cd^2 = \frac{4\varrho^2 s^2 - s^4}{4\varrho^2}$, oder wenn man für ϱ obigen Werth $\frac{2s}{\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}$ substituirt und reducirt: $bd^2 = \frac{s^2(3+\sqrt{5})}{8}$, also ist $bd = \frac{s}{2}\sqrt{\frac{(3+\sqrt{5})}{2}}$ und die Diagonale $ab = \frac{s}{2}\sqrt{(6+2\sqrt{5})} = \frac{s}{2}\sqrt{(1+\sqrt{5})^2} = \frac{s}{2}(1+\sqrt{5})$.

Digitized by Google

Ebene gelegt, so wird diese den Körper nach einem regelmäßigen Zehneck schneiden, dessen Seite gleich der halben Diagonale eines Fünfecks, also nach Obigem $= \frac{s}{4}(1 + \sqrt{5})$ sein muß*).

Nun ist aber der Halbmesser des um dieses Zehneck beschriebenen Kreises, der durch ϱ'' bezeichnet sein soll (vergl. Theil I. 526) $= \frac{2 \cdot \frac{s}{4}(1 + \sqrt{5})}{-1 + \sqrt{5}}$ oder $\varrho'' = \frac{s}{4}(3 + \sqrt{5})$.

Setzt man ferner den Abstand des Oktaedermittelpunktes von den Eckpunkten $= R$ und die senkrechte Entfernung desselben von den Seitenflächen $= r$, so ist $R = \sqrt{\left(\varrho''^2 + \frac{s^2}{4}\right)}$, oder, wenn man den Werth von ϱ'' substituirt:

$$R = \frac{s}{4}\sqrt{(18 + 6\sqrt{5})} = \frac{s}{2}\sqrt{\frac{9 + 3\sqrt{5}}{2}}$$

oder nach gehöriger Umformung: $R = \frac{s}{4}(1 + \sqrt{5})\sqrt{3}$**).

Da $r = \sqrt{(R^2 - \varrho^2)}$, so erhält man durch Substitution der gefundenen Werthe von R und ϱ nach hinreichender Reduktion: $r = \frac{s}{4}\sqrt{\frac{50 + 22\sqrt{5}}{5}}$. Endlich ist aber der Kubikinhalt des

---

*) Sind z. B. m und n (Fig. 46) die Halbirungspunkte, so verhält sich: fn : fb = mn : ab oder 1 : 2 = mn : ab, also $mn = \frac{ab}{2}$.

**) Setzt man $\sqrt{(9 + 3\sqrt{5})} = \sqrt{m} + \sqrt{n}$, so ist: $9 + 3\sqrt{5} = m + n + 2\sqrt{mn}$. Nimmt man nun an, es sei I. $m + n = 9$ und II. $2\sqrt{mn} = 3\sqrt{5}$, so folgt durch Quadrirung von II.: $4mn = 45$ oder durch Substitution von n aus I.: $4m(9 - m) = 45$, woraus: $m = \frac{15}{2}$, also ist $n = \frac{3}{2}$. Substituirt man diese Werthe, so erhält man: $\sqrt{(9 + 3\sqrt{5})} = \sqrt{\frac{15}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. Demnach wird $R = \frac{s}{2} \cdot \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{2}$ $= \frac{s}{4}(1 + \sqrt{5})\sqrt{3}$.

Digitized by Google

Dodekaeders, wenn man eine Seitenfläche mit F bezeichnet $= \frac{12F \cdot r}{3} = 4r \cdot F$. F ist aber nach Obigem $= \frac{5s^2}{4}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$ also der Kubikinh. $= \frac{s^3}{4}\sqrt{(470+210\sqrt{5})} = \frac{s^3}{4}(15+7\sqrt{5})$ *)

346) Substituire für s in die Formeln der Aufg. 345 den Werth 0,5′.

347) Nach 345 a) ist: $15s^2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} = 516$. Bestimme hieraus die Kante s und dann nach 345 b) den Inhalt.

348) Nach 345 b) muß $\frac{s^3}{4}(15+7\sqrt{5}) = 13{,}241$ sein. Bestimme daraus s und dann die Oberfläche nach 345 a).

§. 9. Aufgaben über die Berechnung des regulären Ikosaeders.

349) und 350) Die Oberfläche wird durch 20 gleiche gleichseitige Dreiecke gebildet.

351) Aus 350 folgt: $5 \cdot s^2\sqrt{3} = 19{,}49$ u. s. w.

352) Ist die Entfernung des Mittelpunktes des Ikosaeders von den Eckpunkten $= R$, so ist jede Linie, welche zwei entgegengesetzte Ecken verbindet, $= 2R$, und denkt man sich nun den einen Endpunkt dieser Linie mit irgend einer andern Ecke verbunden, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck, gebildet von der Seite s und der zweiten Verbindungslinie als Katheten und von 2R als Hypotenuse. Fällt man vom Scheitel des rechten Winkels einen Perpendikel p auf die Hypotenuse und bezeichnet man den kleinern Abschnitt derselben mit a, so ist: 1) $a = \sqrt{(s^2 - p^2)}$ und 2) $s^2 = 2Ra$ oder $R = \frac{s^2}{2a}$ (vergl. Abtheil I. Abschn. VI.

*) Setzt man nämlich wieder $\sqrt{(470+210\sqrt{5})} = \sqrt{m} + \sqrt{n}$, so ist $476 + 210\sqrt{5} = m + n + 2\sqrt{mn}$, also wenn $m + n = 470$ und $2\sqrt{mn} = 210\sqrt{5}$ angenommen und genau wie in der vorhergeh. Anmerkung verfahren wird: $m = 245$ und $n = 225$. Folglich ist $\sqrt{(470+210\sqrt{5})} = \sqrt{245} + \sqrt{225} = 7\sqrt{5} + 15$.

Digitized by Google

Lehrs. 6). Nun ist aber p der Halbmesser des durch die Endpunkte eines regulären Fünfecks gehenden Kreises, dessen Seite $= s$ ist, also nach dem Werthe für ϱ bei der Anleitung zu 345: $p = s\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$. Substituirt man diesen Werth in 1) so folgt: $a = s\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$ und aus 2) $R = \frac{s}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$.

Bezeichnet ferner r den senkrechten Abstand des Mittelpunktes des Körpers von den Seitenflächen, und h die Höhe eines Seitendreiecks, so ist:

$r^2 = R^2 - \left(\frac{2}{3}h\right)^2$ *) $= \frac{s^2}{4}\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right) - \frac{s^2}{3} = \frac{s^2}{4}\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{6}\right)$

also: $r = \frac{s}{2}\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{6}}$, oder wenn man $\sqrt{7+\sqrt{5}} = \sqrt{m}+\sqrt{n}$ setzt und nun dieselbe Operation vornimmt, wie in der Anmerkung ** auf Seite 105:

$r = \frac{s}{4}\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$. Daher Kubikinhalt $=$

$\frac{5s^2}{3}\cdot r\sqrt{3} = \frac{5s^3}{12}(3+\sqrt{5})$.

353) Aus 352 folgt: $\frac{5s^3}{12}(3+\sqrt{5}) = 471{,}24$ u. s. w.

354) Sind die Seiten $= x$ und y, so ist:

I. $5x^2\sqrt{3} + 5y^2\sqrt{3} = 47{,}3$ (nach 350)

II. $\frac{5x^3}{12}(3+\sqrt{5}) + \frac{5y^3}{12}(3+\sqrt{5}) = 19{,}635$ (nach 352)

---

*) Denn verbindet man den Mittelpunkt des Ikosaeders mit dem Mittelpunkte einer Kante, so steht diese darauf senkrecht, und man erhält also, wenn man diese Verbindungslinie durch ϱ und der Abstand des Fußpunktes des Perpendikels auf die Seitenfläche von der Ecke des Dreiecks durch x bezeichnet:

I. $r^2 = R^2 - x^2$, II. $r^2 = \varrho^2 - (h-x)^2$ und III. $\varrho^2 = R^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2$

Substituirt man ϱ^2 aus III. in II. und in die neue Gleichung r^2 aus I., so folgt: $2hx = \frac{s^2}{4} + h^2$. Nun ist aber $h^2 = \frac{3s^2}{4}$ also $2hx = \frac{h^2}{3} + h^2$ oder $2x = \frac{4h}{3}$, demnach $x = \frac{2h}{3}$.

Digitized by Google

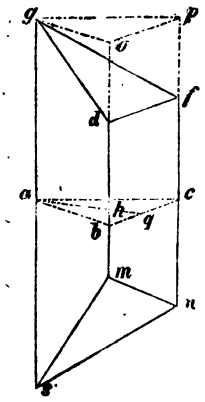
oder: I. $x^2 + y^2 = 5$
II. $x^3 + y^3 = 9$.

Hieraus findet man $x = 1'$ und $y = 2'$.

§. 10. Aufgaben über das schiefabgeschnittene dreiseitige Prisma.

355) Denkt man sich durch irgend einen Punkt b (Fig. 47) der Kante dm eine Ebene senkrecht auf dieselbe, und durch g eine zu dieser parallele Ebene gop gelegt, und die Kanten bd und cf bis zu dieser verlängert, und bezeichnet man die eine Seite bc des Durchschnitts mit q und die zugehörige Höhe mit h, so ist: Inhalt abfg = Inhalt des Prisma abpg — Inhalt der Pyramide dpg; oder, da der Inh. des Paralleltrapezes dfpo = (od + pf) $\frac{op}{2}$ = (2ag — bd — fc) $\frac{op}{2}$ ist: abfg = $\frac{q \cdot h}{2} \cdot ag - \frac{h}{3}(2ag - bd - fc)\frac{q}{2}$ oder

Fig. 47.



$$abfg = \frac{q \cdot h}{2}\left(\frac{ag + bd + fc}{3}\right).$$

Auf ähnliche Weise läßt sich zeigen, daß der Inhalt von acsn = $\frac{q \cdot h}{2}\left(\frac{as + bm + cn}{3}\right)$ ist. Addirt man beide Ausdrücke, so erhält man für den Inhalt des schiefabgeschnittenen Prisma: $\frac{q \cdot h}{2}\left(\frac{gs + dm + fn}{3}\right)$ oder $d \cdot \frac{k + k' + k''}{3}$.

356) bis 358) Substituire die betreffenden Werthe in die Formel der Aufg. 355.

359) Nach 355 muß $\frac{8{,}75 + 7{,}8 + 6{,}5}{3} \cdot d = 28{,}8125$ sein, woraus d leicht zu bestimmen ist.

360) Sind die Kanten = 7x, 9x und 14x, so ist nach 355 $\frac{7x + 9x + 14x}{3} \cdot 8{,}4 = 100{,}8$. Man findet hieraus x = 1,2 u. s. w.

Digitized by Google

361) Die kleinste Kante sei = x, so ist, da der Inhalt des Durchschnittsdreiecks $= \frac{27}{8}\square'$ gefunden wird:

$$\frac{x + x + 0{,}6 + x + 1{,}2}{3} \cdot \frac{27}{8} = 18{,}9 \text{ u. s. w.}$$

Abschnitt III.

Aufgaben über die Berechnung der runden Körper.

---

§. 11. Aufgaben über die Berechnung des Cylinders.

A. Berechnung des vollen Cylinders.

Lehrsätze.

1) Der Inhalt der krummen Oberfläche (des Mantels) eines senkrechten Cylinders ist gleich dem Produkte aus der Peripherie der Basis und der Höhe des Cylinders.

Zusatz. Um die ganze Oberfläche zu erhalten, addire man zum Mantel noch die beiden Grundkreise.

2) Die krummen, so wie die ganzen Oberflächen zweier ähnlichen Cylinder verhalten sich wie die Quadrate der Radien oder Höhen.

3) Der Kubikinhalt eines jeden Cylinders ist gleich dem Produkte aus dem Inhalte der Basis und der Höhe des Cylindes.

4) Zwei ähnliche Cylinder verhalten sich dem Inhalte nach wie die dritten Potenzen der Radien oder Höhen.

a) Ueber die Oberfläche.

362) Nach Lehrs. 1.

363) bis 365) Rechne zuerst den Umfang und verfahre dann nach Lehrs. 1.

Anmerk. Die nöthigen Sätze zur Berechnung des Kreises sowie der Theile desselben s. Abtheil. I. Abschn. X.

366) Nach Lehrs. 1.

367) Berechne den Mantel eines Cylinders von $6\frac{1}{2}''$ Durchmesser und 185′ Höhe nach Lehrs. 1.

368) Ist die Basisseite des Parallelepipeds = x, so ist $x = 1{,}4\sqrt{2}$. Bestimme nun nach Lehrs. 1 Zusatz die Oberfläche des Cylinders und ziehe davon die des Parallelepipeds ab.

Digitized by Google

369) Da der Umfang $= 2{,}5\pi$ ist, so muß nach Lehrs. 1 die Höhe $= \frac{196{,}35}{2{,}5\pi}$ sein u. s. w.

370) Nach Lehrs. 1 ist der Umfang $=$ Mantel dividirt durch die Höhe. Aus dem Umfange bestimme dann den Durchmesser.

371) Ist der Halbmesser $= x$, so muß nach Zus. zu Lehrs. 1 sein: $2\pi x^2 + 2\pi x \,.\, 14 = 119^{57}/_{80}$ oder

$$x^2 + 14x = 19{,}0625 \text{ u. s. w.}$$

372) Ist der Durchmesser $=$ Höhe $= x$, so folgt nach Zus. zu Lehrs. 1: $2\pi \,.\, \frac{x^2}{4} + \pi x^2 = 117{,}75$ u. s. w.

373) Der Halbmesser sei $= x$; bilde nun, wie in den beiden vorhergeh. Aufgaben, eine Gleichung u. s. w.

374) Ist der Halbmesser $= x$, so wird (Zus. zu Lehrs. 1)

$$2\pi x^2 + 2\pi x\,(2\pi x + 20{,}44) = 439{,}6 \text{ oder}$$

$x^2 + 2{,}80769x = 9{,}61538$; woraus folgt: $x = 2$, also ist der Umfang $= 2\pi x = 12{,}56$ u. s. w.

375) War im ersten Falle der Halbmesser $= x$ und die Höhe $= y$, so folgt nach Lehrs. 1 Zus.:

I. $2\pi x^2 + 2\pi xy = 39{,}25$

II. $2\pi(x + 0{,}2)^2 + 2\pi(x + 0{,}2)(y + 5) = 78{,}5$ oder

---

I. $x^2 + xy = 6{,}25$

II. $x^2 + 5{,}4x + xy + 0{,}2y = 11{,}46.$

Substituirt man y aus I. in II., so erhält man die Gleichung: $x^2 - 1{,}02x = -0{,}24$ und hieraus $x = 0{,}65'$ oder $0{,}37'$; also wird y entweder $= 8{,}96'$ oder $16{,}52'$.

376) Nach Lehrs. 2 verhalten sich die Oberflächen wie die Quadrate der Radien und die Radien verhalten sich wie die Umfänge, also $17{,}64 : 30{,}25 = 8{,}4^2 : x^2$ u. s. w.

377) Nach Lehrs. 2: $x : 24 - x = 2{,}5^2 : 1{,}4^2$ u. s. w.

378) Es verhält sich: $20^1/_4 : 12^1/_4 = x^2 : (x - 1)^2$ Ziehe gliedweise die Quadratwurzel aus u. s. w., so folgt: $x = 4{,}5$, also die Höhe des andern $= 3{,}5$. Bezeichnet nun y den Durchmesser des größern Cylinders, so ist nach Lehrs. 1 Zusatz: $\frac{\pi y^2}{4} + \pi y \,.\, 4{,}5 = 20{,}25$, woraus folgt: $y = 1{,}32'$.

Digitized by Google

Ist endlich z der Durchmesser des andern Cylinders, so verhält sich: 3,5 : 4,5 = z : 1,32 u. s. w.

b) Ueber den Kubikinhalt.

379) Nach Lehrs. 3: = 18 . 9 u. s. w.

380) und 381) Inhalt der Basis $= \pi r^2$ u. s. w. (nach Lehrs. 3).

382) und 383) Durchmesser $= \frac{\text{Umfang}}{\pi}$ u. s. w. nach Lehrs. 3.

384) Der Halbmesser des Cylinders $= \frac{2,4}{2}$ u. s. w.

385) Nach Lehrs. 3 (vergl. 380 und 381).

386) Durchmesser $= \frac{P}{\pi}$, also Inhalt nach Lehrs. 3 $=$

$$\frac{\pi}{4} \cdot \frac{P^2}{\pi^2} \cdot h = \frac{P^2 h}{4\pi}.$$

387) Nach Lehrs. 3.

388) Die andere Seite des rechteckigen Querschnitts wird $= \sqrt{1,8^2 - 1} = 1,4966'$. Ziehe nun den Kubikinhalt des Balkens von dem des Stammes (Lehrs. 3) ab.

389) Vergl. 383.

390) Vergl. Lehrs. 3.

391) Dividire mit dem Inhalte des Gefäßes in den des Troges.

392) Der Kubikinhalt ist $= 452,16^{c'}$; suche daraus den Werth von $1^{c'}$.

393) Aus dem Inhalte eines Stiefels, dessen Höhe = der Hubhöhe ist, zuberechnen.

394) Nach Lehrs. 3 ist die Höhe = Inhalt dividirt durch die Basis.

395) und 396) Die Basis ist = Kubikinhalt dividirt durch die Höhe (nach Lehrs. 3). Bestimme nun aus der Basis den Durchmesser und daraus den Umfang.

397) Der 6fache Inhalt des kleineren Gefäßes gibt den Inhalt eines Cylinders von 9'' Durchmesser, dessen Höhe nun zu suchen ist (vergl. 394).

398) 1 bad. Maas $= \frac{1}{18} c'$. Verfahre nach 395.

Digitized by Google

399) 10 bad. Maas $= {}^5/_9\,c'$. Suche nun wie bei 398 den Durchmesser und dann den Inhalt des Blechs (= Mantel + Boden).

400) 1 Sester $= {}^5/_9\,c'$ u. s. w.

401) 2 bad. Maas $= {}^1/_9\,c'$. Suche nun den Halbmesser u. s. w.

402) Die Flüssigkeit bildet einen Cylinder von $1^1/_2\,c'$ Inhalt und $1^2/_5'$ Durchmesser, von welchem die Höhe zu suchen ist (vergl. 394).

403) $4^1/_2$ Maas $= {}^1/_4\,c'$ u. s. w.

404) Ist der Halbmesser $= x$, so ist $2\pi x \,.\, h = M$ (Lehrs. 1), also $x = \frac{M}{2\pi h}$. Nun ist der Inhalt $= \pi x^2 h$ (Lehrs. 3) &c.

405) Ist die Höhe $= x$, so muß nach Zusatz zu Lehrs. 1 $\frac{\pi d^2}{2} + \pi d x = 0$ sein. Bestimme hieraus x, so ist der Inhalt $= \frac{\pi d^2}{4} \,.\, x$ u. s. w.

406) Die Höhe ist $= 2r$ u. s. w. nach Lehrs. 1 und 3.

407) Der Durchmesser des runden Querschnitts war $= \sqrt{0{,}9^2 + 1{,}2^2} = 1{,}5'$. Berechne darnach den Umfang u. s. w.

408) Setze den Durchmesser $= x$, also die Höhe $= \frac{7x}{3}$ und bilde nach Lehrs. 3 eine Gleichung.

409) Ist der Radius $= x$, so ist die Höhe $= 2x$ und nach Zus. zu Lehrs. 1: $2\pi x^2 + 2\pi x \,.\, 2x = 0$. Suche hieraus x und nach Lehrs. 3 den Inhalt.

410) Der Halbmesser ist $= \frac{P}{2\pi}$. Wird die Höhe durch x bezeichnet und bildet man wieder nach Zusatz zu Lehrs. 1 eine Gleichung und bestimmt daraus x, so wird $x = \frac{2\pi O - P^2}{2\pi P}$ also nach Lehrs. 3 der Inhalt $= \frac{P^2}{4\pi}\left(\frac{2\pi O - P^2}{2\pi P}\right)$ u. s. w.

411) Ist der Halbmesser $= x$ und die Höhe $= y$, so ist:

I. $2\pi x^2 + 2\pi x y = 56{,}52$ (Zus. zu Lehrs. 1).

II. $\pi x^2 y = 25{,}12$ (Lehrs. 3).

I. $\times\, x$ − II. $\times\, 2$ gibt: $2\pi x^3 = 56{,}52x - 50{,}24$ oder

$x^3 - 9x + 8 = 0$.

Digitized by Google

Man findet hieraus, durch die Methode der Zerlegung des Zahlengliedes in seine Faktoren $x = 1'$, also $y = 8'$. (Die cardanische Formel führt auf imaginäre Ausdrücke.)

Dividirt man $x^3 - 9x + 8$ durch $x - 1$, so erhält man die weitere Gleichung: $x^2 + x - 8 = 0$, aus welcher für x ein zweiter Werth $= 2{,}37'$ folgt. Substituirt man diesen in II., so wird für diesen Fall $y = 1{,}42'$ u. s. w. Vorliegende Aufgabe läßt demnach eine doppelte Auflösung zu.

412) Der Halbmesser wird $= \sqrt{\frac{K}{\pi h}}$. Substituire diesen Werth in die nach Zus. zu Lehrs. 1 zu bildende Gleichung ꝛc.

413) Der Halbmesser sei $= x$, die Höhe $= y$, so ist

I. $2\pi xy = M$ und II. $\pi x^2 y = K$.

Substituire nun den Werth von y aus II. in I. u. s. f.

414) Bezeichnet x den Durchmesser, so ist $\frac{\pi x^3}{4} = K$ (Lehrsatz 3) oder $x = \sqrt[3]{\frac{4K}{\pi}}$. Nach Zus. zu Lehrs. 1 ist ferner die Oberfläche $= \frac{\pi x^2}{2} + \pi x^2$. Substituire nun für x den Werth und reducire u. s. w.

415) Vergl. 409.

416) Bezeichnet x den Durchmesser, so ist:

$$\frac{\pi x^2}{2} + 10\pi x = 69{,}08 \text{ oder } x = 2',$$

folglich der Inhalt $= \frac{10\pi x^2}{4}$ u. s. w.

417) Wird der Durchmesser $= x$ gesetzt, so folgt:

$$\frac{\pi x^2}{2} + \pi x h = O \text{ oder } x^2 + 2hx = \frac{2O}{\pi}$$

woraus x leicht zu bestimmen ist.

Nun ist aber der Kubikinhalt $= \frac{\pi x^2}{4} h$, also $=$

$$\frac{\pi h}{4}\left(-h + \sqrt{\frac{2O + \pi h^2}{\pi}}\right)^2 = \frac{h}{2}\left(\pi h^2 + O - h\sqrt{\pi(2O + \pi h^2)}\right)$$

Digitized by Google

418) Ist der Durchmesser $= x$, so ist die Höhe $= \pi x + 13^1/_7$, also nach Lehrs. 3: $\pi x^2 \left(\pi x + \frac{92}{7}\right) = \frac{825}{8}$ oder

$x^3 + \frac{46}{11}x^2 - \frac{3675}{88} = 0$. Substituirt man $x = y - \frac{46}{33}$, so folgt: $y^3 - 5{,}801y - 36{,}344 = 0$ und hieraus durch Anwendung der cardanischen Formel: $y = 3{,}89\ldots$, also ist $x = 3{,}89 - 1{,}39 = 2{,}5'$.

419) Nach Lehrs. 4 verhält sich: $1{,}2^3 : 1{,}5^3 = x : 4 - x$ u. s. w.

420) $x : x + 0{,}5 = \sqrt[3]{0{,}729} : \sqrt[3]{1{,}728}$ u. s. w.

c) Ueber das Gewicht.

421) und 422) Berechne den Inhalt und dann das Gewicht (vergl. 26).

423) bis 425) Suche nach Andeut. 33 den Inhalt und daraus die verlangte Dimension.

426) Suche den Durchmesser eines Cylinders von 6″ 5‴ Höhe, dessen Inhalt dem von $^1/_2$ Loth Quecksilber gleichkommt.

427) Vertheilt man 1500 ℔ in 3 Theile, die sich wie $2 : 2^1/_2 : 3$ verhalten, so erhält man die Gewichte der Walzen der Reihe nach $= 400$ ℔, 500 ℔ und 600 ℔. Suche nun ähnlich wie für 425 hierzu die Durchmesser.

428) Setze den Durchmesser $= x$, so ist die Länge $= 5x$, also $\frac{\pi x^2}{4} \cdot 5x = \frac{2000}{54 \cdot 8{,}8}$ u. s. w.

429) Der Kubikinhalt des Würfels ist $= \frac{30{,}4}{8{,}8 \cdot 54}$ und die Höhe eines Cylinders von diesem Inhalte und 8″ Durchmesser gibt an, um wie viel das Wasser gestiegen ist.

430) Bestimme den Kubikinhalt von 1526 ℔ Eisen ($= 3{,}925^{c'}$) und löse dann die Aufgabe auf die gleiche Weise wie die Andeut. zu Aufg. 411 zeigt.

Man erhält zuletzt die cubische Gleichung $x^3 - 11x + 10 = 0$ und daraus für $x = 1'$ u. s. w.

Digitized by Google

Dividirt man die Gleichung $x^3 - 11x + 10 = 0$ durch $x - 1$, so erhält man: $x^2 - 10 = 0$, woraus sich ein zweiter Werth ergibt, welcher der Aufgabe genügt.

431) Rechne den Kubikinhalt eines Cylinders von 6'' Durchmesser und 4'' Höhe, so ist dies zugleich der Inhalt des eingelegten, woraus nun wie in Aufg. 414 leicht die Dimensionen zu bestimmen sind.

432) Wiegt die eine Walze x ℔, so verhält sich: $x : 4000 - x = 0{,}4^3 : 0{,}55^3$. Hieraus folgt: $x = 1111{,}23$ ℔ und die Länge ist nun leicht zu bestimmen (vergl. 423). Man findet dafür 1,86'. Ferner verhält sich, um die Länge y der andern Walze zu finden: $1{,}86 : y = 0{,}4 : 0{,}55$ u. s. w.

433) Es verhält sich: $1000 : 3375 = x^3 : (x + 1)^3$ ꝛc. Hat man hieraus die Länge für beide Walzen bestimmt, so lassen sich leicht die Durchmesser daraus berechnen (vergl. 425).

B. Berechnung des hohlen Cylinders.

434) Erste Auflösung. Ziehe den Kubikinhalt des hohlen Raumes von dem Inhalte des ganzen Cylinders ab.

Zweite Auflösung. Multiplicire den Inhalt des concentrischen Ringes, den ein Querschnitt bildet, mit der Höhe des Cylinders.

435) Berechne wie für 434 den Kubikinhalt, daraus das Gewicht und dann den Preis.

436) Bestimme den äußern Durchmesser und verfahre dann nach 434.

437) Da der Kubikinhalt $= \frac{18818}{54.11}$ ist, so muß, wenn man die Länge mit x bezeichnet, $\pi (0{,}1^2 - 0{,}08^2)\, x = \frac{18818}{54.11}$ sein u. s. w.

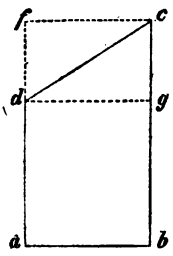
438) Es ist $\pi (R^2 - x^2)\, L = K$ u. s. w.

Digitized by Google

C. Berechnung des schief abgeschnittenen Cylinders.

439) a) Mantel von abcd (Fig. 48) = Mantel von abcf — dem halben Mantel von dgcf; oder = $\pi dH - \pi d\frac{H-h}{2} = \pi d\left(\frac{H+h}{2}\right)$.

Fig. 48.



b) Inh. abcd = Inh. abcf - Inh. $\frac{dgcf}{2}$, oder = $\frac{\pi d^2}{4}H - \frac{\pi d^2}{8}(H-h) = \frac{\pi d^2}{8}(H+h)$.

440) Verfahre nach der Andeut. zu 439.

441) Die größte Höhe des Cylinders wird 9′ und die kleinste 7′. Verfahre nun wie bei 439 gezeigt wurde.

442) Die beiden Höhen sind also 8′ und 7,2′ u. s. w. nach 439.

443) Ist (Fig. 48) $\measuredangle$ cdg = 30°, so ist $\measuredangle$ dcg = 60°, also $\triangle$ dcg ein halbes gleichseitiges, also dc = 2cg und $4cg^2 - cg^2 = 0{,}8^2$ oder cg = 0,4618.., folglich cb = 4,9618′ u. s. w. nach 439.

444) Ist der Durchmesser = x, so muß nach 439

$$\frac{\pi x^2}{8}(8 + 6{,}4) = 2{,}772 \text{ sein u. s. w.}$$

§. 12. Aufgaben über die Berechnung des Kegels.

Lehrsätze.

1) Der Mantel eines Kegels ist gleich dem Produkte aus dem Umfange der Basis und der halben Seite des Kegels.

Zusatz. Um die Oberfläche zu erhalten, addire man noch den Inhalt der Basis zum Mantel.

2) Der Kubikinhalt eines Kegels ist gleich dem dritten Theile des Produktes aus Grundfläche und Höhe.

3) Wird ein Kegel durch eine zur Basis parallele Ebene getheilt, so ist der an der Spitze liegende Theil (Ergänzungskegel) dem ganzen Kegel ähnlich.

4) Die Grundflächen ähnlicher Kegel verhalten sich wie die Quadrate der Höhen.

5) Die Inhalte ähnlicher Kegel verhalten sich wie die dritten Potenzen der Höhen oder auch der Durchmesser der Grundflächen.

Digitized by Google

A. Berechnung des vollständigen Kegels.

a) Ueber die Oberfläche.

445) Nach Lehrs. 1 $= \frac{15^5/_8 \cdot 12^2/_5}{2}$ u. s. w.

446) bis 448) Umfang $= 2\pi r$, also nach Lehrs. 1: Mantel $= \pi rs$ und Oberfläche $= \pi rs + \pi r^2$ (Zus. zu Lehrs. 1) u. s. w.

449) Suche den Radius der Basis $\left(= \frac{U}{2\pi}\right)$ und verfahre dann wie bei den nächst vorhergeh. Aufgaben.

450) Nach Zus. zu Lehrs. 1.

451) Nach Lehrs. 1 ist der Mantel $= \frac{\pi s \cdot s}{2} = \frac{\pi s^2}{2}$ und die Oberfläche (nach Zus.) $= \frac{\pi s^2}{2} + \frac{\pi s^2}{4}$ u. s. w.

452) Die Seite ist $= \sqrt{(16^2 + 3^2)}$ u. s. w. wie bei 446.

453) Die Seite des Kegels wird $= \sqrt{\left(a^2 + \frac{b^2}{4}\right)}$, also dessen Oberfläche $= \frac{\pi b^2}{4} + \frac{\pi b}{2}\sqrt{\left(a^2 + \frac{b^2}{4}\right)}$. Die Oberfläche des Cylinders ist aber $= \frac{\pi b^2}{2} + \pi ba$. Bilde nun die angegebene Proportion und reducire.

454) Die Seite des Kegels ist $= \sqrt{(h^2 + r^2)}$, also nach Zus. zu Lehrs. 1 die Oberfläche $= \pi r^2 + \pi r\sqrt{(h^2 + r^2)}$ u. s. w.

455) Rechne den Durchmesser $(= 2{,}5')$, dann die Seite $\left[= \sqrt{8{,}4^2 + \left(\frac{2{,}5}{2}\right)^2}\right]$ und dann nach Lehrsatz 1 Zusatz die Oberfläche.

456) Der Radius der Basis ist $= \sqrt{\frac{g}{\pi}}$, also die Seite $= \sqrt{\frac{g}{\pi} + h^2}$, folglich die Oberfläche $= g + \frac{2\pi}{2}\sqrt{\frac{g}{\pi}} \cdot \sqrt{\left(\frac{g}{\pi} + h^2\right)}$ u. s. w.

457) Der Halbmesser der Grundfläche ist $= \sqrt{s^2 - h^2}$, also die Oberfläche $= \pi(s^2 - h^2) + \frac{2\pi \cdot s}{2}\sqrt{s^2 - h^2}$ u. s. w.

Digitized by Google

458) Der Halbmesser der Basis wird $= 2{,}1'$; also ist nach Lehrs. 1 die Seite $= \frac{2 \cdot 99}{13{,}2} = 15'$ und die Höhe $= \sqrt{15^2 - 2{,}1^2}$ u. s. w.

459) Nach Lehrs. 1 ist der Umfang der Basis $= \frac{2 \cdot 427{,}04}{17}$ Suche aus dem Umfange den Halbmesser und daraus wie bei 458 die Höhe.

460) Bezeichnet s die Seite und r den Halbmesser der Basis des Kegels, so ist $s = \sqrt{(7{,}5^2 + r^2)}$, also nach Lehrs. 1: $\frac{2\pi r}{2}\sqrt{(7{,}5^2 + r^2)} = 106{,}76$ oder $r^4 + 56{,}25r^2 = 1156$.

Setzt man $r^2 = x$, so wird $x = 16$, also $r = 4'$ u. s. w.

461) Ist der Durchmesser $= x$, so ist:

$$\frac{\pi x^2}{4} + \frac{\pi x s}{2} = O \text{ oder } x^2 + 2sx = \frac{4O}{\pi} \text{ u. s. w.}$$

Die Höhe ist aber $= \sqrt{\left(s^2 - \frac{x^2}{4}\right)}$. Substituire daher den für x gefundenen Werth und reducire hierauf.

462) a) Verfahre nach der für Aufg. 461 gegebenen Andeutung.

463) Ist die Seite $= s$ und der Radius $= r$, so ist $s = \sqrt{(h^2 + r^2)}$ also nach Zus. zu Lehrs. 1:

$$\pi r^2 + \frac{2\pi r}{2}\sqrt{(h^2 + r^2)} = O \text{ oder } \pi r\sqrt{(h^2 + r^2)} = O - \pi r^2.$$

Quadrire nun beide Seiten u. s. w.

464) Befolge den für 463 angegebenen Gang.

465) Bezeichnet x den Durchmesser, so ist:

$$\frac{\pi x^2}{4} + \frac{\pi x}{2} \cdot x = O \text{ u. s. w.}$$

466) Die Höhe $=$ dem Durchmesser sei $= x$, so ist die Seite $= \sqrt{\left(x^2 + \frac{x^2}{4}\right)} = \sqrt{\frac{5x^2}{4}}$, also nach Zus. zu Lehrs. 1:

$$\frac{\pi x^2}{4} + \frac{\pi x}{2}\sqrt{\frac{5x^2}{4}} = O \text{ u. s. w.}$$

Digitized by Google

467) Ist der Durchmesser der Basis $= x$, so ist die Seite $= (x + 9{,}2)$, also nach Zus. zu Lehrs. 1:

$$\frac{\pi x^2}{4} + \frac{\pi x}{2}(x + 9{,}2) = 58{,}96 \text{ u. s. w.}$$

468) Ist der Durchmesser $= x$, so ist die Seite $\pi x + 7{,}44$, also $\frac{\pi x^2}{4} + \frac{\pi x}{2}(\pi x + 7{,}44) = 138{,}16$ u. s. w.

469) Ist der Durchmesser $= x$, so ist die Seite $= x + 6$, also: $\frac{\pi x^2}{4} + \frac{\pi x}{2}(x + 6) = 75{,}36$ u. s. w.

470) Wird der Durchmesser $= x$ gesetzt, so ist die Höhe $= 3{,}8 - x$, und die Seite $= \sqrt{\left[\frac{x^2}{4} + (3{,}8 - x)^2\right]} = \sqrt{\left(14{,}44 - 7{,}6x + \frac{5x^2}{4}\right)}$; also

$$\frac{\pi x^2}{4} + \frac{\pi x}{2}\sqrt{\left(14{,}44 - 7{,}6x + \frac{5x^2}{4}\right)} = 7{,}04, \text{ oder}$$

$$x\sqrt{(57{,}76 - 30{,}4x + 5x^2)} = 8{,}96 - x^2.$$

Erhebt man beide Seiten zum Quadrat und reducirt, so erhält man: $x^4 - 7{,}6x^3 + 18{,}92x^2 - 20{,}0704 = 0$ u. s. w.

471) Ist der Durchmesser $= x$, so ist die Höhe $= \frac{nx}{m}$ und die Seite $= \sqrt{\left(\frac{x^2}{4} + \frac{n^2x^2}{m^2}\right)}$, also

$$\frac{\pi x^2}{4} + \frac{\pi x}{2}\sqrt{\left(\frac{x^2}{4} + \frac{n^2x^2}{m^2}\right)} = 0; \text{ hieraus}$$

$$x = \sqrt{\left[\frac{4Om}{\pi(m + \sqrt{m^2 + 4n^2})}\right]} =$$

$$\sqrt{\frac{Om}{\pi n}\left[-\frac{m}{n} + \sqrt{\left(\frac{m}{n}\right)^2 + 4}\right]} \text{ u. s. w.}$$

472) Ist im ersten Falle der Halbmesser $= x$, und die Seite $= y$, so folgt:

I. $\pi x^2 + \pi xy = 13{,}345$ und

II. $\pi(x + 0{,}5)^2 + \pi(x + 0{,}5)(y + 1) = 31{,}4$; oder

I. $x^2 + xy = 4{,}25$

II. $x^2 + 2x + 0{,}5y + xy = 9{,}25$.

Multiplicire II — I mit $2x$ und ziehe I davon ab, so folgt:

Digitized by Google

$$x^2 - \frac{10}{3}x = -\frac{4,25}{3} \text{ und hieraus}$$

$x = 2^5/_6'$ oder $= 1/_2'$, demnach wäre der Durchmesser $= 5^2/_3'$ oder $= 1'$. Für den Werth $5^2/_3$ findet man aber die Seite $= -4/_3$, was unmöglich ist, folglich ist der Durchmesser $= 1'$, also die Seite $= 8'$.

b) Ueber den Kubikinhalt.

473) Nach Lehrs. 2 $= \frac{6 \cdot 8}{3}$ u. s. w.

474) bis 476) Berechne den Inhalt der Basis und verfahre dann nach Lehrs. 2.

477) Der Halbmesser der Basis wird $= 7^1/_2'$, also die Höhe $= \sqrt{25^2 - 7,5^2}$ u. s. w. nach Lehrs. 2.

478) Da der Kegel der dritte Theil eines Cylinders ist von der gleichen Grundfläche und Höhe, so ist der Abfall $= 2/_3$ des Inhalts vom Cylinder.

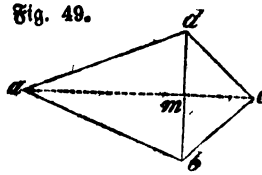
Anmerk. Man gelangt zu demselben Resultate, wenn man den Inhalt des Kegels von dem des Cylinders abzieht.

479) bis 482) Suche den Halbmesser, aus diesem und der Seite die Höhe und verfahre dann nach Lehrs. 2.

483) Es entsteht ein Kegel, dessen Basis einen Halbmesser von 1,8′ Länge hat, dessen Höhe $= 1,35'$ und dessen Seite $= \sqrt{1,8^2 + 1,35^2}$ ist.

484) Es verhält sich (Fig. 49) ac : cd = cd : mc (vergl. Abtheil I. Absch. VI. Lehrs. 6) oder:

Fig. 49.



$mc = \frac{1,35^2}{2,25} = 0,81'$, also

$md = \sqrt{(cd^2 - mc^2)} = 1,08'$. Betrachte nun den Doppelkegel abcd als aus den zwei Kegeln bda und dbc bestehend und verfahre wie oben.

485) Der Bogen des Netzes = dem Umfange der Kegelbasis $= \frac{2\pi \cdot 1,5}{3} = 3,14'$, also der Halbmesser der Basis $= 0,5'$

Digitized by Google

und die Seite des Kegels $= \sqrt{1{,}5^2 - 0{,}5^2}$, folglich der Kubikinhalt nach Lehrs. 2 u. s. w.

486) Nach Lehrs. 2 ist der Inhalt der Basis gleich dem dreifachen Kubikinhalte dividirt durch die Höhe. Aus dem Inhalte bestimme dann den Halbmesser $= \sqrt{\frac{J}{\pi}}$ u. s. w.

487) Aus Lehrs. 2 folgt: die Höhe eines Kegels ist = dem dreifachen Kubikinhalte dividirt durch den Inhalt der Basis.

488) 10 Maas $= \frac{5}{9}c'$. Bestimme nun nach der Anleitung zu 486 den Halbmesser der Basis (= 0,594′), und dann deren Umfang, welcher zugleich den Bogen des Netzsektors gibt, (= 3,73′). Der Halbmesser des Netzes ist aber = der Seite des Kegels $= \sqrt{(0{,}594^2 + 1{,}5^2)}$. Um endlich den Centriewinkel zu finden, verfahre nach den Anleitungen zu Theil I. Absch. X. Lehrs. 3.

489) 4 Maas $= \frac{2}{9}c'$. Suche nun nach Anleit. zu 487 die Höhe = 1,326′ und daraus die Seite $= \sqrt{(1{,}326^2 + 0{,}4^2)}$ u. s. w.

490) Berechne zuerst den Inhalt der ausgeworfenen Erdmasse und dann nach der Anleit. zu 487 die Höhe des Kegels.

491) Ist die Seite = x und die Höhe = y, so folgt:

$$\pi r^2 + \frac{2\pi r}{2}x = O, \text{ woraus } x = \frac{O - \pi r^2}{\pi r}; \text{ also ist}$$

$$y = \sqrt{\left[\left(\frac{O - \pi r^2}{\pi r}\right)^2 - r^2\right]} = \frac{1}{\pi r}\sqrt{O(O - 2\pi r^2)};$$

folglich der Kubikinhalt $= \frac{\pi r^2}{3} \cdot \frac{1}{\pi r}\sqrt{O(O - 2\pi r^2)}$ u. s. w.

492) Diese Aufgabe kann entweder unmittelbar nach der für Aufg. 491 angegebenen Methode, oder auch durch Substitution der betreffenden Werthe in die daselbst erhaltene Formel gelöst werden. In ersterem Falle erhält man die Seite = 31′, die Höhe = 30,74′ u. s. w.

493) Der Halbmesser der Basis $= \sqrt{\frac{g}{\pi}}$, also nach Lehrs. 1

Digitized by Google

die Seite $= \frac{2M}{2\pi\sqrt{\frac{g}{\pi}}}$ und daraus die Höhe $= \sqrt{\frac{M^2 - g^2}{\pi g}}$

Nach Lehrs. 2 ist nun der Kubikinhalt leicht zu bestimmen.

494) Die Grundfläche πr^2 ist $= O - M$, also $r = \sqrt{\frac{O-M}{\pi}}$

folglich nach Lehrs. 1 die Seite $s = \frac{2M}{2\pi r} = \frac{M}{r\pi(O-M)}$.

Da nun die Höhe $= \sqrt{s^2 - r^2}$ ist, so erhält man dafür durch Substitution der betreffenden Werthe nach hinlänglicher Reduktion den Ausdruck $\sqrt{\frac{O(2M-O)}{\pi(O-M)}}$ und nach Lehrs. 2 ist nun leicht der Kubikinhalt zu bestimmen.

495) Die Seite des Kegels ist $= \sqrt{\frac{d^2}{2}} = \frac{d}{2}\sqrt{2}$, also die Oberfläche $= \frac{\pi d^2}{4} + \frac{\pi d}{2} \cdot \frac{d}{2}\sqrt{2}$ u. s. w. und weil die Höhe $= \frac{d}{2}$, so ist der Kubikinhalt nach Lehrs. 2 $= \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{d}{2} \cdot \frac{1}{3}$ u. s. w.

496) Bestimme zuerst den Bogen des Quadranten = dem Umfange des Trichters $= 2{,}2'$, daraus die Weite $= 0{,}7'$, so ist die Tiefe $= \sqrt{1{,}4^2 - \left(\frac{0{,}7}{2}\right)^2}$ und der Kubikinhalt ist nun nach Lehrs. 2 leicht zu bestimmen. — 18 Maas $= 1^{c\prime}$ u. s. w.

497) Oberfläche $= \frac{\pi a^2}{4} + \frac{\pi a \cdot a}{2}$ u. s. w.; Kubikinhalt $= \frac{\pi a^2}{3.4}\sqrt{\left(a^2 - \frac{a^2}{4}\right)}$ u. s. w.

498) Die Weite = der Seite sei $= x$, so ist, da 27 Maas $1\frac{1}{2}\,c'$ geben, nach Lehrs. 2: $\frac{\pi x^2}{3.4}\sqrt{\left(x^2 - \frac{x^2}{4}\right)} = 1{,}5$, woraus folgt: $x = 1{,}8776'$. Den Centriewinkel des Netzsektors findet man nach Abtheil. I. Absch. X. Lehrs. 3.

499) Cylinder und Kegel haben gleiche Grundfläche und gleiche Höhe, vergl. daher die Andeut. zu 478.

Digitized by Google

500) Ist die Entfernung der Schnittfläche von der Spitze = x, und der Durchmesser derselben = y, so verhält sich $x : y = h : d$, also $x = \frac{yh}{d}$. Nun ist aber $y = \sqrt{a^2 + b^2}$, folglich $x = \frac{h}{d}\sqrt{(a^2 + b^2)}$ und der Inhalt des abzuschneidenden Kegels nach Lehrs. 2 $= \frac{\pi h}{3d} \cdot \frac{a^2 + b^2}{4}\sqrt{(a^2 + b^2)}$ u. s. w.

501) Erste Auflös. Die Höhe ist $= \sqrt{6{,}5^2 - 2{,}5^2} = 6'$, Ist der Abstand der Schnittebene von der Basis = x, und der Halbmesser des Schnitts = y, so verhält sich $6 : 2{,}5 = 6 - x : y$, woraus folgt: $6 - x = \frac{6y}{2{,}5}$. Nach der Bedingung soll aber $\frac{\pi y^2}{3}(6 - x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi \cdot 2{,}5^2 \cdot 6}{3}$ sein. Substituirt man für $6 - x$ obigen Werth, so erhält man eine Gleichung, aus der $y = 1{,}984'$ gefunden wird u. s. w.

Zweite Auflös. Der Ergänzungskegel ist dem ganzen Kegel ähnlich, also verhält sich nach Lehrs. 5: $2 : 1 = 6^3 : (6 - x)^3$ oder $\sqrt[3]{2} : 1 = 6 : 6 - x$. Hieraus findet man x u. s. w.

502) Erste Auflös. Behalten x und y die Bedeutung der Andeut. zu vorhergeh. Aufgabe bei, so verhält sich:

$$h : r = h - x : y, \text{ also } h - x = \frac{hy}{r}$$

Nach der Aufgabe soll aber $\frac{\pi y^2}{3}(h - x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi r^2 h}{3}$ sein. Substituire für $h - x$ obigen Werth u. s. w. wie in 501.

Zweite Auflös. Nach der 2. Aufl. zu Aufgabe 501 verhält sich: $\sqrt[3]{2} : 1 = h : h - x$, woraus folgt: $x = \frac{h}{2}(2 - \sqrt[3]{2})$ u. s. w.

503) Ist die Entfernung von der Spitze = x, so verhält sich nach Lehrs. 5: $m : n = x^3 : h^3$ u. s. w.

504) Es ist, wenn r den Halbmesser der Basis bezeichnet: $\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{2r}{2} = O$, also $r = \sqrt{\frac{O}{3\pi}}$, folglich nach Lehrs. 2 der Kubikinhalt $= \frac{\pi O}{3.3\pi}\sqrt{\left(\frac{4O}{3\pi} - \frac{O}{3\pi}\right)}$ u. s. w.

Digitized by Google

505) Der Durchmesser der Basis des Kegels A sei $= x$, so ist: $\frac{7\pi x^2}{3 \cdot 4} + \frac{6\pi(x-1)^2}{3 \cdot 4} = 22{,}765$ oder:

$x^2 - \frac{12}{13} \cdot x = \frac{81}{13}$. Bestimme hieraus die Durchmesser und dann die Inhalte nach Lehrs. 2.

506) Nach Lehrs. 5 verhält sich: $1{,}5^3 : 2^3 = 13{,}5 : x$ ꝛc.

507) Nach Lehrs. 5.

508) Der mit Flüssigkeit gefüllte Theil ist dem ganzen Trichter ähnlich, also beträgt die Flüssigkeit $^1/_8$ des ganzen Inhalts $= 3$ Maas.

509) Nach Lehrs. 5 folgt, wenn die Höhe des zweiten Kegels $= x$ ist: $\sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b} = x + d : x$ u. s. w.

c) Ueber das Gewicht.

510) Die Höhe ist $= \sqrt{(2{,}6^2 - 1^2)} = 2{,}4'$. Bestimme nun nach Lehrs. 2 den Kubikinhalt und dann das Gewicht (vergl. die Andeut. zu 26).

511) Suche nach Andeut. zu 33 den Kubikinhalt und dann wie in 487 die Höhe.

512) Verfahre nach der Andeut. zu 486.

513) Ist die Seite $= x$, so muß sein:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{\pi x^2}{4} \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{300}{54 \cdot 3{,}5} \text{ u. s. w.}$$

514) Der Kubikinhalt ist $= \frac{\pi b d^2 \cdot ac}{12} = \frac{89{,}53}{54 \cdot 11}$ u. s. w.

515) Setze die Höhe des einen Kegels $= x$, so ist die des andern $= \frac{nx}{m}$. Drücke nun das Gewicht eines jeden Kegels aus und setze die Summe beider Gewichte $= P$, so erhält man eine Gleichung, aus der x bestimmt werden kann.

d) Ueber den schiefen Kegel.

516) Der Durchmesser der Basis ist $=$ der Höhe $= \sqrt{\frac{10^2}{2}} = 7{,}071'$. Berechne nun den Inhalt nach Lehrs. 2.

Digitized by Google

517) Bezeichnet man die Entfernung des Fußpunktes der Höhe von der Basis mit x, so ist (vergl. Abtheil. I. Absch. IV. Lehrs. 3):

$12^2 = 10^2 + 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot x$ und hieraus $x = 3{,}5'$.

Also wird die Höhe $= \sqrt{10^2 - 3{,}5^2} = 9{,}367'$ u. s. w. nach Lehrs. 2.

518) Die Entfernung des Fußpunktes der Höhe vom Mittelpunkte der Basis ist $= \sqrt{17^2 - 15^2} = 8'$ und von dem Punkte, wo die größte Seite die Basis trifft $= \sqrt{18^2 - 15^2} = 9{,}94'$, also ist der Halbmesser der Basis $= 9{,}94 - 8 = 1{,}94'$ u. s. f.

B. Berechnung des abgekürzten Kegels.

a) Ueber die Oberfläche.

519) Der Halbmesser der größern Basis ist $=$

$$\frac{d}{2} + \sqrt{(s^2 - h^2)} \text{ u. s. w.}$$

520) Der Halbmesser der größern Basis wird $= 16'$, also ist der der kleinern $= 16 - \sqrt{13^2 - 10^2}$ u. s. w.

521) Erste Auflös. Das Netz des Mantels bildet ein concentrisches Ringstück.

Zweite Auflös. Ist die Seite des Ergänzungskegels $= x$, so folgt: $x : p = x + s : P$, also $x = \frac{ps}{Ps}$. Zieht man nun den Mantel des Ergänzungskegels von dem des ganzen Kegels ab, so bleibt der Mantel des abgekürzten Kegels. Man erhält:

Mantel $= \frac{P}{2}(x + s) - \frac{p}{2}x$ oder, wenn man den Werth von x substituirt $= \frac{s}{2} \cdot \frac{P^2 - p^2}{P - p} = \frac{P + p}{2} \cdot s$.

522) Verfahre nach der Anleit. zu 521.

523) Suche die Umfänge der Grundflächen und verfahre dann nach 521.

524) Suche den Mantel nach 521, und addire dazu die Inhalte der beiden Grundflächen.

Digitized by Google

525) Verfährt man wie bei Aufg. 524, so folgt:

$$\text{Oberfläche} = \pi R^2 + \pi r^2 + \frac{2\pi R + 2\pi r}{2} \cdot s \text{ u. s. w.}$$

526) Vergl. 525.

527) Die Differenz der beiden Radien, die Seite und die Höhe bilden ein rechtwinkliges Dreieck, also ist die Seite $= \sqrt{2{,}4^2 - 1^2}$ u. s. w.

528) Nach Lehrs. 6 ist: $\frac{40{,}5 + 28{,}75}{2} \cdot s = 1246{,}5$, woraus die Seite s bestimmt werden kann.

529) Suche die Umfänge und verfahre dann wie in vorhergehender Aufgabe.

530) Ziehe die Summe der beiden Grundflächen von der Oberfläche ab und verfahre dann nach 521.

531) Verfahre nach der für 530 gegebenen Anleitung.

533) Ist der Durchmesser der kleinern Basis $= x$, so ist: $\frac{\pi D^2}{4} + \frac{\pi x^2}{4} + \frac{\pi D + \pi x}{2} \cdot s = O$ (vergl. 524), oder

$$x^2 + 2sx = \frac{4O}{\pi} - D^2 - 2Ds \text{ u. s. w.}$$

534) Bezeichnen R und r die Radien der Grundflächen, so erhält man man die Gleichungen:

$$\text{I.} \quad \pi R^2 + \pi r^2 = 43{,}96 - 30{,}615$$

$$\text{II.} \quad \frac{2\pi R + 2\pi r}{2} \cdot 3{,}9 = 30{,}615 \text{ (Lehrs. 6)}$$

oder auch:

$$\text{I.} \quad R^2 + r^2 = 4{,}25$$

$$\text{II.} \quad R + r = 2{,}5 \text{ u. s. w.}$$

535) Der eine Radius sei $= x$, so ist der andere $= x - 3$, also nach Lehrs. 6: $\frac{2\pi x + 2\pi(x-3)}{2} \cdot 4 = 44$ u. s. w.

536) Setze die Durchmesser $= 5x$ und $3x$ und die Seite $= 4x$, so ist: $\frac{\pi(5x)^2}{4} + \frac{\pi(3x)^2}{4} + \frac{\pi \cdot 5x + \pi \cdot 3x}{2} \cdot 4x$

Digitized by Google

$= 307{,}72$ (vergl. 525); hieraus findet man $x = 2'$, also ist der größere Durchmesser $= 5 \cdot 2 = 10'$ u. s. w.

537) Der größere Durchmesser sei $= x$, so ist der kleinere $= 4 - x$ und $\frac{\pi x^2}{4} + \frac{\pi(4-x)^2}{4} + \frac{\pi x + \pi(4-x)}{2} 5 = 39{,}25$ oder: $x^2 - 4x = -3$ u. s. w.

538) Die Radien seien $= 2x$ und $7x$, die Höhe $= 12x$, so ist die Seite (vergl. Andeut. 527) $= \sqrt{(12x)^2 + (5x)^2} = 13x$, also: $\pi(7x)^2 + \pi(2x)^2 + \frac{2\pi \cdot 7x + 2\pi \cdot 2x}{2} \cdot 13x = 533{,}8$ ꝛc.

539) Der größere Radius sei $= x$, so ist der kleinere $= 6 - x$ und die Seite $= x + 3$, also

$$\pi x^2 + \pi(6-x)^2 + \frac{2\pi x + 2\pi(6-x)}{2}(x+3) = 194{,}68$$

oder: $x^2 - 3x = 4$ u. s. w.

b) Ueber den Kubikinhalt.

540) Erste Auflös. Betrachtet man in Aufg. 289 G und g als Kreise, deren Radien R und r sind, so verwandelt sich jene Formel in folgende:

$$\text{Kubikinhalt} = \frac{h}{3}\left(\pi R^2 + \pi r^2 + \sqrt{\pi R^2 \cdot \pi r^2}\right) \text{ oder}$$

$$= \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + R \cdot r).$$

Zweite Auflös. Man ziehe den Kubikinhalt des Ergänzungskegels von dem des vollständigen Kegels ab.

Ist die Höhe des erstern $= x$, so verhält sich:

$$x : r = h : R - r, \text{ woraus } x = \frac{r \cdot h}{R - r}.$$

Also ist der Kubikinhalt des abgekürzten Kegels $=$

$$\frac{\pi R^2}{3}\left(h + \frac{r \cdot h}{R - r}\right) - \frac{\pi r^2}{3} \cdot \frac{rh}{R - r} \text{ (vergl. Lehrs. 2) oder}$$

$$= \frac{\pi h}{3} \cdot \frac{R^3 - r^3}{R - r} = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2).$$

Digitized by Google

541) bis 547) Bestimme jedesmal die Halbmesser der Grundflächen, wenn diese nicht schon gegeben sind, und substituire dann die betreffenden Werthe in die Formel der Aufg. 540, oder im Falle diese nicht angewendet werden soll, befolge den bei der Herleitung dieser Formel eingeschlagenen Weg.

548) Dieser Cylinder hat die kleinere Grundfläche zur Basis und die Höhe des Kegels zur Höhe. Den Abfall findet man leicht durch Subtraktion der Inhalte beider Körper (vergl. §. 11 Lehrs. 3).

549) Der Durchmesser der kleinern Basis ist $= 2{,}5'$, also die Seite des eingeschriebenen Quadrats $= \sqrt{\frac{2{,}5^2}{2}} = \sqrt{3{,}125}$

Ziehe nun den Inhalt des Parallelepipeds, das mit dem abgekürzten Kegel gleiche Höhe hat, von dem Inhalte des Kegels ab, so gibt die Differenz den Abfall.

550) Aus dem in der Anleit. 527 angeführten Dreieck folgt die Höhe $= \sqrt{5{,}2^2 - 2^2} = 4{,}8'$ und der Kubikinhalt wird nun nach 540 gefunden.

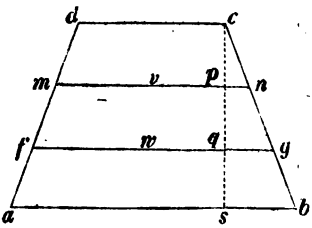
551) Die Höhe wird $= \sqrt{[s^2 - (R-r)^2]}$ (vergl. 527) ꝛc.

552) Suche die Radien der beiden Grundflächen und verfahre dann nach der Anleit. zu Aufg. 550.

553) Der Durchmesser des Schnittes ist $= \frac{8+6}{2} = 7'$ und die Inhalte der beiden Theile lassen sich nun nach 540 finden.

554) Es ist (Fig. 50) $pn = \frac{R-r}{3}$ und $qg = \frac{2(R-r)}{3}$

Fig. 50.



also ist der Radius $vn = r + \frac{R-r}{3} = \frac{2r+R}{3}$ und $wg = r + \frac{2(R-r)}{3} = \frac{2R+r}{3}$. Man erhält daher nach Aufg. 540: Kubikinhalt abgf $= \frac{\pi h}{9}\left[\left(\frac{2R+r}{3}\right)^2 + R^2 + \left(\frac{2R+r}{3}\right)R\right]$

$= \frac{\pi h}{81}(19R^2 + r^2 + 7Rr)$.

Digitized by Google

$$\text{Inhalt fgnm} = \frac{\pi h}{9}\left[\left(\frac{2R+r}{3}\right)^2 + \left(\frac{2r+R}{3}\right)^2 + \left(\frac{2R+r}{3}\right)\left(\frac{2r+R}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{\pi h}{81}\left(7(R^2 + r^2) + 13Rr\right) \text{ und}$$

$$\text{Inhalt mned} = \frac{\pi h}{9}\left[\left(\frac{2r+R}{3}\right)^2 + r^2 + \frac{(2r+R)r}{3}\right]$$

$$= \frac{\pi h}{81}(R^2 + 19r^2 + 7Rr).$$

556) Nach 540 ist $\frac{\pi h}{3}(0{,}4^2 + 0{,}5^2 + 0{,}4 \cdot 0{,}5) = 0{,}9577$, woraus nun h zu bestimmen ist.

557) Nach 540 ist $\frac{\pi \cdot 18}{3}(6^2 + 6x + x^2) = 1186{,}92$. Bestimme nun aus dieser Gleichung den Halbmesser x.

558) Bestimme den Halbmesser der gegebenen Basis, suche dann, wie bei Aufg. 557, den der andern Grundfläche und berechne daraus deren Umfang.

559) Nach 540 ist $\frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2) = k$, oder

$$r^2 + Rr = \frac{3k - \pi h R^2}{\pi h},$$

woraus sich r leicht bestimmen läßt.

560) Verfahre auf dieselbe Weise wie bei vorhergeh. Aufgabe.

561) Ist der Abstand der Schnittfläche von der größern Basis $= x$ und der Halbmesser des Schnittkreises $= y$, so verhält sich: $h : R - r = h - x : y - r$, woraus folgt: $h - x = \frac{h(y-r)}{R-r}$. Nun soll aber nach der Aufgabe die Gleichung gelten:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2) = \frac{\pi(h-x)}{3}(y^2 + ry + r^2).$$

Substituirt man für $h - x$ obigen Werth und reducirt, so erhält man $y = \sqrt[3]{\frac{R^3 + r^3}{2}}$ und x ist nun leicht durch Substitution des Werthes von y in obige Proportion zu finden.

563) Ist der größere Radius $= x$, so ist der andere $= 9 - x$, folglich nach 540: $\frac{\pi \cdot 14}{3}\left(x^2 + (9-x)^2 + x(9-x)\right) = 924$ ꝛc.

Digitized by Google

564) Ist der eine Durchmesser $= x$, der andere $= x - 0{,}2$, so wird nach 540: $\frac{\pi \cdot 1{,}2}{3}\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-0{,}2}{2}\right)^2 + \frac{x}{2} \cdot \frac{x-0{,}2}{2}\right]$ $= 0{,}46475$ u. s. w.

565) Die Radien seien $= 2x$ und $3x$, die Höhe $= 6x$, so folgt nach Aufg. 540:

$$\frac{\pi \cdot 6x}{3}\left((2x)^2 + (3x)^2 + 2x \cdot 3x\right) = 14{,}915.$$

Man findet hieraus $x = 0{,}5$, also die Radien $= 2 \cdot 0{,}5 = 1'$ und $3 \cdot 0{,}5 = 1{,}5'$, und die Höhe $= 6 \cdot 0{,}5 = 3'$.

566) Der Radius der kleinern Basis sei $= x$, so ist der Durchmesser der größern $= x + 7$ und die Höhe $= x + 9$, also nach 540: $\frac{\pi(x+9)}{3}\left[\left(\frac{x+7}{2}\right)^2 + x^2 + x\left(\frac{x+7}{2}\right)\right] = 615{,}44$,

oder: $x^3 + 13x^2 + 43x - 273 = 0$.

Substituirt man $x = y - \frac{13}{3}$, so erhält man die Gleichung: $y^3 - \frac{40}{3}y - \frac{8008}{27} = 0$ und hieraus findet man durch Anwendung der cardanischen Formel: $y = \frac{22}{3}$, also ist $x = \frac{22}{3} - \frac{13}{3} = 3'$ u. s. w.

c) Ueber das Gewicht.

567) Rechne nach 540 den Kubikinhalt und hieraus das Gewicht (vergl. Andeut. 26).

568) Nach Aufg. 540 ist: $\frac{\pi h}{3}(0{,}4^2 + 0{,}3^2 + 0{,}4 \cdot 0{,}3) = \frac{90{,}35}{54 \cdot 7{,}2}$ (vergl. Andeut. 33).

569) Berechne zuerst den Halbmesser des Wasserspiegels $= 0{,}5 + (0{,}6 - 0{,}5)\frac{3}{4} = 0{,}575'$, dann die Höhe des Wasserkegels $= 2{,}4 \cdot \frac{3}{4} = 1{,}8'$ und hieraus nach Aufg. 540 den Kubikinhalt und das Gewicht des Wassers.

570) Der Durchmesser ab (Fig. 51) des Wasserspiegels ist $\frac{1 + 0{,}6}{2} = 0{,}8'$; ferner verhält sich, wenn das Wasser durch

Digitized by Google

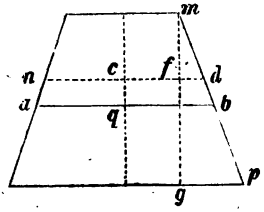
durch das Eintauchen bis nd stieg:

md : gp = mf : fd, also fd = 0,0833...'

folglich cd = 0,3833...'

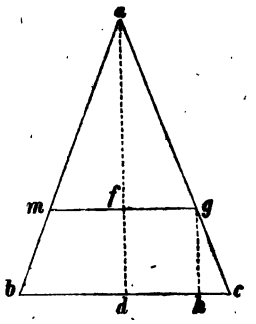
Nun ist der Inhalt abdn (nach Aufg. 540) $= \frac{\pi \cdot cq}{3}(qb^2 + cd^2 + qb \cdot cd)$ $= 0{,}048175\,c'$. Dies ist aber auch der Inhalt des eingelegten Körpers, und bezeichnet man daher dessen spec. Gewicht mit x, so ist $54 \cdot 0{,}048175 \cdot x = 6$, also $x = 2{,}3$.

Fig. 51.



571) Das Gewicht des ganzen Kegels abc (Fig. 52) ist = 101,736 ℔, das Gewicht des über den Wasserspiegel mg hervorragenden Theils mga $= \frac{\pi \cdot fg^2 \cdot af \cdot 54 \cdot 0{,}6}{3}$ $= 33{,}912\,fg^2 \cdot af$. Aus den ähnlichen Dreiecken adc und ghc folgt:

Fig. 52.



$gh = ad(dc - fg) = 3(1 - fg)$;

also ist das Gewicht des verdrängten Wassers begm =

$\frac{54 \cdot \pi \cdot 3(1-fg)}{3}(1 + fg^2 + fg)$ und man erhält die Gleichung:

$$\frac{54 \cdot \pi \cdot 3(1-fg)}{3}(1 + fg^2 + fg) = 101{,}736 \text{ oder}$$

$$(1 - fg)(1 + fg^2 + fg) = 0{,}6.$$

Bestimme hieraus fg, dann hc und endlich aus dem rechtwinkligen Dreiecke ghc den Abstand cg.

572) Suche wie für Aufg. 568 die Höhe des 100 ℔ schweren Gewichtes (= 0,5977'). Bezeichnen nun R und r die Radien und h die Höhe des andern Gewichtes, so verhält sich:

1) $100 : 12\frac{1}{2} = 0{,}3^3 : r^3$; $r = 0{,}15'$.

2) $0{,}15 : 0{,}3 = R : 0{,}4$; $R = 0{,}2'$.

3) $0{,}2 : h = 0{,}4 : 0{,}5977$; $h = 0{,}2988'$.

Digitized by Google

§. 13. Aufgaben über die Berechnung der Kugel und der Kugeltheile.

Lehrsätze.

1) Die Oberfläche einer Kugel ist a) gleich dem vierfachen Inhalte eines größten Kreises, oder b) gleich dem Quadrate des Durchmessers multiplicirt mit der Verhältnißzahl (π); also: $O = 4\pi r^2$ oder $= \pi d^2$.
2) Der Kubikinhalt einer Kugel ist gleich dem dritten Theile des Produktes aus der Oberfläche und dem Halbmesser; also $=$
$$\frac{O \cdot r}{3} = \frac{\pi d^3}{6} = \frac{4\pi r^3}{3}.$$
3) Die Oberflächen zweier Kugeln verhalten sich wie die Quadrate ihrer Radien oder Durchmesser.
4) Die Inhalte zweier Kugeln verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer Radien oder Durchmesser.
5) Der Flächeninhalt einer Kugelhaube oder auch eines Kugelgürtels ist gleich dem Produkte aus dem Umfange des größten Kreises und der Höhe der Fläche.
6) Der Kubikinhalt eines Kugelsektors ist gleich dem Inhalte der zugehörigen Haube multiplicirt mit dem dritten Theile des Halbmessers der Kugel.

A. Berechnung der ganzen Kugel.

a) Ueber die Oberfläche.

573) Nach Lehrs. 1 a) ist die Oberfläche $= 4\pi r^2$, also für a) $= 4\pi \cdot 4^2$ u. s. w.

574) Nach Lehrs. 1 b) $= \pi d^2$, also für a) $= \pi \cdot 3{,}8^2$ ꝛc.

575) Suche zuerst den Durchmesser und dann nach Lehrs. 1 b) die Oberfläche der Kugel.

576) Nach Lehrs. 1 b).

577) Nach Lehrs. 1 $= \frac{4\pi r^2}{2} + \pi r^2$ u. s. w.

578) Nach Lehrs. 1 a).

579) Die Höhe h eines Seitendreiecks ist $= \frac{s}{2}\sqrt{3}$, der Halbmesser des um dieses Dreieck beschriebenen Kreises $= \frac{2}{3}h$, und der des eingeschriebenen $= \frac{1}{3}h$. Bezeichnen ferner R und r

*) Wenn man nämlich für O die Werthe aus Lehrs. 1 substituirt.

Digitized by Google

die Radien der um und in das Tetraeder beschriebenen Kugel, so ist: I. $(R+r)^2 = s^2 - \left(\frac{2}{3}h\right)^2$ und II. $\left(\frac{2}{3}h\right)^2 = R^2 - r^2$, oder wenn man obigen Werth von $h = \frac{s}{2}\sqrt{3}$ in I. substituirt: III. $(R+r)^2 = s^2 - \frac{4}{9} \cdot \frac{3s^2}{4}$, also IV. $R + r = s\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Aus II. ist: $R^2 - r^2 = \frac{4}{9} \cdot \frac{3s^2}{4} = \frac{s^2}{3}$. Dividirt man diese Gleichung in III. so folgt: $\frac{R+r}{R-r} = 2$ oder

V. $R - r = \frac{1}{2}(R+r) = \frac{s}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}$ (aus IV.)

Addirt man III. und V., so erhält man $R = \frac{3s}{4}\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{s}{4}\sqrt{6}$ und subtrahirt man diese, so wird $r = \frac{s}{4}\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{s}{12}\sqrt{6}$.

Demnach wird nach Lehrs. 1 a) die Oberfläche der umgeschriebenen Kugel $= 4\pi\left(\frac{s}{4}\sqrt{6}\right)^2 = \frac{3}{2}\pi s^2$ und die der eingeschriebenen $= 4\pi\left(\frac{s}{12}\sqrt{6}\right)^2 = \frac{1}{6}\pi s^2$.

580) Nach der Andeut. zu Aufg. 579 ist $2 = \frac{s}{2}\sqrt{6}$, also die Seite s des eingeschriebenen Tetraeders $= \frac{4}{\sqrt{6}}$.

Berechne nun nach Lehrs. 1 die Oberfläche der Kugel und nach Aufg. 321 die des Tetraeders u. s. w.

581) Die Seite des Würfels wird 1,5′ (vergl. §. 4 Lehrs. 2), also die Diagonale = dem Durchmesser $= \sqrt{3} \cdot 1{,}5^2$ u. s. w. nach Lehrs. 1.

582) Eine Seite des Oktaeders bildet mit den zwei nach den beiden Endpunkten derselben gehenden Radien ein rechtwinkliges Dreieck, so daß also $R^2 + R^2 = s^2$ oder $R = \frac{s}{2}\sqrt{2}$ ist; folglich wird nach Lehrs. 1 a) die Oberfläche der umgeschriebenen Kugel $= 4\pi \cdot \frac{s^2}{2} = 2\pi s^2$.

Digitized by Google

Um den Radius r der eingeschriebenen Kugel zu finden, hat man, da dieser in $^2/_3$ der Höhe h einer Seitenfläche diese trifft: $r^2 = R^2 - (\frac{1}{3}h)^2 = \frac{1}{6}s^2$, also $r = \frac{s}{6}\sqrt{6}$; daher ist b) die Oberfläche der eingeschriebenen Kugel $= \frac{2}{3}\pi s^2$.

583) Nach der Andeutung zu Aufg. 352 ist der Halbmesser der umschriebenen Kugel $= \frac{s}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$, also a) die Oberfläche derselben $= 4\pi \cdot \frac{s^2}{4}\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{\pi s^2}{2}(5+\sqrt{5})$ $= 11{,}3605 \cdot s^2$.

Ferner ist nach der angeführten Andeutung der Halbmesser r der eingeschriebenen Kugel $= \frac{s}{2}\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{6}}$, also b) die Oberfläche dieser $= 4\pi \cdot \frac{s^2}{4}\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{6}\right) = \frac{\pi s^2}{6}(7+3\sqrt{5}) =$ $7{,}174 \cdot s^2$.

584) Nach der Andeutung zu Aufg. 345 ist der Halbmesser R der umgeschriebenen Kugel $= \frac{s}{2}\sqrt{\frac{9+3\sqrt{5}}{2}}$, also die Oberfläche derselben $= \frac{\pi s^2}{2}(9+3\sqrt{5}) = 24{,}662 \cdot s^2$.

In derselben Andeutung wurde gezeigt, daß $r = \frac{s}{4}\sqrt{\frac{50+22\sqrt{5}}{5}}$ ist; also ist die Oberfläche der eingeschriebenen Kugel $= \frac{\pi s^2}{10}(25+11\sqrt{5}) = 15{,}573 \cdot s^2$.

585) Nach Lehrs. 1 ist $\pi d^2 = O$, also $d = \sqrt{\frac{O}{\pi}}$, wonach die Zahlenbeispiele leicht zu lösen sind.

586) Addire die Oberflächen beider (Lehrs. 1) und verfahre dann nach Andeut. 585.

587) Vergl. die Andeut. und das Resultat zu Aufg. 579.

588) Suche nach Andeut. 585 den Durchmesser der Kugel, so ist, wenn x die Seite des Würfels bezeichnet: $3x^2 = d^2$. Bestimme nun x und dann den Kubikinhalt des Würfels $= x^3$.

Digitized by Google

589) Vergl. die Andeut. und das Resultat b) zu Aufg. 582.

590) Ist der Durchmesser $= x$, so muß $\pi x = x + 2{,}14$ sein. Suche hieraus x und dann nach Lehrs. 1 die Oberfläche.

591) Der Radius der einen Kugel sei $= x$, so ist der der andern $= x + 0{,}5$; also (vergl. Lehrs. 1):

$$4\pi x^2 + 4\pi(x + 0{,}5)^2 = 78{,}5 \text{ oder } x^2 + 0{,}5x = 3.$$

Bestimme hieraus die Radien und dann die Oberflächen.

592) Der Durchmesser sei $= x$, so ist: $\pi x^2 = \frac{\pi x^2}{4} + a$ u. s. w.

593) Bezeichnet x den Durchmesser der einen Kugel, so ist der der andern $= S - x$, also (vergl. Lehrs. 1):

$$\pi x^2 + \pi(S - x)^2 = O \text{ u. s. w.}$$

594) Der Halbmesser sei anfänglich $= x$ gewesen, so muß $4\pi(x + 0{,}5)^2 - 4\pi x^2 = 15{,}7$ sein u. s. w.

595) Bezeichnet x die Seite des Würfels, so ist:

$$6x^2 = \pi(x + 0{,}8)^2 \text{ u. s. w.}$$

b) Ueber den Kubikinhalt.

596) Bezeichnet r den Halbmesser der Kugel, so ist der Kubikinhalt derselben nach Lehrs. 2) $= \frac{4\pi r^3}{3}$, wonach sich die Zahlenbeispiele leicht lösen lassen. So ist also z. B. für a) der Kubikinhalt $= \frac{4 \cdot \pi \cdot 2{,}4^3}{3}$ u. s. w.

597) Ziehe den Kubikinhalt $\left(= \frac{\pi d^3}{6}\right)$ des hohlen Raumes von dem Inhalte der ganzen Kugel ab (vergl. Lehrs. 2).

598) Oberfläche $= \pi d^2$ (Lehrs. 1); Kubikinhalt $= \frac{\pi d^3}{6}$ (Lehrs. 2).

599) Suche zuerst den Durchmesser $\left(= \frac{U}{\pi}\right)$ und dann nach Lehrs. 2 den Kubikinhalt der Kugel.

600) Suche wie für Aufg. 585 den Durchmesser und dann den Kubikinhalt nach Lehrs. 2.

Digitized by Google

601) Nach Lehrs. 1 ist $\pi D^2 = O$, also $D = \sqrt{\frac{O}{\pi}}$ und der Kubikinhalt $= \frac{\pi D^3}{6}$ (Lehrs. 2) u. s. w.

603) Nach Lehrs. 2.

604) Berechne zuerst den Halbmesser $\left(= \sqrt{\frac{78,5}{\pi}}\right)$ und dann nach Lehrs. 2 den Kubikinhalt.

605) Ist z. B. die Oberfläche beider Körper $= O$, so ist der Inhalt des Würfels $= \frac{O}{6}\sqrt{\frac{O}{6}}$; der Inhalt der Kugel ist nach Aufg. 601 $= \frac{O}{6}\sqrt{\frac{O}{\pi}}$. Bilde nun hieraus eine Proportion u. s. w.

606) Rechne den Kubikinhalt der halben Kugel nach Lehrs. 2 ꝛc.

607) Das Verhältniß ist nach Lehrs. 2 wie

$$\frac{\pi a^3}{6} : \frac{\pi (2a)^3}{6} : \frac{\pi (3a)^3}{6} : \frac{\pi (4a)^3}{6} : \frac{\pi (na)^3}{6} \text{ u. s. w.}$$

608) Setze den Halbmesser der Kugel $= x$, so ist die Seite des Würfels $= 2x$, also $3(2x)^2 = 1,2^2$, und hieraus $x = 0,3464$. Suche nun nach Lehrs. 2 den Kubikinhalt.

609) Nach der Andeut. zu Aufg. 579 ist $R = \frac{s}{4}\sqrt{6}$. Bestimme hieraus die Seite s, dann nach Aufg. 327 den Inhalt des Tetraeders und ziehe diesen von dem Kubikinhalte der Kugel ab.

610) Bestimme den Halbmesser R der Kugel und daraus den Kubikinhalt derselben. Nach Andeut. zu Aufg. 582 ist ferner $R = \frac{s}{2}\sqrt{2}$; bestimme hieraus s und dann nach Aufg. 341 den Kubikinhalt des Oktaeders u. s. w.

611) Suche nach der Andeut. zu 352 den Radius R, daraus den Kubikinhalt der Kugel und dann nach Aufg. 352 den des Ikosaeders u. s. w.

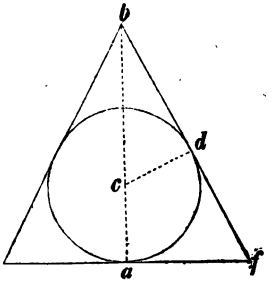
612) Suche aus dem Werthe für R in der Andeut. zu Aufgabe 345 die Seite s, und dann nach Aufg. 345 den Kubikinhalt des Dodekaeders u. s. w.

Digitized by Google

613) Die Höhe des Kegels $= r\sqrt{3}$, also der Halbmesser der Kugel $= \frac{r\sqrt{3}}{3}$ u. s. w. (vergl. §. 12 Lehrs. 2).

614) In dem rechtwinkligen △ bcd (Fig. 53) ist $bd = \sqrt{bc^2 - cd^2} = 0{,}8485$, ferner verhält sich, da △ afb ∽ △ bcd, bd : cd = ba : af, also af = 0,424 und die Inhalte beider Körper sind nun leicht zu bestimmen.

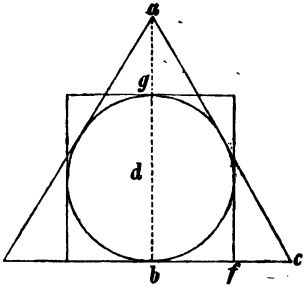
Fig. 53.



615) Bezeichnet man den Radius der Kugel mit r, so verhalten sich (Fig. 54) die Mantelflächen wie: $2\pi r \cdot 2r : 2\pi \cdot bc \cdot \frac{ac}{2} : 4\pi r^2$. Substituire nun für $bc = \frac{ac}{2} = r\sqrt{3}$, reducire u. s. w.

Verfahre auf ähnliche Weise, um das Verhältniß der Oberflächen und Inhalte zu finden.

Fig. 54.



616) Die Seite des Kegels ist $= r\sqrt{5}$ u. s. w. wie bei vorhergeh. Aufgabe.

617) Der Radius der einen Kugel sei $= x$, so ist der der andern $= x + 1$, also: $4\pi(x+1)^2 - 4\pi x^2 = 62{,}8$. Bestimme hieraus die Radien und dann den Inhalt einer jeden der beiden Kugeln.

618) Nach Lehrs. 2 wird der Durchmesser $= \sqrt[3]{\frac{6 \cdot J}{\pi}}$ u. s. w.

619) Dividire den Inhalt unserer Erde durch 50 und verfahre dann wie bei 618.

620) Drücke die Ohm in Kubikfußen aus u. s. w. (s. 618).

Digitized by Google

621) Die Seite des Würfels ist $= \sqrt[3]{J}$ und der Durchmesser der Kugel $= \sqrt[3]{\frac{6J}{\pi}}$, wenn J den Inhalt bezeichnet; also verhalten sich die Oberflächen wie $6\sqrt[3]{J^2} : \pi\left(\sqrt[3]{\frac{6J}{\pi}}\right)^2$ oder wie $6 : \sqrt[3]{36\pi} = \sqrt[3]{6\pi^2} : \pi$.

622) Die Summe der Inhalte ist $= \frac{\pi}{6}(d^3 + d'^3 + d''^3)$. Suche nun den Durchmesser einer Kugel, welche diesen Inhalt hat.

623) Vergl. Andeut. 622.

624) Suche nach Andeut. 618 den Durchmesser und dann nach Lehrs. 1 die Oberfläche.

625) Nach dem Resultate zu 331 ist der Kubikinhalt des Tetraeders $= \frac{h^3}{8}\sqrt{3}$ u. s. w.

626) Nach Lehrs. 4 verhält sich: $m : n = D^3 : x^3$ u. s. w.

627) Nach Lehrs. 4 verhält sich:

$\sqrt[3]{m} : \sqrt[3]{n} = D : d$, und nach Lehrs. 3:

$D^2 : d^2 = O : o$, folglich auch

$O : o = \sqrt[3]{m^2} : \sqrt[3]{n^2}$.

628) Sind D und d die Durchmesser beider Kugeln, so verhält sich nach Lehrs. 3:

$m : n = D^2 : d^2$ und nach Lehrs. 4:

$J : i = D^3 : d^3$, also auch:

$J : i = m\sqrt{m} : n\sqrt{n}$.

629) Der Radius der größern Kugel sei $= x$, so ist der der kleinern $= 1 - x$, also nach Lehrs. 2:

$$\frac{4\pi x^3}{3} + \frac{4\pi(1-x)^3}{3} = 1{,}172 \text{ u. s. w.}$$

630) Die Durchmesser der Kugeln seien D und d, so ist:

I. $\pi D^2 - \pi d^2 = 16{,}94$ (Lehrs. 1)

II. $\frac{125\pi D^3}{6} = \frac{216\pi d^3}{6}$ (Lehrs. 2), oder:

I. $D^2 - d^2 = 5{,}39$

II. $5D = 6d$ u. s. w.

Digitized by Google

631) Man erhält: $\frac{\pi(x+0,6)^3}{6} - \frac{\pi x^3}{6} = 2,148$ u. s. w. (Lehrs. 2).

632) Suche den Halbmesser der ganzen Kugel (nach Lehrs. 1), dann den der Höhlung (Lehrs. 2) u. s. w.

633) Setze den Durchmesser der Kugel $= x$, so ist der des hohlen Raumes $= x - 1$, und man erhält die Gleichung:

$$\frac{\pi}{6}\left(x^3 - (x-1)^3\right) = 9,944 \text{ u. s. w.}$$

c) Ueber das Gewicht.

634) bis 636) Bestimme wie bisher den Kubikinhalt und daraus das Gewicht.

637) Addire das Gewicht des Glases und das des Wassers.

638) Der Kubikinhalt ist $= \frac{48}{54 \cdot 7,2}$ (vergl. 33) u. s. w. nach Anleit. 618.

639) Rechne das Gewicht einer Bleikugel von 5 Linien Durchmesser und dividire damit in 316,5 ℔.

640) Vergl. Andeut. 638.

641) Vergl. Andeut. 639.

642) Der Halbmesser der ganzen Kugel sei $= x$, so ist:

$$\frac{4\pi(x^3 - 0,8^3)}{3} = \frac{772,29}{7 \cdot 54} \text{ u. s. w.}$$

643) Der Halbmesser der Höhlung sei $= x$, so ist:

$$\frac{4\pi(0,8^3 - x^3)}{3} = \frac{50}{8 \cdot 54} \text{ u. s. w.}$$

644) Der Durchmesser der Kugel vom spec. Gewichte $= 5$ sei $= x$, so ist der der andern $= 2x$ und

$$\frac{\pi(2x)^3}{6} \cdot 54 \cdot 4 + \frac{\pi x^3}{6} \cdot 54 \cdot 5 = 28231,75$$

oder $(2x)^3 \cdot 4 + 5x^3 = 999$ u. s. w.

645) Der Durchmesser sei $= x$, so ist:

$$\frac{\pi(x^3 - 0,3^3)}{6} = \frac{37,388}{7 \cdot 54} \text{ (vergl. 33) u. s. w.}$$

Digitized by Google

646) Von A seien x ℔ und von B y ℔ in der Legirung, so ist: I. $x + y = 200$

II. $\frac{x}{54.7} + \frac{y}{54.8} = \frac{\pi . 1^3}{6}$ u. s. w.

647) Vergl. Andeut. 26.

648) Da sich die Durchmesser der 3 Kugeln nach Lehrs. 4 wie $\sqrt[3]{1} : \sqrt[3]{8} : \sqrt[3]{27}$ oder wie 1 : 2 : 3 verhalten, so setze diese = x, 2x und 3x, und alsdann

$$\frac{\pi x^3}{6} + \frac{\pi (2x)^3}{6} + \frac{\pi (3x)^3}{6} = \text{dem Gewichte der 4 Kugeln.}$$

Bestimme hieraus x und dann die andern Durchmesser.

649) Suche das Gewicht des Würfels, hieraus die Anzahl der Schrote und endlich aus dem Gewichte eines Korns = $\frac{1}{100}$ Loth = $\frac{1}{3200}$ ℔ den Durchmesser.

650) Der Durchmesser der Höhlung sei = x, so ist

$$\frac{\pi . 54 . 8{,}8 (2^3 - x^3)}{6} = \frac{\pi . 2^3 . 54}{6}$$ u. s. w.

651) Bezeichnet man den Radius des hohlen Raumes mit x, so ist

$$\left(\frac{4\pi . 1^3}{3} - \frac{4\pi x^3}{3}\right) 54 . 8 + \frac{4\pi x^3}{3} . 54 = 998.$$

Hieraus folgt $x = 0{,}8'$, also die Wandstärke = 2″.

B. Berechnung der Kugeltheile.

1) Berechnung der Kugelhaube.

652) Nach Lehrs. 5 $= 2\pi . 4{,}5 . 2 = 56{,}52 \square'$.

653) Die Entfernung der Schnittebene vom Mittelpunkte der Kugel sei = x, so ist: $x^2 = 1{,}6^2 - 0{,}8^2$, also $x = 1{,}385'$ und die Höhe der Haube = 0,215′ u. s. w. nach Lehrs. 5.

Anmerkung. Die Höhe h der Haube kann auch durch die Proportion $h : 0{,}8 = 0{,}8 : 3{,}2 - h$ gefunden werden.

654) Befolge den in der Andeut. 653 gezeigten Gang.

656) Der Halbmesser der Kugel ist $= \sqrt{(a^2 + r^2)}$, also die Höhe der Haube $= \sqrt{a^2 + r^2} - a$ u. s. w. nach Lehrs. 5.

658) Ist der Halbmesser = x, so muß nach Lehrs. 5

$2\pi . x . 1{,}4 = 21{,}98$ sein u. s. w.

Digitized by Google

659) Die Entfernung der Schnittfläche vom Kugelmittelpunkte sei = x, so ist nach Lehrs. 5: $2\pi . 2,6 (2,6 - x) = 26,13$, woraus folgt: $x = 1'$, also ist der Radius des Durchschnittskreises = $\sqrt{(2,6^2 - 1^2)}$ u. s. w.

660) Die Höhe der Haube sei = x, der Halbmesser der Kugel = y, so ist der Halbmesser des Begrenzungskreises = $\frac{2,1 + x}{2}$ und I. $2\pi y . x = 9,6$ (nach Lehrs. 5). Bestimmt man nun aus dem rechtwinkligen Dreiecke, das y, $y - x$ und $\frac{2,1 + x}{2}$ mit einander bilden, den Radius y, substituirt diesen Werth in I. und reducirt, so erhält man zuletzt die Gleichung: $x^2 + 0,84x = 1,566\ldots$ u. s. w.

661) Ist der Halbmesser des Durchschnittes = x, so ist der der Kugel = $\sqrt{2x^2}$, also nach Lehrs. 5:

$$2\pi x \sqrt{2} (x\sqrt{2} - x) = 14,71 \text{ u. s. w.}$$

662) Der Radius der Kugel sei = x, so ist die Höhe der Haube = $x - 2$, also nach Lehrs. 5: $2\pi x (x - 2) = 18,84$ u. s. w.

663) Ist der Radius der Kugel = x, so ist der des Durchschnitts = $\frac{x}{2}$ und die Entfernung des letztern vom Kugelmittelpunkte = $\sqrt{\frac{3x^2}{4}} = \frac{x}{2}\sqrt{3}$, also nach Lehrs. 5:

$$2\pi x (x - \tfrac{x}{2}\sqrt{3}) = 104,5 \text{ u. s. w.}$$

2) Berechnung des Kugelsektors.

664) Der Inhalt der Haube ist nach Lehrs. 5 $= 2\pi . 2,6 . 1,6 = 26,1248 \square'$ und der Kegelmantel, da der Halbmesser des Durchschnitts = $\sqrt{2,6^2 - 1^2} = 2,4'$ ist, nach §. 12 Lehrs. 1 = $\frac{2\pi . 2,4 . 2,6}{2} = 19,5936 \square'$, also die Oberfläche = der Summe beider u. s. w.

665) Befolge den in vorhergeh. Aufgabe angedeuteten Weg.

666) Die Entfernung der Schnittfläche vom Mittelpunkte der Kugel ist = $\sqrt{R^2 - r^2}$ und die Höhe der Haube =

Digitized by Google

$$R - \sqrt{R^2 - r^2}, \text{ also die Oberfläche} =$$

$$2\pi R\left(R - \sqrt{R^2 - r^2}\right) + \frac{2\pi rR}{2} \text{ u. s. w.}$$

667) Vergl. die Andeut. zu 666.

668) Suche die Entfernung des Schnittes vom Mittelpunkte der Kugel (= 3′), dann den Halbmesser der Kugel u. s. w.

669) Der Durchmesser der Kugel sei = x, der des Durchschnittes = y und die Höhe der Haube = z, so ist:

$$\text{I. } 2\pi x \,.\, z = 11{,}304$$

$$\text{II. } \frac{2\pi y \,.\, x}{2} = 28{,}56 - 11{,}304$$

$$\text{III. } x^2 = y^2 + (x - z)^2 \text{ u. s. w.}$$

670) Da die Haube = 56,52 □′ ist, so wird der Kubikinhalt des Sektors nach Lehrs. 6 $= \frac{56{,}52 \,.\, 4{,}5}{3}$ u. s. w.

671) Die Haube ist nach 654 $= 2\pi R\left(R - \sqrt{R^2 - r^2}\right)$ ꝛc. nach Lehrs. 6.

672) Substituire die betreffenden Werthe.

673) Die Haube war $= 2\pi\left(a^2 + r^2 - a\sqrt{a^2 + r^2}\right)$, also ist nach Lehrs. 6 der Kubikinhalt des Sektors =

$$\frac{2\pi}{3}\left(a^2 + r^2 - a\sqrt{a^2 + r^2}\right)\sqrt{a^2 + r^2} \text{ u. s. w.}$$

674) Vergl. 656 und 673.

675) Suche zuerst den Halbmesser der Kugel, dann die Haube (Lehrs. 5) und endlich den Kubikinhalt des Sektors nach Lehrs. 6.

676) Ist die Höhe der Haube = x, so ist deren Inhalt = πDx, also nach Lehrs. 6: $\pi Dx \,.\, \frac{D}{6} = K$ u. s. w.

677) Verfahre nach Andeut. 676.

678) Nach Andeut. 676 ist $D = \sqrt{\frac{6K}{\pi h}}$ u. s. w.

679) Suche zuerst den Radius der Kugel (= 6,5′), so ist, wenn x die Höhe der Haube bezeichnet,

$$2\pi \,.\, 6{,}5 \,.\, x \,.\, \frac{6{,}5}{3} = 44{,}222 \text{ (Lehrs. 6),}$$

woraus folgt: x = 0,5′; also ist der Halbmesser des Begrenzungskreises $= \sqrt{6{,}5^2 - 6^2}$ u. s. w.

Digitized by Google

3) Berechnung des Kugelsegmentes.

680) Addire den Inhalt der Haube (vergl. Lehrs. 5) und den Inhalt des Begrenzungskreises, dessen Halbmesser $= \sqrt{1^2-0{,}5^2}$ wird.

681) Die Entfernung des Begrenzungskreises vom Kugelmittelpunkte ist $= \sqrt{R^2-r^2}$, also die Höhe der Haube $= R - \sqrt{R^2-r^2}$ und der Inhalt der Haube $= 2\pi R\,(R - \sqrt{R^2-r^2})$ (Lehrs. 5). Addire hierzu den Inhalt des Begrenzungskreises ($= \pi r^2$) u. s. w.

682) Ist der Halbmesser der Kugel $= x$, so verhält sich

$$1{,}8 : 2{,}4 = 2{,}4 : x - 1{,}8.$$

Bestimme hieraus x und dann die Oberfläche.

683) Um die Oberfläche zu bestimmen, verfahre wie bei vorhergeh. Aufgabe. Der Halbmesser der Kugel ist $= 1{,}25'$. Um den Kubikinhalt zu berechnen, ziehe man den Inhalt des Kegels $\left(= \frac{\pi \,.\, 1{,}2^2 \,.\, 0{,}35}{3}\right)$ von dem Inhalte des Sektors

$$\left(= 2\pi \,.\, 1{,}25 \,.\, 0{,}9 \,.\, \frac{1{,}25}{3}\right) \text{ ab.}$$

684) Ist der Halbmesser der Kugel $= x$, so verhält sich

$$h : r = r : 2x - h, \text{ also } x = \frac{h^2 + r^2}{2h}$$

folglich die Oberfläche $= 2\pi\left(\frac{h^2+r^2}{2h}\right) h + \pi r^2$ u. s. w.

Ferner ist:

Kubikinh. des Sektors $= 2\pi\left(\frac{h^2+r^2}{2h}\right) h \left(\frac{h^2+r^2}{6h}\right)$ (Lehrs. 6.)

Kubikinh. des Kegels $= \frac{\pi r^2}{3}\left(\frac{h^2+r^2}{2h} - h\right)$ (§. 12 Lehrs. 2).

Durch Subtraktion beider findet man den Kubikinhalt des Segmentes.

686) Ist x der Halbmesser des Begrenzungskreises, so ist $x^2 = R^2 - (R-h)^2 = (2R - h)h$ und nach Lehrs. 6 der Inhalt des Sektors $= 2\pi R \,.\, h \,.\, \frac{R}{3} = \frac{2\pi R^2 \,.\, h}{3}$, ferner der

Digitized by Google

Inhalt des Kegels $= \pi h (2R - h)(r - h)$, also der Kubikinhalt des Segmentes = dem Unterschiede beider =

$$\frac{\pi h}{3}\left[2R^2 - (2R - h)(r - h)\right] \text{ u. s. w.}$$

687) Substituire die betreffenden Werthe in 686.

688) Bestimme die Höhe der Haube, dann nach 686 den Kubikinhalt des einen Segmentes, und ziehe diesen von dem Inhalte der Kugel ab, um den Inhalt des andern Theils zu erhalten.

689) Die Höhe des Segmentes wird $= R - \sqrt{R^2 - r^2}$. Verfährt man nun ähnlich wie bei 686, so erhält man: Kubikinhalt $= \frac{\pi}{3}\left(R - \sqrt{R^2 - r^2}\right)^2\left[3R - \left(R - \sqrt{R^2 - r^2}\right)\right]$ und wenn man die angedeuteten Operationen ausführt:

$$= \frac{\pi}{3}\left[2R^3 - 2R^2\sqrt{(R^2 - r)} - r^2\sqrt{(R^2 - r^2)}\right] \text{ oder}$$

$$= \frac{\pi}{3}\left[2R^3 - (2R^2 + r^2)\sqrt{(R^2 - r^2)}\right].$$

691) Der Halbmesser der Kugel ist $= \sqrt{a^2 + r^2}$, also die Höhe des Segmentes $= \sqrt{a^2 + r^2} - a$ u. s. w. nach 686.

693) Substituire die betreffenden Werthe in das Resultat für Aufg. 686 und suche daraus den Halbmesser.

694) Aus dem Resultate zu 684 folgt, wenn man die Höhe durch x bezeichnet: $\frac{\pi x}{6}(x^2 + 3x^2) = 6{,}28$ u. s. w.

695) Bezeichnet x die Höhe, so ist der Halbmesser des Begrenzungskreises $= 2x$, also nach 684: $\frac{\pi x}{6}\left(x^2 + 3(2x)^2\right) = 1$ u. s. w.

696) Der Durchmesser der Kugel sei $= x$, so ist das Gewicht derselben $= 16{,}956x^3$ und das Gewicht des verdrängten Wassers (vergl. Resultat zu 686) =

$$\frac{\pi(x - 0{,}8)^2}{3}\left(\frac{3x}{2} - (x - 0{,}8)\right) . 54.$$

Setzt man nun beide Werthe einander gleich und reducirt, so erhält man die Gleichung: $x^3 - 4{,}8x + 2{,}56 = 0$ u. s. w.

697) Das Gewicht der Kugel ist $= 158{,}256$ ℔, und wenn man die Tiefe des Einsinkens mit x bezeichnet, so ist (nach 686)

Digitized by Google

das Gewicht des verdrängten Wassers $= \frac{\pi x^2}{3}(3 - x) \cdot 54$;

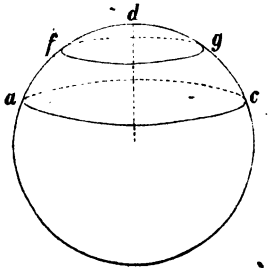
folglich ist für das Gleichgewicht: $\frac{\pi x^2}{3}(3 - x) \cdot 54 = 158{,}256$ oder:

$x^3 - 3x^2 + 2{,}8 = 0$ u. s. w.

4) Berechnung des Kugelgürtels und der körperlichen Zone.

698) Nach Lehrs. 5 ist der Inhalt des Gürtels $= 2\pi \cdot 2{,}4 \cdot 1{,}5$ u. s. w. Um den Kubikinhalt der Zone zu finden, hat man (Fig. 55):

Fig. 55.



Kubikinhalt acda $= \frac{\pi \cdot 2^2}{3}(3 \cdot 2{,}4 - 2)$ (nach 686) und Kubikinhalt fgd $= \frac{\pi \cdot 0{,}5^2}{3}(3 \cdot 2{,}4 - 0{,}5)$; also der Kubikinhalt der Zone = der Differenz beider Segmente u. s. w.

699) Verfährt man, um den Kubikinhalt der Zone zu finden, auf gleiche Weise wie in vorhergeh. Aufgabe, so erhält man:

$$\text{Kubikinh.} = \frac{\pi(R-a)^2}{3}\Big(3R-(R-a)\Big) - \frac{\pi(R-d-a)^2}{3}\Big(3R-(R-d-a)\Big)$$

und hieraus nach gehöriger Reduktion die verlangte Formel.

700) Der Kubikinhalt ist $= \frac{\pi \cdot 3^3}{12} - \frac{\pi \cdot 1^2}{3}(3 \cdot 1{,}5 - 1)$ (vergl. Lehrs. 2 und 686).

701) Setze in der Formel für Aufg. 699: $a = 0$ u. s. w.

702) und 703) Verfahre ähnlich wie bei 699.

704) Der Kubikinhalt wird (vergl. 686):

$$\frac{\pi H^2}{3}(3R - H) - \frac{\pi h^2}{3}(3R - h) \text{ u. s. w.}$$

706) Bestimme die Entfernung der größern Grundfläche vom Kugelmittelpunkte und die Höhe der Zone und verfahre dann nach 699, oder suche die Höhen der Segmente und wende 704 an, um den Kubikinhalt zu finden.

707) Ist x der Abstand des größern Begrenzungskreises von dem Mittelpunkte der Kugel, so muß $3^2 + x^2 = 2^2 + (2 + x)^2$

Digitized by Google

sein, woraus sich x und somit auch der Halbmesser der Kugel bestimmen läßt. Nun verfahre man nach 699 oder 704.

708) Verfährt man wie in 707, so folgt:

$$r'^2 + x^2 = r^2 + (d + x)^2, \text{ woraus:}$$

$$x = \frac{r'^2 - r^2 - d^2}{2d}.$$

Substituirt man nun die betreffenden Werthe in die Formel für Aufg. 699, so erhält man:

$$\text{Kubikinhalt} = \pi d\left[(r'^2 + x^2) - x^2 - xd - \frac{d^2}{3}\right], \text{ oder:}$$

$$= \pi d\left[r'^2 - \frac{r'^2 - r^2 - d^2}{2} - \frac{d^2}{3}\right] \text{ u. s. w.}$$

710) Nach dem Resultate zu 708 muß

$$\frac{\pi \,.\, 0{,}6}{6}\,(3 \,.\, 2^2 + 3x^2 + 0{,}36) = 6 \text{ sein u. s. w.}$$

711) Setze in 708 $r' = x$ und $r = x + 1$, bilde eine Gleichung und entwickle daraus die unbekannten Größen.

712) Bilde aus der Formel für Aufg. 699 eine Gleichung und bestimme daraus die Unbekannte a.

Druckfehler.

Seite 7 Zeile 4 v. u. setze congruente statt congruenet.

Verbesserungen zum ersten Theile.

Seite 56 Nr. 472 setze Viertel statt Morgen.
„ 88 Nr. 12b) setze 3%'' statt 4''.
„ 111 Nr. 472 setze dg = 76,386' und mn = 141,824' statt des dort angegebenen Resultates.

Verbesserung zum zweiten Theile.

Seite 19 Nr. 193 setze Gußeisen statt Blei.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 06818 3477

Math
QA
453
S76le

Spitz, Carl
Elemente der
Geometrie in Lehrsätzen

Digitized by Google